Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 6

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛОЕ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

УДК 572.33

А. В. Латышев, Г. В. Слободской, А. А. Юшканов

Московский педагогический университет, 107005 Москва

Введение. В явном виде построена функция распределения разреженного газа в слое с зеркальными граничными условиями, причем нижняя пластина, ограничивающая газ, совершает нормальные гармонические колебания, а верхняя покоится. Применяется нестационарное уравнение Больцмана с оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагар — Гросс — Крук).

Для нахождения функции распределения в явном виде в настоящей работе используется метод разложения решения граничных задач по собственным обобщенным функциям соответствующего характеристического уравнения. Основы этого метода изложены в [1]. Обзор попыток аналитического решения кинетических уравнений в слое для задач о критическом слое в теории ядерных реакторов, задач Куэтта и Пуазейля и др., помимо [1], дан также в [2–4]. В [1–4] были использованы численно-аналитические методы.

В настоящей работе получено точное решение граничной задачи для кинетического уравнения в слое. При этом модифицируется известный метод Кейза — Цвайфеля [1]. Отметим, что именно модификация этого метода позволила [5–8] решить ряд задач для модельных кинетических уравнений, длительное время не поддававшихся точному решению. К таким задачам относятся: задача о вычислении скачка температуры [5], задача Ландау (точно решенная им для полупространства) о поведении электронной плазмы в слое [6], задача о сильном испарении для одномерного [7] и трехмерного [8] газа.

Отметим, что в [9, 10] предпринята попытка развить метод Кейза — Цвайфеля для точного решения полупространственной граничной задачи для модельного нестационарного уравнения Больцмана. Однако построенная теория на основе техники абелевых дифференциалов на римановых поверхностях столь сложна, что до сих пор не была использована в решении прикладных задач. Для сравнения укажем, что именно развиваемый в данной работе метод позволяет в замкнутой форме построить функцию распределения разреженного газа в слое.

1. Постановка задачи. Рассмотрим слой толщины d, заполненный разреженным газом. Нижняя пластина, ограничивающая газ, лежит в плоскости $x = 0$, а верхняя — в плоскости $x = d$. Ось x перпендикулярна пластинам. Нижняя пластина совершает нормальные гармонические колебания с частотой ω и амплитудой U ($x = Ue^{i\omega t}$) относительно своего положения равновесия ($x = 0$). Верхняя пластина закреплена неподвижно. Требуется построить функцию распределения газовых молекул.

Возьмем модельное кинетическое уравнение Больцмана с оператором столкновений в форме БГК (см., например, [11]):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\,\frac{\partial}{\partial x} + 1\right) Y(t,x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\,(-\mu'^2) Y(t,x,\mu')\, d\mu' \tag{1.1}$$

(μ — проекция молекулярной скорости на ось x). Граничные условия получаем из условия задачи:

$$\begin{aligned} Y(t,0,\mu) &= Y(t,0,-\mu) + 2U\mu e^{i\omega t}, \qquad t>0, \qquad \mu>0; \\ Y(t,d,\mu) &= Y(t,d,-\mu), \qquad t>0, \qquad \mu<0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Считая процесс установившимся, выделим временную переменную, положив

$$Y(t,x,\mu) = \Psi(x,\mu)\, e^{i\omega t}. \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.1), сведем нестационарную граничную задачу к стационарной:

$$\Big(i\omega + \mu\frac{\partial}{\partial x} + 1\Big)\Psi(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)\Psi(x,\mu')\,d\mu'. \tag{1.4}$$

Граничные условия (1.2) преобразуются к виду

$$\Psi(0,\mu) = \Psi(0,-\mu) + 2U\mu, \quad \mu>0, \quad \Psi(d,\mu) = \Psi(d,-\mu), \quad \mu<0. \tag{1.5}$$

Далее будем рассматривать граничную задачу, состоящую в решении уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5).

2. Характеристическая система уравнений. Собственные функции. Разделим переменные в уравнении (1.4) следующим образом:

$$\Psi_\eta(x,\mu) = \exp\Big[-\frac{x}{\eta}(1+i\omega)\Big]\Phi_1(\eta,\mu) + \exp\Big[-\frac{d-x}{\eta}(1+i\omega)\Big]\Phi_2(\eta,\mu), \tag{2.1}$$

где $\eta \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — комплексная плоскость); $\mu > 0$. Подставляя (2.1) в (1.4) и принимая условия нормировки

$$(1+i\omega)n_k(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\Phi_k(\eta,\mu)\,d\mu \qquad (k=1,\,2), \tag{2.2}$$

получим характеристическую систему уравнений:

$$(\eta-\mu)\Phi_1(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta n_1(\eta), \qquad (\eta+\mu)\Phi_2(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta n_2(\eta). \tag{2.3}$$

Решение системы (2.3) существенно зависит от того, принадлежит или нет спектральный параметр действительной оси. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\eta \notin \mathbb{R}$. Собственные функции имеют вид

$$\Phi_1(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\frac{1}{\eta-\mu}n_1(\eta), \qquad \Phi_2(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\frac{1}{\eta+\mu}n_2(\eta). \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), получим условия, накладываемые на собственные функции дискретного спектра: $\Lambda(z;\omega) = 0$, где

$$\Lambda(z;\omega) = \lambda_c(z) + i\omega, \qquad \lambda_c(z) = 1 + z\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\frac{1}{\mu-z}\,d\mu. \tag{2.5}$$

Дисперсионная функция (2.5), ее нули и свойства исследованы в [12].

2. Пусть $\eta \in \mathbb{R}$. Решение системы (2.3) находим в классе обобщенных функций [13]:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\eta,\mu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}n_1(\eta) + g_1(\eta)\delta(\eta-\mu), \\ \Phi_2(\eta,\mu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta+\mu}n_2(\eta) + g_2(\eta)\delta(\eta+\mu). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла по Коши; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Подставляя (2.6) в нормировочное условие (2.2), можно найти $g_{1,2}(\eta)$. Таким образом, система (2.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi_1(\eta,\mu) &= \Big[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\Lambda(\eta;\omega)\delta(\eta-\mu)\Big]n_1(\eta), \\ \Phi_2(\eta,\mu) &= \Big[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta P\,\frac{1}{\eta+\mu} + \exp(\eta^2)\Lambda(\eta;\omega)\delta(\eta+\mu)\Big]n_2(\eta). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Пусть

$$\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\Lambda(\eta;\omega)\delta(\eta-\mu). \tag{2.8}$$

Используя равенство (2.8), перепишем (2.7):

$$\Phi_1(\eta,\mu) = \Phi(\eta,\mu)n_1(\eta), \qquad \Phi_2(\eta,\mu) = \Phi(\eta,-\mu)n_2(\eta). \tag{2.9}$$

Таким образом, мы получили собственные функции дискретного спектра (2.4) и непрерывного (2.9).

3. Разложение граничной задачи по собственным векторам. Решение задачи (1.4), (1.5) будем искать в виде разложения по собственным функциям характеристической системы (2.3):

$$\begin{aligned} \Psi(x,\mu,\omega) &= a_1(\eta_0;\omega)\Phi_1(\eta_0,\mu)\exp\Big[-\frac{x}{\eta_0}(1+i\omega)\Big] + \\ &+ a_2(\eta_0;\omega)\Phi_2(\eta_0,\mu)\exp\Big[-\frac{d-x}{\eta_0}(1+i\omega)\Big] + \int_0^\infty A_1(\eta;\omega)\exp\Big[-\frac{x}{\eta}(1+i\omega)\Big]\Phi_1(\eta,\mu)\,d\eta + \\ &+ \int_0^\infty A_2(\eta;\omega)\exp\Big[-\frac{d-x}{\eta}(1+i\omega)\Big]\Phi_2(\eta,\mu)\,d\eta, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\mathrm{Re}\,[(1+i\omega)/\eta_0] > 0$.

Подставляя в (3.1) $x=0$, $x=d$ и учитывая (2.8), получим

$$\begin{aligned} \Psi(0,\mu,\omega) &= a_1(\eta_0;\omega)\Phi_1(\eta_0,\mu) + a_2(\eta_0;\omega)\Phi_2(\eta_0,\mu)\exp\Big[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\Big] + \\ &+ \int_0^\infty A_1(\eta;\omega)\Phi(\eta,\mu)n_1(\eta)\,d\eta + \int_0^\infty A_2(\eta;\omega)\exp\Big[-\frac{d}{\eta}(1+i\omega)\Big]\Phi(\eta,-\mu)n_2(\eta)\,d\eta, \\ \Psi(d,\mu,\omega) &= a_1(\eta_0;\omega)\exp\Big[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\Big]\Phi_1(\eta_0,\mu) + a_2(\eta_0;\omega)\Phi_2(\eta_0,\mu) + \\ &+ \int_0^\infty A_1(\eta;\omega)\exp\Big[-\frac{d}{\eta}(1+i\omega)\Big]\Phi(\eta,\mu)n_1(\eta)\,d\eta + \int_0^\infty A_2(\eta;\omega)\Phi(\eta,-\mu)n_2(\eta)\,d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия (1.5), имеем

$$2U\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2\eta_0\mu}{\eta_0^2-\mu^2}\Big\{a_1(\eta_0;\omega)n_1(\eta_0) - a_2(\eta_0;\omega)\exp\Big[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\Big]n_2(\eta_0)\Big\} +$$

$$+\int\limits_0^\infty A_1(\eta;\omega)n_1(\eta)\Big[\Phi(\eta,\mu)-\Phi(\eta,-\mu)\Big]\,d\eta+$$

$$+\int\limits_0^\infty A_2(\eta;\omega)\,\exp\left[-\frac{d}{\eta}(1+i\omega)\right]n_2(\eta)[\Phi(\eta,-\mu)-\Phi(\eta,\mu)]\,d\eta; \tag{3.2}$$

$$0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2\eta_0\mu}{\eta_0^2-\mu^2}\left\{\exp\left[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\right]a_1(\eta_0;\omega)n_1(\eta_0)-a_2(\eta_0;\omega)n_2(\eta_0)\right\}+$$

$$+\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{d}{\eta}(1+i\omega)\right]A_1(\eta;\omega)n_1(\eta)[\Phi(\eta,\mu)-\Phi(\eta,-\mu)]\,d\eta+$$

$$+\int\limits_0^\infty A_2(\eta;\omega)n_2(\eta)[\Phi(\eta,-\mu)-\Phi(\eta,\mu)]\,d\eta. \tag{3.3}$$

Введем односторонние функции:

$$n_k^+(\eta)=\begin{cases} n_k(\eta), & \eta\geqslant 0,\\ 0, & \eta<0,\end{cases}\qquad A_k^+(\eta;\omega)=\begin{cases} A_k(\eta;\omega), & \eta\geqslant 0,\\ 0, & \eta<0,\end{cases}\qquad k=1,\,2. \tag{3.4}$$

Используя выражения (3.2)–(3.4) и тот факт, что $\Phi(\eta,\mu)=\Phi(-\eta,-\mu)$, запишем систему уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(\mu;\omega)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta,\mu)n(\eta;\omega)\,d\eta=2U\mu,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\psi(\mu;\omega)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta,\mu)m(\eta;\omega)\,d\eta=0, \tag{3.5}$$

где

$$\varphi(\mu;\omega)=\frac{2\eta_0\mu}{\eta_0^2-\mu^2}\left[a_1(\eta_0;\omega)n_1(\eta_0)-a_2(\eta_0;\omega)\,\exp\left[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\right]n_2(\eta_0)\right],$$

$$\psi(\mu;\omega)=\frac{2\eta_0\mu}{\eta_0^2-\mu^2}\left[\exp\left[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\right]a_1(\eta_0;\omega)n_1(\eta_0)-a_2(\eta_0;\omega)n_2(\eta_0)\right], \tag{3.5a}$$

$$n(\eta;\omega)=A_1^+(\eta;\omega)n_1^+(\eta)-A_1^+(\omega;-\eta)n_1^+(-\eta)+$$

$$+\exp\left[\frac{d}{\eta}(1+i\omega)\right]A_2^+(\omega;-\eta)n_2^+(-\eta)-\exp\left[-\frac{d}{\eta}(1+i\omega)\right]A_2^+(\eta;\omega)n_2^+(\eta),$$

$$m(\eta;\omega)=\exp\left[-\frac{d}{\eta}(1+i\omega)\right]A_1^+(\eta;\omega)n_1^+(\eta)-$$

$$-\exp\left[\frac{d}{\eta}(1+i\omega)\right]A_1^+(\omega;-\eta)n_1^+(-\eta)+A_2^+(\omega;-\eta)n_2^+(-\eta)-A_2^+(\eta;\omega)n_2^+(\eta).$$

Здесь и далее, если это не оговорено, будем считать, что $\mu\in\mathbb{R}$.

Учитывая (2.8), преобразуем систему (3.5) к системе интегральных сингулярных уравнений с ядром Коши:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(\mu;\omega)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta n(\eta;\omega)\,\frac{d\eta}{\eta-\mu}+\exp(\mu^2)\Lambda(\mu;\omega)n(\eta;\omega)=2U\mu,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\psi(\mu;\omega)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta m(\eta;\omega)\,\frac{d\eta}{\eta-\mu}+\exp(\mu^2)\Lambda(\mu;\omega)m(\eta;\omega)=0.$$

Введем вспомогательные функции:

$$N(z;\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta n(\eta;\omega)\,\frac{1}{\eta-z}\,d\eta; \tag{3.6}$$

$$M(z;\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta m(\eta;\omega)\,\frac{1}{\eta-z}\,d\eta. \tag{3.7}$$

Функции $N(z;\omega)$ и $M(z;\omega)$ являются кусочно-аналитическими в комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной оси. Используя формулы Сохоцкого [14] для значений функций $N(z;\omega)$, $M(z;\omega)$, $\Lambda(z;\omega)$ на разрезе, имеем

$$\Lambda^+(\mu;\omega)-\Lambda^-(\mu;\omega)=2\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu^2); \tag{3.8}$$

$$N^+(\mu;\omega)-N^-(\mu;\omega)=2\pi i\mu n(\mu;\omega); \tag{3.9}$$

$$M^+(\mu;\omega)-M^-(\mu;\omega)=2\pi i\mu m(\mu;\omega). \tag{3.10}$$

Используя (3.8)–(3.10), запишем систему скалярных краевых задач Римана:

$$\Lambda^+(\mu;\omega)[\varphi(\mu;\omega)+N^+(\mu;\omega)-2\sqrt{\pi}U\mu]=\Lambda^-(\mu;\omega)[\varphi(\mu;\omega)+N^-(\mu;\omega)-2\sqrt{\pi}U\mu],$$
$$\Lambda^+(\mu;\omega)[\psi(\mu;\omega)+M^+(\mu;\omega)]=\Lambda^-(\mu;\omega)[\psi(\mu;\omega)+M^-(\mu;\omega)].$$

Пусть

$$P(z;\omega)=\Lambda(z;\omega)[\varphi(z;\omega)+N(z;\omega)-2\sqrt{\pi}Uz],\qquad Q(z;\omega)=\Lambda(z;\omega)[\psi(z;\omega)+M(z;\omega)].$$

По теореме об аналитическом продолжении [14] функция $P(z;\omega)$ аналитична в комплексной плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс первого порядка. Тогда по теореме Лиувилля [14] $P(z;\omega)$ есть полином первого порядка (c_0+c_1z). Учитывая, что $P(0;\omega)=0$, получим $P(z;\omega)=c_1z$, следовательно,

$$N(z;\omega)=2\sqrt{\pi}Uz+\frac{c_1z}{\Lambda(z;\omega)}+$$
$$+\frac{2\eta_0z}{z^2-\eta_0^2}\Big\{a_1(\eta_0;\omega)n_1(\eta_0)-a_2(\eta_0;\omega)\exp\Big[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\Big]n_2(\eta_0)\Big\}. \tag{3.11}$$

Проводя аналогичные рассуждения, находим

$$M(z;\omega)=\frac{2\eta_0z}{z^2-\eta_0^2}\Big\{\exp\Big[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\Big]a_1(\eta_0;\omega)n_1(\eta_0)-a_2(\eta_0;\omega)n_2(\eta_0)\Big\}. \tag{3.12}$$

Очевидно, что (3.11), (3.12) имеют полюсы первого порядка в конечных точках $\pm\eta_0$, и, кроме того, (3.11) имеет полюс первого порядка в бесконечно удаленной точке. Однако вспомогательные функции $M(z;\omega)$, $N(z;\omega)$, задаваемые формулами (3.6), (3.7), являются кусочно-аналитическими везде в комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной оси. Поэтому, чтобы принять решения (3.11), (3.12) в качестве вспомогательных функций, необходимо и достаточно устранить ранее выявленные у них особенности.

Учитывая поведение функции $\Lambda(z;\omega)$ на бесконечности, устраним у функции $N(z;\omega)$ полюс в бесконечно удаленной точке, положив $c_1=-2\sqrt{\pi}U\omega i$. Легко видеть, что теперь $N(z;\omega)=O(1/z)$. Осталось устранить у функций $N(z;\omega)$, $M(z;\omega)$ полюсы первого порядка в конечных точках $\pm\eta_0$. Учитывая четность функции $\Lambda(z;\omega)$ и нечетность $N(z;\omega)$, для устранения полюсов необходимо и достаточно устранить полюс в точке η_0, тогда в точке $-\eta_0$ он устранится автоматически. Разложив $\Lambda(z;\omega)$ в ряд в окрестности точки η_0 (заметим, что функция $\Lambda(z;\omega)$ аналитична в точке η_0, и поэтому получим ряд Тейлора) и учитывая поведение $M(z;\omega)$ в окрестности этой точки, имеем систему двух линейных уравнений:

$$\begin{gathered} a_1(\eta_0;\omega)n_1(\eta_0) - \exp\Big[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\Big]a_2(\eta_0;\omega)n_2(\eta_0) = -\frac{c_1}{\lambda_c'(\eta_0)}, \\ \exp\Big[-\frac{d}{\eta_0}(1+i\omega)\Big]a_1(\eta_0;\omega)n_1(\eta_0) - a_2(\eta_0;\omega)n_2(\eta_0) = 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Решая систему (3.13), определим коэффициенты дискретного спектра:

$$\begin{aligned} a_1(\eta_0;\omega) &= \frac{c_1}{\lambda_c'(\eta_0)n_1(\eta_0)(\exp[-2d(1+i\omega)/\eta_0]-1)}, \\ a_2(\eta_0;\omega) &= \frac{c_1}{\lambda_c'(\eta_0)n_2(\eta_0)(\exp[-d(1+i\omega)/\eta_0]-\exp[d(1+i\omega)/\eta_0])}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Найдем теперь коэффициенты непрерывного спектра. Для этого, воспользовавшись формулами Сохоцкого и соотношениями (3.8), (3.9), возьмем разность граничных значений функции $N(z;\omega)$ и, учитывая тот факт, что $M(z;\omega)\equiv 0$ (за счет выбора коэффициентов дискретного спектра), получим систему линейных уравнений:

$$n(\mu;\omega) = \frac{c_1\mu\exp(-\mu^2)}{\sqrt{\pi}\Lambda^+(\mu;\omega)\Lambda^-(\mu;\omega)}, \qquad m(\mu;\omega) = 0.$$

Решая эту систему, запишем выражения для коэффициентов непрерывного спектра:

$$\begin{aligned} A_1^+(\eta;\omega) &= \frac{c_1\mu\exp(-\mu^2)}{\sqrt{\pi}\Lambda^+(\mu;\omega)\Lambda^-(\mu;\omega)n_1(\eta)(1-\exp[-2d(1+i\omega)/\eta])}, \\ A_2^+(\eta;\omega) &= \frac{c_1\mu\exp(-\mu^2)}{\sqrt{\pi}\Lambda^+(\mu;\omega)\Lambda^-(\mu;\omega)n_2(\eta)(\exp[d(1+i\omega)/\eta]-\exp[-d(1+i\omega)/\eta])}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Итак, все коэффициенты разложения найдены в явном виде и задаются формулами (3.14), (3.15). Тот факт, что разложение является решением исходной граничной задачи, проверяется непосредственно. Единственность решения следует из невозможности нетривиального разложения нуля по собственным векторам характеристического уравнения. Таким образом, решение исходной граничной задачи в виде разложения (3.1) установлено.

4. Анализ полученных результатов. Для того чтобы проанализировать полученные результаты, рассмотрим четыре предельных случая.

1. Пусть $\omega \ll 1$. Разложим дисперсионную функцию $\Lambda(z;\omega)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\Lambda(z;\omega) = -\frac{1}{2z^2} + i\omega + o\Big(\frac{1}{z^2}\Big), \qquad |z|\to\infty. \tag{4.1}$$

Из формулы (4.1) находим собственные значения дискретного спектра:

$$\eta_0 = \pm\frac{i-1}{1\sqrt{\omega}}. \tag{4.2}$$

Таким образом, получаем, что при малых значениях ω собственные значения дискретного спектра стремятся к бесконечности.

2. Пусть $d \to \infty$. Воспользовавшись выражениями для коэффициентов разложения (3.14) и (3.15), имеем

$$a_1(\eta_0;\omega) = \frac{2\sqrt{\pi} i\omega U}{\lambda_c'(\eta_0) n_1(\eta_0)}, \qquad a_2(\eta_0;\omega) = 0; \tag{4.3}$$

$$A_1^+(\eta;\omega) = -\frac{2Ui\omega\mu \exp(-\mu^2)}{\Lambda^+(\mu;\omega)\Lambda^-(\mu;\omega) n_1(\eta)}, \qquad A_2^+(\eta;\omega) = 0. \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) следует, что при $d \to \infty$ вклад $\Phi_2(\eta,\mu)$ стремится к нулю, и разложение (3.1) принимает вид

$$\Psi(x,\mu,\omega) = a_1(\eta_0;\omega)\Phi_1(\eta_0,\mu) \exp\left[-\frac{x}{\eta_0}(1+i\omega)\right] + \int\limits_0^\infty A_1(\eta;\omega) \exp\left[-\frac{x}{\eta}(1+i\omega)\right]\Phi_1(\eta,\mu)\,d\eta,$$

где $a_1(\eta_0;\omega)$ и $A_1(\eta;\omega)$ задаются соотношениями (4.3), (4.4).

С другой стороны, $a_1(\eta_0;\omega)$ и $A_1(\eta;\omega)$ могут быть получены из следующих соображений. Заметим, что при $d \to \infty$ функции $\psi(\mu;\omega)$ и $m(\eta;\omega)$, задаваемые соотношениями (3.5а) и стоящие во втором уравнении системы (3.5), обращаются в нуль. Таким образом, система (3.5) сводится к интегральному сингулярному уравнению с ядром Коши. Воспользовавшись теоремами об ортогональности и полноте собственных функций на числовой оси [15], найдем выражения для коэффициентов разложения:

$$a_1(\eta_0;\omega) = \frac{2\sqrt{\pi} i\omega U}{\lambda_c'(\eta_0) n_1(\eta_0)}, \quad A_1^+(\eta;\omega) = \frac{2Ui\omega\mu \exp(-\mu^2)}{\Lambda^+(\mu;\omega)\Lambda^-(\mu;\omega) n_1(\eta)}. \tag{4.5}$$

Видно, что выражения для коэффициентов из (4.3), (4.4) полностью совпадают с выражениями (4.5), полученными на основе доказанных ранее соотношений.

3. Пусть $|\eta_0| \ll d$, $\omega \ll 1$, $1 \ll x$. В этом случае (вне слоя Кнудсена) остается только дискретная мода. Непрерывная мода исчезает в силу быстрого затухания экспоненты. Разложение (3.1) имеет вид

$$\Psi(x,\mu,\omega) = a_1(\eta_0;\omega)\Phi_1(\eta_0,\mu) \exp\left[-\frac{x}{\eta_0}(1+i\omega)\right].$$

Пусть

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2) a_1(\eta_0;\omega)\Phi_1(\eta_0,\mu) \exp\left[-\frac{x}{\eta_0}(1+i\omega)\right] d\mu.$$

С учетом (2.4) и (4.3) получим

$$\delta_n = -\frac{2iU\omega \exp\left[-\frac{x}{\eta_0}(1+i\omega)\right]}{\lambda_c'(\eta_0)} \eta_0 t(\eta_0).$$

Учитывая поведение функции $\lambda_c(z)$ при малых значениях ω и используя выражение для η_0, для относительной концентрации запишем

$$\mathrm{Re}\delta_n = -\frac{U \exp[-x\sqrt{\omega}(1-\omega)]}{2\sqrt{\omega}} [(1-\omega)\sin(x\sqrt{\omega}(1+\omega)) - (1+\omega)\cos(x\sqrt{\omega}(1+\omega))].$$

4. Пусть $1 \ll d \leqslant |\eta_0|$, $\omega \ll 1$, $1 \ll x$, $(d-x) \gg 1$. Разложение (3.1) принимает вид

$$\Psi(x,\mu,\omega) = a_1(\eta_0;\omega)\Big\{\Phi_1(\eta_0,\mu) \exp\left[-\frac{x}{\eta_0}(1+i\omega)\right] + \alpha\Phi_2(\eta_0,\mu) \exp\left[-\frac{d-x}{\eta_0}(1+i\omega)\right]\Big\},$$

где

$$\alpha = \frac{a_2(\eta_0;\omega)}{a_1(\eta_0;\omega)} = \frac{n_1(\eta_0)}{n_2(\eta_0)} \exp\left[-d(1+i\omega)/\eta_0\right].$$

Очевидно, что коэффициент α характеризует отраженную волну. В этом случае δ_n имеет вид

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2) a_1(\eta_0;\omega)\Phi_1(\eta_0,\mu) \exp\left[-\frac{x}{\eta_0}(1+i\omega)\right] d\mu +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2) a_2(\eta_0;\omega)\Phi_2(\eta_0,\mu) \exp\left[-\frac{d-x}{\eta_0}(1+i\omega)\right] d\mu.$$

Учитывая (2.4) и (4.3), получим

$$\delta_n = \frac{2iU\omega}{\lambda_c'(\eta_0)} \eta_0 t(\eta_0) \left\{ \exp\left[-\frac{x}{\eta_0}(1+i\omega)\right] + \exp\left[-\frac{2d-x}{\eta_0}(1+i\omega)\right]\right\} \Big/ \left\{ \exp\left[-\frac{2d}{\eta_0}(1+i\omega)\right] - 1\right\}.$$

Следовательно, выражение для относительной концентрации примет вид

$$\mathrm{Re}\delta_n = \frac{r_1 r_2}{(r_2 a_2 - 1)^2 + (r_2 b_2)^2} \left\{ a_1 + r_2[(a_1 a_2 + b_1 b_2)(a_2 - 1) + (b_2 a_1 - a_2 b_1) b_2] \right\}.$$

Здесь

$$a_1 = \cos(x\sqrt{\bar\omega}(1+\omega)); \quad b_1 = \sin(x\sqrt{\bar\omega}(1+\omega)); \quad r_1 = \exp[-x\sqrt{\bar\omega}(1-\omega)];$$

$$a_2 = \cos(2d\sqrt{\bar\omega}(1+\omega)); \quad b_2 = \sin(2d\sqrt{\bar\omega}(1+\omega)); \quad r_2 = \exp[2d\sqrt{\bar\omega}(1-\omega)].$$

Итак, в данной работе развивается метод, приводящий к точному решению граничных задач в слое для нестационарных модельных кинетических уравнений с зеркальными граничными условиями, причем нижняя пластина, ограничивающая газ, совершает нормальные гармонические колебания, а верхняя покоится.

Разделение переменных приводит к характеристической системе. Найдены собственные функции дискретного и непрерывного спектров характеристической системы. Установлено разложение решения исходной граничной задачи по собственным функциям. Неизвестные коэффициенты разложения получены в явном виде.

Задачи с граничными условиями (1.5) могут быть использованы при решении самых разнообразных проблем кинетической теории газа и плазмы, в теории переноса нейтронов, электронов, в теоретической астрофизике и т. д.

Авторы выражают благодарность Ю. А. Башлачеву, предложившему рассмотрение данной проблемы, возникшей у него при экспериментальном изучении дисперсии ультразвуковых волн в слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кейз К. М., Цвайфель П. Ф.** Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
2. **Greenberg W., van der Mee C. V. M., Protopopescu V.** Boundary value problems in abstract kinetic theory // Operator Theory: Advances and Applications. 1987. V. 23.
3. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1973.
4. **Черчиньяни К.** О методах решения уравнения Больцмана // Неравновесные явления. Уравнение Больцмана / Под ред. Дж. Л. Либовица, Е. У. Монтролла. М.: Мир, 1986. С. 132–203.

5. **Латышев А. В.** Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК-уравнения в задаче о температурном скачке // ПММ. 1990. Т. 54, вып. 4. С. 581–586.
6. **Латышев А. В., Лесскис А. Г., Юшканов А. А.** Точное решение задачи о поведении электронной плазмы в слое металла в переменном электрическом поле // Теорет. и мат. физика. 1992. Т. 90, № 2. С. 179–189.
7. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Аналитическое решение одномерной задачи об умеренно сильном испарении (и конденсации) в полупространстве // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 1. С. 102–108.
8. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Аналитическое решение задачи о сильном испарении (конденсации) // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 6. С. 143–155.
9. **Aoki K., Cercignani C.** A technique for time-dependent boundary value problems in the kinetic theory of gases. Pt I. Basic analysis // ZAMP. 1984. Bd 35. S. 127–143.
10. **Aoki K., Cercignani C.** A technique for time-dependent boundary value problems in the kinetic theory of gases. Pt II. Application to sound propagation // ZAMP. 1984. Bd 35. S. 345–362.
11. **Черчиньяни К.** Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
12. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Аналитическое решение граничных задач для нестационарных кинетических уравнений // Теорет. и мат. физика. 1992. Т. 92, № 1. С. 127–138.
13. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1977.
14. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
15. **Слободской Г. В.** Граничные задачи для нестационарного кинетического уравнения. М., 1995. Деп. в ВИНИТИ 25.09.1995, № 3278-В95.

Поступила в редакцию 19/II 1996 г.,
в окончательном варианте — 27/V 1996 г.