Теплофизика и аэромеханика, 2008, том 15, № 2

УДК 536.3+536.42

Тепловое излучение осесимметричных полупрозрачных систем*

Н.А. Рубцов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Анализируются свойства теплового излучения осесимметричных систем, образованных поглощающей средой. На основе интегральных уравнений излучения предлагается анализ поглощательной и пропускательной способностей систем с непроницаемой границей, а также — поглощательной, пропускательной и отражательной способностей систем с проницаемой для излучения границей.

Рассматриваются осесимметричные системы (плоский слой, бесконечный цилиндр, сфера), составленные из поглощающей и излучающей сред с непрозрачными и проницаемыми для теплового излучения границами.

Коэффициент полусферического поглощения (излучения) непроницаемой границы определяется из условия $A_\nu^\Gamma \equiv \varepsilon_\nu = 1 - R_\nu$, в котором значение коэффициента полусферического отражения R_ν задается по условиям задачи.

Проницаемая граница, будучи идеально гладкой, не поглощает излучения, но выделяет рассматриваемую систему с показателем преломления n_ν из окружающей среды с показателем преломления $n_{0\nu} < n_\nu$. Такая граница характеризуется коэффициентом полусферического пропускания излучения $D_\nu^\Gamma = 1 - R_\nu$, в котором значение R_ν определяется из условия преломления излучения на границе сопряжения однородных сред с показателями преломления n_ν и $n_{0\nu}$. В дальнейшем полагаем $n_{0\nu} \equiv 1$, а индекс частоты ν рассматриваемого монохроматического излучения опускаем.

Практический интерес рассматриваемого анализа связан с определение поглощательной (излучательной), пропускательной и отражательной способностей систем.

Подобные системы обладают выпуклой внешней и вогнутой внутренней поверхностями. Предполагается, что их характерный размер $L \gg \lambda$ (λ — длина волны излучения) и, следовательно, процессы переноса излучения в объеме систем могут быть описаны в рамках приближения геометрической оптики. Описываемые процессы преломления сопровождаются сжатием (расширением) меры множества лучей, формирующих потоки излучения, не связаны с энергетическим балансом излучающей системы и справедливы для любых n при условии, что $\chi \ll n$ (χ — показатель поглощения в комплексном показателе преломления, $m = n - i\chi$).

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-08-00587-а).

В рамках принятых допущений ниже рассматриваются уравнения состояния излучающих систем, записанные в форме интегральных уравнений излучения [1, 2] в произвольно замкнутых системах, заполненных изотропно излучающей (поглощающей) средой с диффузно излучающими (поглощающими) и отражающими границами. В качестве исходного используется интегральное уравнение, записанное относительно плотности потока полусферического (поверхностного) результирующего излучения [1, 2]:

$$\begin{gathered} E_{\text{рез}}(M) = (1 - R(M))\int\limits_F E_{\text{эф}}(N)Q(M,N)dF_N + \\ +(1 - R(M))\int\limits_V \eta_{\text{соб}}(P)L(M,P)dV_P - E_{\text{соб}}(M), \quad M \in F. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь

$$\begin{gathered} Q(M,N) = e^{-h}\frac{\cos(\widehat{s,n_M})\cos(\widehat{s,n_N})}{\pi r_{MN}^2}, \\ L(M,N) = e^{-\Delta h}\frac{\cos(\widehat{s,n_M})}{4\pi r_{MP}^2}, \quad M \in F, \quad P \in V, \end{gathered} \tag{2}$$

$E_{\text{рез}}$ — плотность потока полусферического, поверхностного, результирующего излучения, $E_{\text{эф}} = (E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}})$ — плотность потока полусферического эффективного излучения, $E_{\text{отр}} = RE_{\text{пад}}$, $E_{\text{пад}}$, $E_{\text{соб}} = (1 - R)E_{\text{в}}$, $E_{\text{в}}$ — плотности потоков полусферического, соответственно, отраженного, падающего, собственного и равновесного излучений, $\eta_{\text{соб}} = \alpha\eta_{\text{в}} = 4\alpha E_{\text{в}}$ – плотность потока сферического собственного излучения, F, V — поверхность и объем поглощающей (излучающей) системы, $(\widehat{s, n_M})$ — угол между направлением излучения и нормалью в площадке с точкой $M(N) \in F$, $h = \int\limits_0^r \alpha(s)ds$, $\Delta h = \int\limits_{r^*}^r \alpha(s)ds$, α — коэффициент объемного поглощения излучения вдоль луча (s), r^*, r — фиксированные и текущие точки, r_{MN}, r_{MP} — расстояния между точками $M \in F$ и $N \in F$, а также $M \in F$ и $P \in V$.

В состоянии термодинамического равновесия излучающей системы представленные характеристики теплового излучения вырождаются в равновесные значения: $E_{\text{рез}} = 0$, $E_{\text{пад}} = E_{\text{в}} = \pi B$, $E_{\text{эф}} = E_{\text{в}} = \pi B$, $\eta_{\text{соб}} = \alpha\eta_{\text{в}} = 4\alpha\pi B$, где $B = B(T)$ — функция Планка.

При этом уравнение (1) вырождается в уравнение замкнутости

$$\int\limits_F Q(M,N)dF_N + 4\int\limits_V \alpha(P)L(M,P)dV_P = 1, \quad M \in F. \tag{3}$$

Уравнение (3) можно записать в виде соотношения

$$d(M,F) + a(M,V) = 1, \quad M \in F, \tag{4}$$

в котором выражения

$$d(M,F) = \int\limits_F Q(M,N)dF_N, \tag{5}$$

$$a(M,V) = 4\int\limits_V \alpha(P)L(M,P)dV_P, \quad M \in F \tag{6}$$

интерпретируются как вероятность события, заключающегося в том, что излучение, испускаемое элементарной площадкой с точкой M, достигнет границы F и, соответственно, объема V с учетом экранирования излучения промежуточной средой. В силу обратимости лучей и справедливости закона Кирхгофа выражения (5), (6) имеют смысл локальных значений соответственно пропускательной и поглощательной (излучательной) способностей среды системы относительно абсолютно черного элемента границы с точкой $M \in F$.

Осредняя (4) по поверхности системы, получим соотношение

$$d(F, F) + a(F, V) = 1, \tag{7}$$

в котором

$$d(F, F) = \frac{1}{F}\int_F d(M, F)dF_M = \frac{1}{F}\int_F\int_F Q(M, N)dF_N dF_M, \tag{8}$$

$$a(F, V) = \frac{1}{F}\int_F a(M, V)dF_M = \frac{1}{F}\int_F\int_V \alpha(P)L(M, P)dV_P dF_M \tag{9}$$

— осредненные по поверхности системы значения рассмотренных выше свойств среды пропускать и поглощать излучение, исходящее со стороны границы. Заметим, что представленные свойства не учитывают отражения излучения границей, которая является абсолютно черной.

Учет отражательных способностей системы вытекает из решения интегрального уравнения (1), записанного применительно к решению фундаментальной постановки задачи (определение потоков излучения по заданным полям температуры в объеме и на границах системы) [1, 2]:

$$\begin{gathered} E_{\text{рез}}(M) = (1 - R(M))\int_F E_{\text{соб}}(N)\Gamma(M, N)dF_N + \\ +(1 - R(M))\int_V \eta_{\text{соб}}(P)Z(M, P)dV_P - E_{\text{соб}}(M), \quad M \in F. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь

$$\Gamma(M, N) = Q(M, N) + \int_F R(P)Q(M, P)\Gamma(P, N)dF_P, \quad [M, N] \in F, \tag{11}$$

$$Z(M, P) = L(M, P) + \int_F R(N)\Gamma(M, N)L(N, P)dF_N, \quad M \in F, \quad P \in V \tag{12}$$

— взаимосвязанные разрешающие ядра интегрального уравнения (10), учитывающие многократное отражение излучения, исходящего из элементарной площадки с точкой $M \in F$ и попадающего либо на элементарную площадку с точкой $N \in F$, либо в элементарный объем с точкой $P \in V$.

В состоянии термодинамического равновесия системы из (10) вытекает уравнение замкнутости следующего вида:

$$\int_F (1 - R(N))\Gamma(M, N)dF_N + 4\int_V \alpha(P)Z(M, P)dV_P = 1, \quad M \in F. \tag{13}$$

Заметим, что здесь $(1 - R(N)) \equiv A^{\Gamma}(N) = \varepsilon(N)$, так как граница системы — непроницаемая ($D^{\Gamma} \equiv 0$).

Уравнение (13), по аналогии с (4), может быть записано в виде соотношения:

$$D(M, F) + A(M, V) = 1, \quad M \in F, \tag{14}$$

где

$$D(M, F) = \int_F (1 - R(N))\Gamma(M, N)dF_N, \quad M \in F, \tag{15}$$

$$A(M, V) = 4\int_V \alpha(P)Z(M, P)dV_P, \quad M \in F. \tag{16}$$

Осредняя (14) по поверхности, получаем

$$D(F, F) + A(F, V) = 1, \tag{17}$$

где

$$D(F, F) = \frac{1}{F}\int_F D(M, F)dF_M = \frac{1}{F}\int_F\int_F (1 - R(N))\Gamma(M, N)dF_N dF_M, \tag{18}$$

$$A(F, V) = \frac{1}{F}\int_F A(M, V)dF_M = \frac{4}{F}\int_F\int_V \alpha(P)Z(M, P)dV_P dF_M \tag{19}$$

— вероятности событий, заключающиеся в том, что излучение, испущенное границей, будучи экранированным средой, после многократных отражений достигнет границы, либо останется в объеме. Следовательно, $D(F, F)$, $A(F, V)$ имеют физический смысл, соответственно, пропускательной и поглощательной (излучательной) способностей среды, заполняющей замкнутую систему с непроницаемой границей, учитывающих многократное отражение излучения.

Для анализа многократных отражений, описываемых системой интегральных уравнений (11), (12), воспользуемся представлением разрешающих ядер $\Gamma(P, N)$, $[P, N] \in F$, стоящих под знаком интеграла, в форме сходящегося ряда Неймана

$$\Gamma(P, N) = Q(P, N) + \sum_{S=1}^{\infty} Q^{(S)}(P, N), \tag{20}$$

где $Q^{(S)}(P, N) = \int_F \ldots \int_F R(P_1) \ldots R(P_S)\, Q(P, P_1) \ldots Q(P_S, N)dF_{P_1} \ldots dF_{P_S}$ — s-итерация ядра, учитывающая s-отражение излучения границей системы.

Принимая во внимание постоянство свойств отражения излучения от границ, $R(P_i) = R, \quad i = \overline{1, S}$ и учитывая симметрию ядер $Q(M, N) = Q(N, M)$, можно показать, что из (11), (12) вытекают интегральные соотношения [3]:

$$\Gamma(M, N) = Q(M, N) + R\Delta^{-1}\int_F Q(M, L)Q(L, N)dF_L, \quad [M, N] \in F, \tag{21}$$

$$Z(M, P) = L(M, P) + R\Delta^{-1}\int_F Q(M, N)L(N, P)dF_N, \quad M \in F, \quad P \in V, \tag{22}$$

где $\Delta = 1 - R\int_F Q(N, L)dF_L, \quad N \in F,$ учитывает эффекты многократного переизлучения на границе.

Систему уравнений (21), (22) можно упростить, если воспользоваться свойствами инвариантности интегралов по поверхности при фиксированных точках M и N [2]:

$$\int_F Q(M, L)Q(L, N)dF_L = F^{-1}\int_F\int_F Q(M, L)Q(L, N)dF_L dF_L, \quad [M, N] \in F.$$

Принимая это во внимание и используя определения локальных характеристик $d(M, F)$, согласно (5), преобразуем систему уравнений (21), (22) к виду:

$$\Gamma(M,N) = Q(M,N) + R\Delta^{-1}F^{-1}d(M,F)d(N,F), \quad [M,N] \in F, \tag{23}$$

$$Z(M,P) = L(M,P) + R\Delta^{-1}F^{-1}d(M,F)\rho(P,F), \quad M \in F, \quad P \in V. \tag{24}$$

Здесь

$$\Delta = 1 - Rd(N, F) = 1 - Rd(F, F), \quad \rho(P,F) = \int_F L(P, N)dF_N. \tag{25}$$

Связь между значениями $d(N, F) = d(F, F)$ и $\rho(P, F)$, описывающими взаимодействия излучения на границах и в объеме, определяется с помощью уравнения замкнутости (3), которое, будучи почленно проинтегрированным по поверхности F, с учетом (25), записывается следующим образом:

$$d(F, F) = 1 - 4F^{-1}\int_V \alpha(P)\rho(P, F)dV_P. \tag{26}$$

Полагая, что в условиях термодинамического равновесия $\alpha(P) = \alpha = \mathrm{const}$, запишем (26) в виде

$$d(F, F) = 1 - \frac{4\alpha}{F}\int_V \rho(P, F)dV_P. \tag{27}$$

С помощью соотношений (23)–(25) и (27) получаем выражения для глобальных или интегральных, осредненных по поверхности, значений пропускательной $D(F, F)$ и поглощательной $A(F, V)$ способностей системы:

$$D(F, F) = \frac{1-R}{F}\int_F\int_F \Gamma(M, N)dF_N dF_M = (1-R)\frac{d(F,F)}{1-Rd(F,F)}, \tag{28}$$

$$A(F,V) = \frac{4\alpha}{F}\int_F\int_V Z(M,P)dV_P dF_M = 1-(1-R)\frac{d(F,F)}{1-Rd(F,F)} = \frac{1-d(F,F)}{1-Rd(F,F)}. \tag{29}$$

Уравнения (28), (29) удовлетворяют тривиальным образом уравнению замкнутости (17).

Решение интегрального уравнения (1), представленное разрешающим соотношением (10), оказывается пригодным для анализа излучающих систем с проницаемыми границами.

Однако при этом следует иметь в виду, что плотности потоков собственного, объемного и поверхностного излучений определяются как $\hat{\eta}_{\text{соб}} = n^2\eta_{\text{соб}} = 4\alpha n^2 E_{\text{в}}$ и $\hat{E}_{\text{соб}} = n^2 E_{\text{соб}} = n^2 A E_{\text{в}} = n^2 \varepsilon E_{\text{в}}$, где $A = 1 - R$, $\varepsilon = A$, а граница системы является проницаемой по отношению как к внешнему, так и к внутреннему, собственному, излучениям.

Исходя из физических соображений, подобная система, по отношению к внешнему излучению, обладает способностью поглощать A^* — излучение, проникающее через внешнюю поверхность границы, пропускать D^* — излучение, проникшее в систему и выходящее через ее внутреннюю поверхность, а также отражать R^* — падающее на систему излучение наружной и внутренней поверхностей ее границы.

Принимая во внимание отсутствие энергетических преобразований в процессе пересечения проницаемой осесимметричной границы системы потоком излучения, запишем условие инвариантности встречных потоков в виде тождества:

$$E_{\text{пад}}(N)n^2(1-R(N)) = E^*_{\text{пад}}(N)n_0^2(1-R_0(N)), \quad N \in F. \tag{30}$$

Здесь $E_{\text{пад}}(N)$, $E^*_{\text{пад}}(N)$ — плотности потоков излучения, падающего на элементарную площадку $N \in F$ соответственно изнутри и снаружи системы.

Заметим, что условие (30) отображает применимость интегрального уравнения (10), записанного для излучающих систем с непроницаемой границей, к рассматриваемому случаю систем с проницаемой границей.

С учетом постоянства оптических свойств и потоков запишем (30) в виде

$$E_{\text{пад}}n^2(1-R) = E^*_{\text{пад}}n_0^2(1-R_0). \tag{31}$$

В состоянии термодинамического равновесия системы и окружающей среды $E_{\text{пад}} = E^*_{\text{пад}} \equiv E_{\text{в}}$, а уравнение (31) вырождается в соотношение, известное в литературе [3] как оптический инвариант излучения

$$n^2(1-R) = n_0^2(1-R_0). \tag{32}$$

С помощью (32) определяется соотношение между коэффициентами полусферического отражения излучения на внутренней (R) и наружной (R_0) поверхностях системы в условиях $n_0 < n$. Выражение (32) получено для условий сопряжения двух бесконечных сред. При этом R_0 определяется с помощью соотношения, вытекающего из формулы Френеля в предположении, что процессы отражения оказываются несвязанными с поглощением.

В случае вогнутой проницаемой границы при определении R приходится учитывать многократные отражения от внутренней поверхности системы в среде с $n > n_0$. Однако если излучающая система относится к типу рассматриваемой, осесимметричной, то ситуация существенно упрощается. Действительно, при рассмотрении, например, сферического объема радиуса ρ_c, заполненного диатермической средой, ядро $Q(M, N)$, описывающее, согласно (2), взаимодействие двух элементарных площадок с точками $M \in F$ и $N \in F$,

$$Q(M, N) = \frac{\cos(\widehat{s, n_M})\cos(\widehat{s, n_N})}{\pi r_{MN}^2} = \frac{\cos^2\theta}{\pi(2\rho_c\cos\theta)^2} = \frac{1}{4\pi\rho_c^2} = \frac{1}{F},$$

оказывается постоянной величиною, $\dfrac{1}{F} = \text{const}$. В этом случае разрешающее ядро $\Gamma(M, F)$, определяемое согласно (11), принимает вид

$$\Gamma(M,N) = Q(M,N) + \int_F R(P)\Gamma(M,P)Q(P,N)dF_P = \frac{1}{F}\left[1 + \int_F R(P)\Gamma(M,P)dF_P\right]. \tag{33}$$

Преобразуя в (33) выражение в скобках с помощью уравнения замкнутости (13), записанного при $\alpha = 0$ в виде

$$\int_F [1-R(P)]\Gamma(M,P)dF_P = 1, \tag{34}$$

получаем

$$\Gamma(M,N) = \frac{1}{F}\left(\int_F [1-R(P)]\Gamma(M,P)dF_P + \int_F R(P)\Gamma(M,P)dF_P\right) = \frac{1}{F}\int_F \Gamma(M,P)dF_P. \tag{35}$$

В предположении равномерного распределения оптических констант на границе системы (R = const) из (34) следует

$$\int_F \Gamma(M, N) dF_N = \frac{1}{1-R},$$

а из (35) — окончательный результат:

$$\Gamma(M, N) = \frac{1}{F}\int_F \Gamma(M, N) dF_N = \frac{1}{(1-R)F}. \qquad (36)$$

Следовательно, если излучающая систем удовлетворяет условию $Q\,(M, N)$ = const (осесимметричная система), то и $\Gamma(M, N)$ = const [1, 2].

При рассмотрении фундаментальной постановки задачи плотность потока излучения, падающего на элементарную площадку с точкой $M \in F$, определяется из разрешающего уравнения (10), записанного для случая диатермической преломляющей среды (α = 0), относительно плотности потока падающего излучения:

$$\hat{E}_{\text{пад}}(M) = \frac{\hat{E}_{\text{рез}}(M) + \hat{E}_{\text{соб}}(M)}{(1-R)} = \int_F \Gamma(M, N)\hat{E}_{\text{соб}}(N) dF_N. \qquad (37)$$

С учетом (36) из (37) вытекает соотношение

$$\hat{E}_{\text{пад}}(M) = \frac{1}{(1-R)F} = \int_F \hat{E}_{\text{соб}}(N) dF_N = \frac{\hat{Q}_{\text{соб}}}{(1-R)F} = \frac{\hat{E}_{\text{соб}}}{1-R}, \qquad (38)$$

которое с учетом его смыслового значения, в случае проницаемой границы $\left(\hat{E}_{\text{соб}} = (1-R_0)n_0^2 E^*_{\text{пад}}\right)$, выражает условие инвариантности встречных потоков (31), а в случае термодинамического равновесия – условие оптической инвариантности (32).

В последующем анализе предполагается справедливость оптического инварианта (32) на границе сопряжения рассматриваемых осесимметричных систем с внешней средой. Условие инвариантности встречных потоков (31) имеет смысл равенства плотностей потоков излучения, выходящего из системы (левая часть) и входящего в систему (правая часть) через границу в произвольной точке. Плотность потока излучения, выходящего из системы после однократного отражения (R) и пропуска (d) отраженного излучения средой, с учетом (31), определяется соотношением

$$RdE_{\text{пад}} n^2 (1-R) = RdE^*_{\text{пад}} n_0^2 (1-R_0), \qquad (39)$$

где $d = d(F, F)$ — интегральное значение пропускательной способности среды, формирующей систему. Из (31) и (39) следует, что плотность потока излучения, входящего в систему, или, условно, плотность “собственного излучения” проницаемой границы, $E_{\text{соб}}(N) \equiv E_{\text{соб}}$, фигурирующего в (10) под знаком интеграла, в рассматриваемых условиях формально подразделяется на две составляющие:

$$E^*_{\text{пад}}(1-R_0)n_0^2 = \frac{E^*_{\text{пад}}(1-R_0)n_0^2}{1+Rd} + \frac{RdE^*_{\text{пад}}(1-R_0)n_0^2}{1+Rd}. \qquad (40)$$

Интегрируя (10) по поверхности, с учетом (40), получаем

$$E_{\text{рез}} = (1-R)\frac{E^*_{\text{пад}}(1-R_0)n_0^2}{1+Rd}\frac{1}{F}\int\limits_F\int\limits_F \Gamma(M,N)dF_N dF_M + (1-R)\frac{RdE^*_{\text{пад}}(1-R_0)n_0^2}{1+Rd}\times$$
$$\times\frac{1}{F}\int\limits_F\int\limits_F \Gamma(M,N)dF_N dF_M + (1-R)\frac{1}{F}\int\limits_F\int\limits_V Z(M,P)\hat{\eta}_{\text{соб}}(P)dV_P dF_M - E^*_{\text{пад}}(1-R_0)n_0^2. \tag{41}$$

Имея в виду, что $\hat{\eta}_{\text{соб}}(P) = 4n^2\alpha(P)E_{\text{в}}(P)$, а также полагая $\alpha(P) = \alpha = \text{const}$ и учитывая оптический инвариант (32), рассмотрим термодинамически равновесное состояние системы. В этом случае $E_{\text{рез}} \equiv 0$, $E_{\text{в}}(P) = E_{\text{в}}$, $E^*_{\text{пад}} = E_{\text{в}} = \text{const}$, а из (41) вытекает уравнение замкнутости:

$$(1-R_0)\frac{4\alpha}{F}\int\limits_F\int\limits_V Z(M,P)dV_P dF_M + \frac{(1-R)(1-R_0)}{1+Rd}\frac{1}{F}\int\limits_F\int\limits_F \Gamma(M,N)dF_N dF_M +$$
$$+\left[R_0 + \frac{R(1-R)(1-R_0)d}{1+Rd}\frac{1}{F}\int\limits_F\int\limits_F \Gamma(M,N)dF_N dF_M\right] = 1. \tag{42}$$

Двойные интегралы в (42) учитывают процессы многократного отражения от внутренней поверхности системы в одинаковой степени как от непроницаемой, так и от проницаемой границ. Следовательно, на основании (28) и (29) получаем:

$$\frac{1}{F}\int\limits_F\int\limits_F \Gamma(M,N)dF_N dF_M = \frac{d}{1-Rd}, \tag{43}$$

$$\frac{4\alpha}{F}\int\limits_F\int\limits_V Z(M,P)dV_P dF_M = \frac{1-d}{1-Rd}. \tag{44}$$

Принимая во внимание (43) и (44), запишем уравнение замкнутости (42) в форме балансового соотношения относительно глобальных значений поглощательной ($A^* = A^*(F, V)$), пропускательной ($D^* = D^*(F, F)$) и отражательной ($R^* = R^*(F, F)$) способностей системы в целом:

$$A^* + D^* + R^* = 1. \tag{45}$$

Здесь

$$A^* = \frac{(1-R_0)(1-d)}{1-Rd}, \tag{46}$$

$$D^* = \frac{(1-R)(1-R_0)d}{1-R^2d^2}, \tag{47}$$

$$R^* = R_0 + \frac{R(1-R)(1-R_0)d^2}{1-R^2d^2}. \tag{48}$$

Из (46)–(48), в качестве предельных, вытекают соотношения:

– при $d=1$ $A^*=0$, $D^* = \dfrac{1-R_0}{1+R}$, $R^* = R_0 + \dfrac{R(1-R_0)}{1+R} = \dfrac{R_0+R}{1+R}$;

– при $d=0$ $A^* = 1-R_0$, $D^*=0$, $R^* = R_0$. Заметим, что при определении поглощательной способности учитывается однократное пересечение границы системы проникающим излучением. Тем самым эффект многократных отражений описывается сходящимся рядом (20), в котором фигурируют члены $R^S d^S(F, F)$, $S = \overline{1,\infty}$.

При определении пропускательной и отражательной способностей учитывается двукратное пересечение границы, и в этом случае эффект многократных отражений от внутренней поверхности системы описывается сходящимся рядом (20) с членами $R^{2S} d^{2S}(F,F)$, $S = \overline{1,\infty}$. Тем самым в уравнении (42) можно полагать условие

$$\frac{1}{1+Rd}\int_F\int_F \Gamma(M,N)dF_N dF_M \equiv \int_F\int_F \overline{\Gamma}(M,N)dF_N dF_M,$$

в котором $\overline{\Gamma}(M,N)$ определяется на основании соотношения

$$\frac{1}{F}\int_F\int_F \overline{\Gamma}(M,N)dF_N dF_M = \frac{d}{1-R^2d^2}, \tag{49}$$

используемого вместо выражения (43).

С помощью оптического инварианта (32) запишем (46) – (48) в единообразной форме относительно коэффициента отражения излучения R внутренней поверхностью системы:

$$A^* = \frac{(1-R)n^2(1-d)}{1-Rd}, \tag{50}$$

$$D^* = \frac{(1-R)^2 n^2 d}{1-R^2d^2}, \tag{51}$$

$$R^* = 1-(1-R)n^2 + \frac{R(1-R)^2 n^2 d^2}{1-R^2d^2}. \tag{52}$$

При $n = 1$ соотношения (50) – (52) совпадают с формулами работы [5], полученными для плоского слоя, облучаемого по нормали с двух сторон.

Представленные результаты справедливы в той степени, в которой справедливо применение оптического инварианта (32) для R на рассматриваемых вогнутых границах сопряжения системы и окружающей среды.

Из соображений термодинамического равновесия на границе сопряжения рассматриваемых осесимметричных систем представляется возможным существование обобщенного оптического инварианта вида

$$(1-R_{эф})n^2 = (1-R^*)n_0^2, \tag{53}$$

где $R_{эф}$ — эффективное значение полусферического коэффициента отражения излучения на внутренней, вогнутой границе системы.

На основании (53) при $n_0 = 1$ и соотношения (52) для R^* получаем выражение

$$R_{эф} = R\left[1+\frac{(1-R)^2 n^2 d^2}{1-R^2d^2}\right]. \tag{54}$$

Формула (54) для определения $R_{эф}$ представляет самостоятельный интерес. Фигурирующие в ней значения R определяются с помощью инварианта (32) на основании значений R_0, определяемых формулами Френеля. Окончательные значения A^*, D^* и R^* определяются по формулам (50) – (52), в которых $R \equiv R_{эф}$.

Представленные в (46)–(52) значения A^*, D^* и R^* для систем с проницаемой границей, равно как и выражения (28), (29) для значений D, A в системах с непроницаемой границей, содержат, в качестве определяющего, параметр d. Указанный параметр, $d \equiv d(F, F)$, является функционалом геометрии и оптических свойств среды, формирующей систему. Вычисление $d(F, F)$ связано с анализом локального значения пропускательной способности $d(M, F)$, $M \in F$ в соответствии с определениями (2) и (5):

$$d(M, F) = \int_F Q(M, N) dF_N = \frac{1}{\pi} \int_F e^{-\alpha r_{MN}} \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_N. \tag{55}$$

В частном случае сферической конфигурации излучающей системы в формуле (55) следует полагать $\theta_M = \theta_N = \theta$, $r_{MN} = 2\rho_c \cos\theta$, где ρ_c — радиус сферы; при этом следует, что $Q(M, N) = \text{const}$, $d(M, F) \equiv d(F, F) = \text{const}$.

Численное значение $d(F, F)$ определяется формулой, вытекающей из выражения (55), записанного в сферических координатах:

$$d(F,F) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega=2\pi} e^{-2h_0 \cos\theta} \cos\theta d\Omega = 2\int_0^1 e^{-2h_0\mu} \mu d\mu = \frac{1}{2h_0^2}\left[1-(1+2h_0)e^{-2h_0}\right], \tag{56}$$

где $\mu = \cos\theta$, $h_0 = \alpha\rho_c$ — оптичесая толщина сферы.

Формула (56) впервые была получена в работе [6] при определении степени черноты крупных непреломляющих частиц. Если излучающий (поглощающий) объем представлен бесконечным цилиндром, то можно воспользоваться определением функции пропускания

$$d(F, F) = 1 - 4h_0 \int_1^\infty K_1(h_0 t) J_1(h_0 t) dt / t^2, \tag{57}$$

рассмотренной в работах [3, 7]. Здесь $h_0 = \alpha\rho_0$, ρ_0 — радиус цилиндра, J_n, $K_n (n = 1)$ — модифицированные функции Бесселя, соответственно первого и третьего рода.

Для осесимметричного плоского слоя значения $d(F, F)$ определяются соотношением [3]

$$d(F, F) = 2K_3(h_0), \tag{58}$$

где $K_3(h_0) = \int_0^1 e^{-h_0/\mu} \mu d\mu$ — экспоненциальный интеграл от оптической толщины $h_0 = \alpha L$ (L — толщина слоя). Таким образом в случае систем с непроницаемыми границами влияние отражения излучения границей на оптические свойства осесимметричной системы (A, D) определяется выражениями (28), (29), в которых функция пропускания d вычисляется с помощью соотношений (56)–(58).

В случае осесимметричной системы с проницаемой границей оптические свойства ($A^* = \varepsilon^*$, D^*, R^*) определяются соотношениями (45)–(54), в которых d определяется аналогично, с помощью (56)–(58). Используемые при этом значения R находятся с помощью оптического инварианта (32), в котором значения $R_0 = R_0(n/n_0)$ вычисляются по формуле Уолша–Данкла [8], а значение $R_{эф}$ — по формуле (54). Вычисленные по формуле (50) значения $A^* = A^*(h_0)$ для сферического объема согласуются со значениями $\varepsilon^* = \varepsilon^*(h_0)$, представленными в работе [9].

ВЫВОДЫ

Показана возможность анализа оптических свойств осесимметричных поглощающих (излучающих) систем с помощью интегральных уравнений излучения и вытекающих из них уравнений замкнутости. Представлены выражения для локальных и глобальных значений пропускательной и поглощательной (излучательной) способностей систем с непроницаемыми отражающими границами. Приводятся соотношения для определения локальных и глобальных значений поглощательной (излучательной), пропускательной и отражательной способностей систем с проницаемой границей.

Представленные результаты являются приближенными в силу использования для описания переноса излучения приближения геометрической оптики и, строго говоря, применимыми для анализа оптических свойств систем сравнительно больших размеров.

Принципиально важными представляются при этом оценки влияния процессов многократного отражения, вытекающие из приведенного анализа, на граничные условия радиационного теплообмена. Подобные оценки могут оказаться определяющими в системах с проницаемой границей при рассмотрении сопряженных постановок задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Суринов Ю.А.** Лучистый теплообмен при наличии поглощающей и рассеивающей среды // Изв. АН СССР ОТН. — 1952. — № 9-10. — С. 1331–1352, 1455–471.
2. **Суринов Ю.А.** О некоторых вопросах стохастической теории переноса излучения и радиационного теплообмена // Изв. высш. учебных заведений. Черная металлургия. — 1992. — № 5. — С. 76–81.
3. **Рубцов Н.А.** Теплообмен излучением в сплошных средах. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1984. — 277 с.
4. **Гершун А.А.** Фотометрический инвариант. Избранные труды по фотометрии и светотехнике. — М.: ГИФМЛ, 1958. — С. 176–178.
5. **Mc Mahon H.O.** Thermal Radiation from Partially Transparent Reflecting Bodies // J. Optical Society of America. — 1950. — Vol. 40, No. 6. — P. 376–380.
6. **Ван де Хюлст Г.** Рассеяние света малыми частицами. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. — 536 с.
7. **Weinstein M.A.** Effect Reflecting Boundaries on the Transport of Resonance Radiation // J. of Appl. Phys. — 1962. — Vol. 13, No. 2. — P. 587–596.
8. **Оцисик М.Н.** Сложный теплообмен. — М.: Мир, 1976. — 616 с.
9. **Домбровский Л.А.** Тепловое излучение сферической частицы из полупрозрачного материала // Теплофизика высоких температур. — 1999. — Т. 37, № 3. — С. 284–293.

Статья поступила в редакцию 10 октября 2007 г.