(τ_1 — сплошные линии, а τ_2 — штриховые). На рис. 3 кривые *1—4* отвечают $\eta/\mu = 2$ и $q_0 = 0{,}5$; 2; 3; 5. Кривые *1—4* рис. 4 получены при $q_0 = 2$ и $\eta/\mu = 1$; 1,5; 2; 6.

Результаты расчетов, приведенные на рисунках, показывают, что разбавленная суспензия относительно крупных деформируемых частиц (в отличие от разбавленной суспензии с относительно крупными жесткими частицами) в течении простого сдвига имеет неньютоновское поведение — наличие разностей нормальных напряжений, зависимость реологических характеристик (эффективной вязкости суспензии и разностей нормальных напряжений) от скорости сдвига. Проявление аномальных свойств разбавленной суспензии существенным образом зависит от внутренней вязкости и упругости материала частицы и вязкости дисперсионной среды.

При осуществлении предельного перехода в представленной теории к случаю суспензии твердых сфер характеристическая вязкость суспензии равна 2,5, что совпадает с известной формулой Эйнштейна для вязкости разбавленной суспензии жестких сфер.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бегоулев П. Б., Шмаков Ю. И.** Реологические уравнения состояния слабых растворов полимеров с жесткими эллипсоидальными макромолекулами // ИФЖ.— 1972.— № 23.
2. **Придатченко Ю. В., Шмаков Ю. И.** Влияние внутренней вязкости и упругости эллипсоидальных макромолекул на реологическое поведение разбавленных растворов полимеров. Реологические уравнения состояния // ПМТФ.— 1976.— № 3.
3. **Jeffery G. B.** The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid // Proc. Roy. Soc.— 1922.— V. A102, N 715.
4. **Einsenschitz R.** Der Einfluss der Brownschen Bewegung auf die Viscosität von Syspensionen // Z. Phys. Chem.— 1933.— Bd A163, N 2.
5. **Cerf R.** Recherches théoriques et expérimentales sur l'effect Maxwell des solutions de macromolécules déformables // J. de Chém. Phys.— 1951.— V. 48, N 1.
6. **Roscoe R.** On the rheology of a suspension of viscoelastic spheres in a viscous liquid // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 28, N 2.
7. **Mason S. G., Manley R. St. L.** Particle motion in sheared suspensions orientations and interactions of rigid rods // Proc. Roy. Soc.— 1956.— V. A238, N 1212.
8. **Hinch E. J., Leal L. G.** The effect of Brownian motion on the rheological properties of a suspension of non-spherical particles // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 52, N 4.
9. **Leal L. G., Hinch E. J.** The effect of weak Brownian rotations on particles in shear flow // J. Fluid Mech.— 1971.— V. 46, N 4.
10. **Покровский В. Н.** Статистическая механика разбавленных суспензий.— М.: Наука, 1978.
11. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
12. **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике.— М.: Физматгиз, 1963.

г. Киев *Поступила 27/VII 1988 г.*

УДК 532.5

Ю. А. Березин, В. П. Жуков

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СРЕДЕ СО СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В работах Моисеева, Сагдеева, Тура и др. (см. [1] и цитированную там литературу) выдвинута идея, получены соответствующие уравнения и проанализирована возможность генерации крупномасштабных структур при конвективном движении жидкости на фоне развитой спиральной турбулентности, которая однородна, изотропна, но не обладает отражательной инвариантностью. В рамках такой модели случайные возмущения усиливаются, что может привести к возникновению крупных вихрей. Эта ситуация изучена в [1] на примере подогреваемого снизу плоскопаралелльного слоя несжимаемой жидкости при схематических (упрощенных) граничных условиях, допускающих аналитическое рассмотрение. Показано, что с увеличением спиральности минимальное критическое число Рэлея уменьшается и горизонтальный размер конвективных ячеек возрастает. При достижении критической спиральности происходит полная перестройка конвективного течения и образуется вихрь, размер которого определяется горизонтальной неоднородностью задачи.

Настоящая работа посвящена подробному изучению на основе уравнений [1] линейной задачи о конвективной неустойчивости подогреваемых снизу бесконечного горизонтального слоя и диска.

Уравнения конвекции для крупномасштабных возмущений при наличии гиротропной турбулентности имеют вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu\Delta u + \beta g\theta\mathbf{e} + \beta gA\lambda\mathbf{f}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = A(\mathbf{eu}) + \chi\Delta\theta, \quad \operatorname{div}\,\mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}(\mathbf{e}\operatorname{rot}\mathbf{u}) - (\mathbf{e}\nabla)[\mathbf{eu}], \quad \mathbf{e} = (0, 0, 1).$$

Здесь ν, χ — турбулентные коэффициенты вязкости и теплопроводности. Так как значения турбулентной вязкости и теплопроводности близки друг к другу [1—3], в дальнейшем будем считать, что $\nu = \chi$. Коэффициент λ связан со спиральностью турбулентных пульсаций. Остальные обозначения стандартные [2].

Для перехода к безразмерным переменным введем масштабы [2]: длина $x_0 = H$ (высота слоя жидкости), время $t_0 = H^2/\nu$, скорость $u_0 = \nu/H$, давление $p_0 = \rho_0\nu^2/H^2$, температура $T_0 = AH$.

Тогда получим

$$\partial\mathbf{u}/\partial t = -\nabla p + \Delta\mathbf{u} + \mathrm{Ra}\,\theta\mathbf{e} + \mathrm{Ra}\,S\mathbf{f}, \quad \partial\theta/\partial t = (\mathbf{eu}) + \Delta\theta,$$
$$\operatorname{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{e}(\mathbf{e}\operatorname{rot}\mathbf{u}) - (\mathbf{e}\nabla)[\mathbf{eu}], \quad \mathbf{e} = (0, 0, 1), \tag{1}$$

где Ra — число Рэлея; S — коэффициент, связанный со спиральностью турбулентных пульсаций ($\mathrm{Ra} = \beta gAH^4/\nu^2$, $S = \lambda\nu/H^3$).

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой жидкости, заключенный между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, и случай, когда $\mathbf{u} = (u, v, w)$ и θ есть

$$u = u'(z)\sin kx\exp(\gamma t), \quad v = v'(z)\sin kx\exp(\gamma t),$$
$$w = w'(z)\cos kx\exp(\gamma t), \quad \theta = \theta'(z)\cos kx\exp(\gamma t).$$

В цилиндрическом случае вместо $\cos kx$ нужно взять функцию Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$, а вместо $\sin kx$ — функцию Бесселя первого порядка $J_1(kr)$. Результаты при этом не изменятся. Тогда уравнения (1) примут вид (штрих у u', v', w', θ' опущен)

$$(\gamma + k^2)u - \frac{d^2u}{dz^2} = kp + \mathrm{Ra}\,S\frac{dv}{dz}, \quad (\gamma + k^2)v - \frac{d^2v}{dz^2} = -\mathrm{Ra}\,S\frac{du}{dz}, \tag{2}$$

$$(\gamma + k^2)w - \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{dp}{dz} + \mathrm{Ra}\theta + \mathrm{Ra}\,Skv, \quad (\gamma + k^2)\theta - \frac{d^2\theta}{dz^2} = w, \quad \frac{dw}{dz} + ku = 0.$$

Для горизонтального слоя со свободными границами в случае обычной конвекции собственные функции пропорциональны $\sin n\pi z$ и при $z = 0{,}1$ вертикальная компонента скорости равна нулю. Такие собственные функции при конвекции со спиральной турбулентностью отвечают периодическим по z граничным условиям. Подставив в (2) собственные функции $w \sim \sin\pi z$, $u \sim \cos\pi z$ и т. д., соответствующие низшей гармонике, получим для инкремента с волновым числом k выражение [1]

$$\gamma = \left(\frac{\mathrm{Ra}^2S^2\pi^2(\pi^2 - k^2) + \mathrm{Ra}k^2}{\pi^2 + k^2}\right)^{1/2} - (\pi^2 + k^2).$$

Полагая $\gamma = 0$, найдем зависимость критического числа Рэлея Ra_0 от k:

$$\mathrm{Ra}_0 = \frac{(k^4 + 4\pi^2(\pi^2 + k^2)^3(\pi^2 - k^2)S^2)^{1/2} - k^2}{2\pi^2(\pi^2 - k^2)S^2}.$$

Анализ зависимости $\mathrm{Ra}_0(k, S)$ дан в [1].

Коэффициент спиральности можно определить как $s = \mathrm{Ra}\, S$. Такая форма записи оказывается более удобной для исследований свойств нейтральных кривых. В этом случае

$$(3)\qquad \gamma = \left(\frac{s^2\pi^2(\pi^2-k^2)+\mathrm{Ra}\,k^2}{\pi^2+k^2}\right)^{1/2} - (\pi^2+k^2),$$

$$\mathrm{Ra}_0 = \frac{(\pi^2+k^2)^3 - s^2\pi^2(\pi^2-k^2)}{k^2}.$$

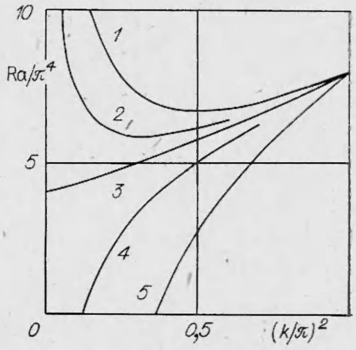

Рис. 1

Нейтральные кривые $\mathrm{Ra}_0(k,\ s)$ представлены на рис. 1. Кривые *1—5* отвечают $s = 0$; $0{,}8\pi$; π; $1{,}3\pi$; 2π. Увеличение s в интервале от 0 до π приводит к смещению минимума нейтральной кривой в область длинных волн и уменьшению минимального числа Рэлея. Если s стремится к π, то минимальное число Рэлея стремится к $4\pi^4 \approx 389$. Значения s, равное $s_* = \pi$, и Ra, равное $\mathrm{Ra}_* = 4\pi^4$, являются выделенными: при $s < s_*$ всегда имеется область устойчивых длинноволновых гармоник, при $s = s_*$ и $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_*$ такая область отсутствует, т. е. неустойчивыми становятся даже возмущения с бесконечной длиной волны. При $s > s_*$ нейтральные кривые не имеют точек минимума и волны с $k = 0$ будут неустойчивыми при любом Ra. При первоначальном определении это означает, что при $S\,\mathrm{Ra} > S_*\mathrm{Ra}_*$ ($S_* = s_*/\mathrm{Ra}_*$) возмущения с $k = 0$ становятся неустойчивыми, т. е.

$$(4)\qquad \mathrm{Ra}_0(k=0,\ S) = \mathrm{Ra}_*\, S_*/S.$$

Для других граничных условий Ra_* и S_* меняются, но характер нейтральной кривой в зависимости от k и s остается прежним. Поэтому формула (4) универсальна для любых граничных условий.

Поскольку нас интересует вопрос о развитии длинноволновых возмущений, рассмотрим условия, при которых максимум инкремента γ будет лежать в длинноволновой области ($k \ll \pi$), т. е. исследуем поведение $\gamma(\mathrm{Ra},\ s)$ при малых k. Легко показать, что при $|s - s_*| \ll s_*$ и $k^2 \ll \pi^2$ инкремент и $\mathrm{Ra}_0(k,\ s)$ имеют вид

$$(5)\qquad \gamma = \alpha(s - s_*) + \eta\frac{\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_*}{\mathrm{Ra}_*}k^2,\ \ \mathrm{Ra}_0 = \mathrm{Ra}_*\left(1 - \frac{\alpha}{\eta}\frac{s-s_*}{k^2}\right)\ (\alpha = \pi,\ \ \eta = 2).$$

При первоначальном определении спиральности для $\mathrm{Ra}_0(k,\ S)$ находим выражение

$$\mathrm{Ra}_0 = \mathrm{Ra}_*\frac{S_*}{S}\left(1 + \frac{\eta}{\alpha\mathrm{Ra}_*}\frac{S - S_*}{S_*^2}k^2\right).$$

Остановимся на случае свободных граничных условий при $z = 0{,}1$. В теории обычной конвекции свободными называются границы, на которых исчезают касательные напряжения, т. е. выполняется условие $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$. Уравнения конвекции при наличии спиральной турбулентности отличаются от уравнений Буссинеска, на основе которых строится теория обычной конвекции, поэтому условия свободных границ должны быть переформулированы. Запишем уравнение (1) в виде

$$\partial u_i/\partial t = -\partial\sigma_{ik}/\partial x_k,\ \sigma_{ik} = p\delta_{ik} - (\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i) +$$
$$+ \mathrm{Ra}\, S(e_i\varepsilon_{kmn} + e_k\varepsilon_{imn})u_m e_n.$$

Определим свободную границу как границу, на которой исчезают касательные напряжения, т. е. $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. Так как $\sigma_{xz} = \partial u/\partial z + \mathrm{Ra}\, Sv$, $\sigma_{yz} = \partial v/\partial z - \mathrm{Ra}\, Su$, то свободные граничные условия при наличии спиральности примут вид $\partial u/\partial z = -\mathrm{Ra}\, Sv$, $\partial v/\partial z = \mathrm{Ra}\, Su$.

Считаем по-прежнему, что θ на границе равна нулю. Полностью задача о нейтральных кривых в этом случае не решается, однако найти Ra_*, S_*, α, η можно. Для этого удобно использовать следующие переобозначения: $u = u'$, $v = sv'$, $w = kw'$, $\theta = k\theta'$. Введем завихренность $f = \partial u'/\partial z + k^2 w'$. Тогда система (2) перепишется (штрих у u', v', w', θ' опущен):

$$\gamma f = \partial^2 f - k^2 f + s^2(\partial^2 v + k^2 v) + \mathrm{Ra}\, k^2\theta, \tag{6}$$
$$\gamma v = \partial^2 v - k^2 v + \partial^2 w,$$
$$\gamma\theta = \partial^2\theta - k^2\theta + w,\ \partial^2 w - k^2 w = -f,\ \partial \equiv \partial/\partial z.$$

Граничные условия при $z = 0{,}1$:

$$\theta = w = f + s^2 v = \partial v + \partial w = 0. \tag{7}$$

В дальнейшем удобно взять функцию ψ: $\partial\psi = v$. Тогда с учетом (7) второе уравнение системы (6) запишем как $\gamma\psi = \partial^2\psi - k^2\psi + \partial w$. Граничными условиями будут $\theta = w = f + s^2 v = \psi = 0$.

Вычислим s_* и α. Для этого положим $k^2 = 0$. Пусть $s = s_* + \mu$, где $|\mu| \ll s_*$. В этом случае инкремент γ порядка μ. Будем искать решение системы (6) как разложение по этому малому параметру. Нулевое приближение имеет вид

$$\partial^2 f_0 + s_*^2\partial^2 v_0 = 0,\ \partial^2\psi_0 + \partial w_0 = 0,\ \partial^2 w_0 = -f_0,\ v_0 = \partial\psi_0.$$

Граничные условия в нулевом приближении: $w_0 = \psi_0 = f_0 + s_*^2 v_0$. Отсюда легко получить, что

$$v_0 = \cos s_*(z - 1/2),\ f_0 = -s_*^2 v_0, \tag{8}$$
$$w_0 = -(v_0 + 1),\ \psi_0 = s_*^{-1}\sin s_*(z - 1/2),\ s_* = 2\pi.$$

Первое приближение выглядит следующим образом:

$$\partial^2 f_1 + s_*^2\partial^2 v_1 = \gamma f_0 - 2s_*\mu\partial^2 v_0,$$
$$\partial^2\psi_1 + \partial w_1 = \gamma\psi_0,\ f_1 = -\partial^2 w_1,\ v_1 = \partial\psi_1.$$

Граничные условия при $z = 0{,}1$ имеют вид

$$w_1 = \psi_1 = f_1 + s_*^2 v_1 + 2s_*\mu v_0 = 0,$$

отсюда

$$f_1 + s_*^2 v_1 = \gamma F - 2s_*\mu v_0, \tag{9}$$
$$v_1 + w_1 = \gamma\int\psi_0 dz + C,\ f_1 = -\partial^2 w_1.$$

Здесь F — вторая первообразная от f_0, которая обращается в нуль при $z = 0{,}1$. Легко видеть, что $F = v_0 + 1$ (см. (8)). В качестве $\int\psi_0 dz$ взята для определенности функция $\left(-v_0/s_*^2\right)$, а константа интегрирования обозначена C. Тогда из (9) получим

$$\partial^2 w_1 = -s_*^2 w_1 + 2(s_*\mu - \gamma)v_0 - \gamma + s_*^2 C.$$

Условие разрешимости этого уравнения даст инкремент γ. Умножим это уравнение на w_0 и проинтегрируем от 0 до 1. Взяв интеграл в левой части по частям с учетом граничных условий и формул (8), находим выражение

$$-s_*^2\int_0^1 w_1 dz = 2\gamma - s_*\mu - s_*^2 C.$$

Так как $\int_0^1 v_1 dz = \int_0^1 \partial\psi_1 dz = 0$, то, проинтегрировав второе уравнение системы (9), получим

$$\int_0^1 w_1 dz = C.$$

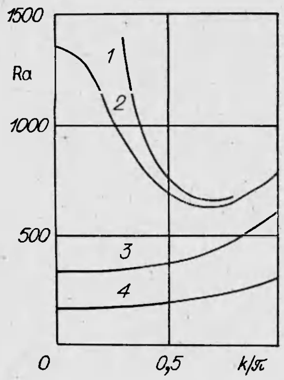

Рис. 2

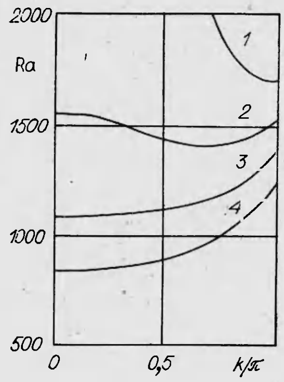

Рис. 3

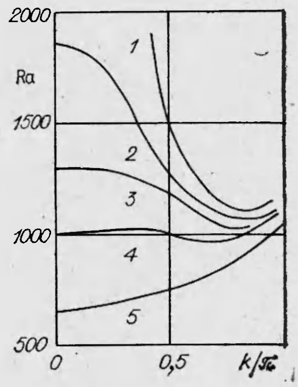

Рис. 4

Отсюда окончательно имеем $\gamma = s_*/2\mu \equiv \pi(s - s_*)$. Таким образом, $\alpha = \pi$.

Вычислим η и Ra_*. Для этого положим $s = s_*$, $v = v_0 + k^2 v_1$, $w = w_0 + k^2 w_1$, $\theta = \theta_0 + k^2\theta_1$, $\gamma = \xi k^2$ и т. д. Для v_0, w_0, f_0, ψ_0 имеем выражение (8), для θ_0 — уравнение $\partial^2\theta_0 = -w_0$ с граничными условиями $\theta_0(0) = \theta_0(1) = 0$, которое легко решается. Первое приближение по k^2:

$$\partial^2 f_1 + s_*^2\partial^2 v_1 = (1 + \xi) f_0 - s_*^2 v_0 - \mathrm{Ra}\,\theta_0,$$

$$\partial^2 v_1 + \partial^2 w_1 = (1 + \xi) v_0,\ \partial^2 w_1 + f_1 = w_0.$$

Далее поступаем так же, как при вычислении коэффициента α. Условие разрешимости этих уравнений в данном случае дает

$$\xi = \frac{5}{2}\left[\mathrm{Ra}\,\frac{s_*^4 + 20s_*^2 + 420}{600s_*^4} - 1\right].$$

Так как $\gamma = \xi k^2 = \eta\dfrac{\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_*}{\mathrm{Ra}_*}k^2$, то

$$\eta = 5/2,\ \mathrm{Ra}_* = 600s_*^4/(s_*^4 + 20s_*^2 + 420) \approx 337{,}8,\quad S_* = s_*/\mathrm{Ra}_* \approx 1{,}86\cdot 10^{-2}.$$

В общем случае нейтральные кривые получены численно. На рис. 2 кривые *1—4* отвечают $S = 0;\ 0{,}25S_*;\ S_*;\ 2S_*$. Увеличение спиральности от 0 до S_* приводит к смещению минимума нейтральной кривой в сторону длинных волн и уменьшению значения этого минимума. При $S \geqslant S_*$ минимум достигается в точке $k = 0$ и равен $\mathrm{Ra}_* S_*/S$ (см. (4)).

Рассмотрим случай, когда на обеих границах поставлены условия прилипания, т. е. все скорости обращаются в нуль: $u = v = w = 0$. Аналогичные вычисления дают $s_* = 2\pi$, $\alpha = \pi$, $\eta = 2$, $\mathrm{Ra}_* = 384\pi^4/(2\pi^2 + 15) \approx 1077{,}96$, $S_* \approx 5{,}83\cdot 10^{-3}$.

На рис. 3 изображены нейтральные кривые для этих граничных условий, найденные численно: *1—4* для $S = 0;\ 0{,}7S_*;\ S_*;\ 1{,}3S_*$.

В случае, когда на нижней границе ($z = 0$) поставлены условия прилипания, а верхняя граница ($z = 1$) свободная, имеем

$$s_* = \mathrm{tg}\, s_* \approx 4{,}4934,\quad \alpha = \frac{3s_*}{4 + C} \approx 1{,}1756,$$

$$\mathrm{Ra}_* = (8 + C)\frac{90s_*^4}{315 + 6s_*^2} \approx 1301{,}12,\quad \eta = \frac{8 + C}{4 + C} \approx 1{,}3488,$$

$$S_* = s_*/\mathrm{Ra}_* \approx 3{,}4535\cdot 10^{-3},$$

где $C = 3\left(\dfrac{s_*}{6} + A\right)A$, $A = \dfrac{1}{s_*} - \left(1 + \dfrac{1}{s_*^2}\right)\sin s_*$.

Нейтральные кривые представлены на рис. 4: *1—5* для $S = 0;\ 0{,}7S_*;\ S_*;\ 1{,}3S_*;\ 2S_*$. Отметим, что $\mathrm{Ra}_* \approx 1301$ больше минимального числа

Рэлея при $S = 0$, которое примерно равно 1100, поэтому при $S = S_*$ точка $k = 0$ является точкой локального минимума и возмущения с $k = 0$ становятся самыми неустойчивыми при больших S: $S \gtrsim 1{,}4 S_*$.

Таким образом, рассматривая все проанализированные случаи, можно сказать, что увеличение спиральности от 0 до некоторого значения S_* приводит к смещению минимума нейтральной кривой $\mathrm{Ra}_0\,(k,\ S)$ в сторону малых волновых чисел k и, следовательно, к росту горизонтального размера конвективных ячеек. При $S \geqslant S_*$ минимум достигается при $k = 0$ и горизонтальный размер ячеек ограничивается внешними условиями (например, горизонтальной неоднородностью).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В.** Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ.— 1988.— Т. 94, вып. 2.
2. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972.
3. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1965.— Ч. 1.

г. Новосибирск *Поступила 10/X 1988 г.*

УДК 532.529

В. А. Наумов

ВЛИЯНИЕ МЕЖФАЗНОГО МАССООБМЕНА НА ТУРБУЛЕНТНУЮ ЭНЕРГИЮ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ

Полуэмпирические модели турбулентности на основе уравнения переноса пульсационной энергии широко используются для расчета течений газовзвеси (см. [1—3] и библиографию в них). В настоящее время предпринимаются попытки применить указанные модели для описания течений газовзвеси с фазовыми переходами (например, в [3] с учетом гетерогенного горения дисперсных частиц). В настоящей работе анализируется непосредственное влияние межфазного массообмена на турбулентную энергию несущей среды.

1. Уравнение переноса пульсационной энергии. При наличии фазовых переходов уравнения сохранения массы и количества движения несущей фазы записываются [4] как

$$\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = J; \tag{1.1}$$

$$\rho d\mathbf{V}/dt = -\nabla p + \nabla\tau - \mathbf{F} + J(V_p - V), \tag{1.2}$$

где ρ, $\mathbf{V}$ — распределенная плотность и скорость несущей фазы; индекс p относится к дисперсной фазе; J — интенсивность межфазного массообмена; p — давление; τ — касательное напряжение; $\mathbf{F}$ — сила межфазного взаимодействия.

Из (1.1), (1.2) по известной методике (см., например, [3]) можно получить уравнение для пульсационной энергии несущей среды k, которое в пренебрежении пульсациями плотности газа ρ' имеет вид

$$\rho\mathbf{V}\nabla k = \nabla\left[\mu\nabla k - \rho\left\langle \mathbf{V}'\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{V}'^2 + p'/\rho\right)\right\rangle\right] - \tag{1.3}$$
$$- \rho\langle\mathbf{V}'\mathbf{V}'\rangle\nabla\mathbf{V} + \frac{1}{3}\mu\langle\mathbf{V}'\nabla(\mathrm{div}\ \mathbf{V}')\rangle + \langle p'\nabla\mathbf{V}'\rangle - \rho(\varepsilon + \varepsilon_p + \varepsilon_J).$$

Здесь и далее штрих означает пульсационную составляющую, остальные величины осреднены по времени; $\rho\varepsilon = \mu\sum\limits_{ij}\left\langle(\partial V_i'/\partial x_j)^2\right\rangle$ — скорость вязкой диссипации турбулентной энергии; μ — коэффициент динамической вязкости газа; $\rho\varepsilon_p = \sum\limits_i\left\langle F_i' V_i'\right\rangle$ — диссипативный член, обусловленный динамическим взаимодействием фаз в пульсационном движении.