ПМТФ, № 3, 1967

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА САМОВОСПЛАМЕНЕНИЕ РЕАГИРУЮЩЕЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СМЕСИ

А. М. Гришин

(Саратов)

Я. Б. Зельдовичем установлено [1], что в проточном реакторе возможны два режима воспламенения: зажигание и самовоспламенение.

Интересно учесть особенности режима самовоспламенения, связанные с гидромеханикой ламинарного течения жидкости и теплоотдачей через стенку трубы. В [2,3] показано, что влияние теплоты трения на теплообмен в длинных трубах носит качественный характер. Кроме этого, по Г. Шлихтингу [4], перепад температуры для таких течений, возникающий за счет теплоты трения, в некоторых случаях достигает 10—30° , что сравнимо с предвзрывным разогревом в стационарной теории теплового взрыва [5]. В связи с этим ясно, что теплота трения при определенных условиях может значительно снизить величину взрывного предела.

В данной работе на примере теплового взрыва реагирующей жидкости и длинной цилиндрической трубе изучается влияние теплоты трения на взрывной предел и рассматривается динамический режим самовоспламенения, возникающий за счет теплоты трения. В частности, установлено, что, увеличивая перепад давления, можно при прочих равных условиях получить взрыв реагирующей системы.

§ 1. Как известно [6,7], ламинарное установившееся течение в полубесконечной круглой трубе вязкой несжимаемой жидкости, вязкость которой зависит от температуры, описывается системой уравнений движения и сохранения энергии. В нашем случае в последнее уравнение необходимо добавить член, характеризующий тепло, возникающее от химической реакции, так что система уравнений имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left[r\mu(T)\frac{dw}{dr}\right] = r\frac{dp}{dz} \tag{1.1}$$

$$\lambda\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + qk_0 r\exp\frac{-E}{RT} + \frac{\mu(T)}{J}r\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = 0 \tag{1.2}$$

Здесь w — скорость потока, T — абсолютная температура, $dp\,/\,dz$ — перепад давления по трубе, r — текущий радиус трубы, λ — коэффициент теплопроводности, J — механический эквивалент теплоты, q — тепловой эффект реакции для единицы объема, R — универсальная постоянная, E — энергия активации, k_0 — предэкспонент.

Граничные условия для системы (1.1), (1.2) имеют вид

$$dT\,/\,dr|_{r=0} = 0,\quad T(r_0) = T_0,\qquad dw\,/\,dr_{\,=0} = 0,\qquad w(r_0) = 0 \tag{1.3}$$

Считаем, что вязкость зависит от температуры следующим образом [7]:

$$\mu = \mu_0\exp\,(E_1\,/\,RT)\qquad (\mu_0 = \mathrm{const},\ E_1 = \mathrm{const}) \tag{1.4}$$

Исключая из системы (1.1), (1.2) величину $w(r)$, используя аппроксимации Филонова [7] для $\mu(T)$ и Франк-Каменецкого [5] для скорости химической реакции и приводя полученное уравнение к безразмерному виду, получим

$$\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\left(y\frac{d\theta}{dy}\right) + \delta e^{\theta} + \beta\delta^2 y^2 e^{b\theta}\qquad \left(\delta = \frac{qk_0 r_0^2 E}{\lambda R T_0^2}\exp -\frac{E}{RT}\right) \tag{1.5}$$

с граничными условиями

$$d\theta/dx\,|_{x=0} = 0, \qquad \theta(1) = 0$$

$$\beta = \frac{\lambda R T_0^2}{4J\mu_0 q^2 k_0^2}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 \exp\frac{2E - E_1}{RT_0} \qquad \left(\theta = \frac{(T - T_0)\,E}{RT_0^2}\right) \tag{1.6}$$

Здесь θ — безразмерная температура, β — безразмерный параметр, характеризущий пнтенсивнось механических источников тепла, возникающих за счет диссипации кинетической энергии потока, δ — критерий Франк-Каменецкого [5], $y = r/r_0$ — безразмерная координата, $b = E_1/E$ — параметр, характеризующий, насколько интенсивно зависят механические источники тепла от температуры, обычно $b < 1$.

Краевая задача (1.5), (1.6) имеет решение не при всех значениях δ. Предельное значение $\delta = \delta_*$, при котором еще имеет место действительное решение краевой задачи (1.5), (1.6), будем называть взрывным пределом. Величина δ_* пропорциональна r_0^2, поэтому задача определения этого предела ставится так: дана температура стенки трубы, задан перепад давления по трубе; определить радиус трубы, при котором произойдет самовоспламенение реагирующей смеси.

§ 2. При помощи замены $u = \theta - \theta_0$, где $\theta_0 = \theta(0)$, краевая задача (1.5), (1.6) путем повторного интегрирования уравнения (1.5) приводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра

$$u = -8m\int_0^y \left(x^{-1}\int_0^x \xi e^{u(\xi)} d\xi\right) dx - \beta\delta^2 e^{b\theta_0}\int_0^y \left(x^{-1}\int_0^x \xi^3 e^{bu(\xi)}\, d\xi\right) dx \qquad \left(m = \frac{\delta \exp\theta_0}{8}\right) \tag{2.1}$$

Если в правую часть уравнения (2.1) подставим вместо u заведомо завышенное значение, например $u_0^+ \equiv 0$, то получим, очевидно, функцию $u_1^-(y)$, которая на интервале $0 < y \leqslant 1$ меньше u — истинного решения уравнения (2.1). Подставляя $u_1^-(y)$ в правую часть (2.1), получим $u_2^+(y) > u(y)$. Очевидно, $u_2^+(y) < 0$. Подставляя в правую часть (2.1) вместо u второе приближение u_2^+, получим $u_3^- < u$, но в то же время $u_3^- > u_1^-$, так как $u_2^+ < 0$. Подставляя в (2.1) вместо u третье приближение, получим $u_4^+ > u$, но в то же время $u_4^+ < u_2^+$, так как $u_3^- > u_1^-$, и т. д.

Таким образом, получена последовательность верхних $u_0^+ > u_2^+ > \ldots \ldots > u$ и последовательность нижних функций $u_1^- < u_3^- < \ldots < u$. Поскольку последовательность верхних функций $\{u_{2i}^+\}$ убывает и ограничена снизу истинным решением u, то она сходится к u. Последовательность нижних функций $\{u_{2i+1}^-\}$ также сходится к u, так как она возрастает и ограничена сверху истинным решением u.

Таким образом, решение уравнения (2.1) может быть найдено с любой степенью точности, причем на каждом этапе вычислений можно определить погрешность приближенного решения, для чего достаточно определить разность $u_{2i}^+ - u_{2i+1}^-$. Если эта разность мала при $0 < y \leqslant 1$, то в качестве приближенного значения u можно взять u_{2i}^+ или u_{2i+1}^-. Сходимость последовательных приближений можно показать также при помощи работы [8]. Определив $u_{i-1} \approx u$, удовлетворяем вторую из граничных условий (1.6). При этом получаем уравнение, определяющее δ_i в зависимости от θ_{0i}

$$\theta_{0i} + 8m_i\int_0^1 x \ln x e^{u_{i-1}(x)}\, dx + \beta\delta_i^2 e^{b\theta_{0i}}\int_0^1 x^3 \ln x e^{bu_{i-1}(x)}\, dx = 0 \tag{2.2}$$

Оказывается, что зависимость $\delta_i(\theta_{0i})$ — немонотонная, и при $\theta_{0i} = \theta_{0i*}$ величина δ_i имеет максимум δ_{i*}. Дифференцируя уравнение (2.2) по

θ_{0i}, получаем при условии $d\delta_i \,/\, d\theta_{0i}$ уравнение

$$1 + 8m_i \int_0^1 x \ln x \left(1 + \frac{\partial u_{i-1}}{\partial \theta_{0i}}\right) e^{u_{i-1}(x)}\, dx + \beta \delta_i^2 b e^{b\theta_{0i}} \times$$
$$\times \int_0^1 x^3 \ln x \left(1 + \frac{\partial u_{i-1}}{\partial \theta_{0i}}\right) e^{bu_{i-1}(x)}\, dx = 0 \qquad (2.3)$$

Система уравнений (2.2), (2.3) определяет величины δ_{i*} и θ_{0i*}, являющиеся приближением для максимального разогрева и взрывного предела.

На простых примерах самовоспламенения реагирующих пластины, цилиндра и шара, для которых имеется точное решение [5], убеждаемся в эффективности метода. Так, для самовоспламенения пластины $\delta_{1*} = 0.74$, $\theta_{01*} = 1$ и $\delta_{2*} = 0.90$, $\theta_{02*} = 1.22$, в то время как точные значения [5] равны $\delta_* = 0.88$, $\theta_{0*} = 1.2$.

§ 3. Рассмотрим вначале самовоспламенение реагирующей смеси при постоянной вязкости ($b = 0$). Этот случай, согласно [3,4], реализуется для некоторых жидкостей, а также для любых газов при условии, что скорость потока мала по сравнению со скоростью звука.

Для самовоспламенения реагирующей смеси в трубе в качестве нулевого приближения решения уравнения (2.1) удобно выбрать функцию

$$u_0^+ = -2 \ln (1 + my^2) \qquad (3.1)$$

которая будет решением (2.1) при $\beta = 0$. Эта функция может быть найдена при помощи работы [9]. Очевидно, $u_0^+ > u$, где u^- — решение уравнения (2.1). Подставляя u_0^+ в правую часть уравнения (2.1), получим первое приближение

$$u_1^- = {}^1/_{12}\beta\delta^2 y^4 - 2 \ln (1 + my^2) \qquad (3.2)$$

которое, очевидно, меньше u. Подставляя это выражение в правую часть (2.1), получим заведомо завышенное, по сравнению с u, второе приближение

$$u_2^+ = -\frac{\beta\delta^2 y^4}{16} - 8m \int_0^y x \ln \frac{y}{x} (1 + mx^2)^{-2} \exp \frac{-\beta\delta^2 x^4}{16}\, dx \qquad (3.3)$$

Подставляя (3.1) в систему (2.2), (2.3), получим для определения δ_{1*} и θ_{01*} систему уравнений

$$\theta_{01*} = 2 \ln 2 + 4\beta \exp (-2\theta_{01*}), \qquad \delta_{1*} = 8 \exp (-\theta_{01*}) \qquad (3.4)$$

Решения системы (3.4) для ряда значений β даны в таблице

β	0,01	0,1	1	10	100
δ_{1*}	1.99503	1.9531	1.6775	1.0303	0.4784
θ_{01*}	1.38878	1.4100	1.5622	2.0496	2.8167
δ_{2*}	1.99548	1.9578	1.7006	1.0581	0.4939
θ_{02*}	1.38884	1.4103	1.5628	2.0648	2.8752

Подставляя (3.2) в систему уравнения (2.2), (2.3), получим систему уравнений для определения δ_{2*} и θ_{02*}. Эта система решена при помощи метода Ньютона [10], причем в качестве первого приближения выбирались соответствующие значения δ_{1*} и θ_{01*}, а определенные интегралы, входящие в систему уравнений для определения δ_{2*}, θ_{02*}, вычислялись методом Симпсона для двадцати ординат [10] при помощи таблиц [11]. Результаты вычислений приведены в таблице.

Из приведенных выше данных видно, что разность между первым и вторым приближениями, оставаясь достаточно малой, увеличивается с ростом β, что вполне закономерно, так как нулевое приближение будет точным при $\beta = 0$. Если считать, по аналогии с примером, приведенным в § 2, что первое приближение величин δ_* и θ_{0*} даст заниженное значение этих величин, а второе приближение δ_{2*} и θ_{02*} — завышенное значение δ_* и θ_{0*}, то небольшая величина разностей $\delta_{2*} - \delta_{1*}$, $\theta_{02*} - \theta_{01*}$ указывает, что второе приближение величин δ_* и θ_{0*} можно практически считать точным значением этих величин. Для того чтобы выяснить, являются ли δ_{1*}, θ_{01*} и δ_{2*}, θ_{02*} соответственно нижней и верхней гранями величин δ_* и θ_{0*}, были вычислены δ_{3*}, θ_{03*} для $\beta = 100$. Для этого выражение (3.3) подставлялось вместо u в систему уравнения (2.2), (2.3). Полученная при этом система уравнений определяет δ_3 и θ_{03*}. Эта система решалась методом Ньютона, а в качестве нулевого приближения выбирались величины δ_{2*} и θ_{02*} для $\beta = 100$. Определенные интегралы, входящие в систему уравнений для определения величин δ_{3*} и θ_{03*}, вычислялись методом Симпсона для двадцати ординат, а интегралы с переменным верхним пределом определялись методом П. В. Меленгьева [10] для четырех ординат при шаге $h = 0.05$. В результате вычислений найдены $\delta_{3*} = 0.4920$, $\theta_{03*} = 2.8654$. Эти значения укладываются между значениями δ_{1*}, θ_{01*} и δ_{2*}, θ_{02*} и лежат ближе к последним, что и следовало ожидать.

§ 4. Рассмотрим самовоспламенение реагирующей смеси при $b = 1/2$. Выбирая, как и ранее, в качестве нулевого приближения (3.1), имеем аналогично систему уравнений

$$\theta_{01} - 2\ln(1+m_1) - 2\beta\delta_1 e^{-1/2\,\theta_{01}} + 32\,\beta e^{-3/2\,\theta_{01}} \int_0^1 \frac{\ln(1+m_1x^2)\,dx}{x} = 0 \tag{4.1}$$

$$1 - \frac{2m_1}{1+m_1} + \beta\delta_1 e^{-1/2\,\theta_{01}} - 48\beta e^{-3/2\,\theta_{01}} \int_0^1 \frac{\ln(1+m_1x^2)\,dx}{x} + 16\beta e^{-3/2\,\theta_{01}} \ln(1+m_1) = 0 \tag{4.2}$$

определяющую величины δ_{1*} и θ_{01*}. Система уравнений (4.1), (4.2) решалась методом Ньютона [10]. Определенный интеграл в системе (4.1), (4.2) вычислялся при $m_1 = 1$ при помощи таблиц [12], а при $m_1 = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+m_1x^2)\,dx}{x} = \frac{\pi^2}{24} - 0.346573\,\varepsilon - 0.048287\,\varepsilon^2 - 0.003797\,\varepsilon^3 - \cdots \tag{4.3}$$

В результате вычислений при $\beta = 0{,}001$, 0.01, 0.1, 1 находим $\delta_{1*} = 1.999290$, 1.9929, 1.93, 1.62, а $\theta_{01*} = 1.386487$, 1.3881, 1.40, 1.44.

Вычисление второго приближения сопряжено с большим объемом вычислительной работы, поэтому проверку точности величин δ_{1*} и θ_{01*} для малых β проведем при помощи метода малого параметра. Решение уравнения (2.1) для малых β представим в следующем виде:

$$u = -2\ln(1+my^2) + \beta u_1 + \beta^2 u_2 + \ldots \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (2.1) и отбрасывая малые второго порядка и выше, получим уравнение для u_1, решая которое, найдем

$$u_1 = \delta^2 e^{1/2\,\theta_0}\left[\frac{y^2(9-my^2)}{4m(1+my^2)} - \frac{3\ln(1+my^2)}{2m^2} - \frac{3(1-my^2)}{2m^2(1+my^2)}\int_0^y \frac{\ln(1+my^2)\,dy}{y}\right] \tag{4.5}$$

Удовлетворяя (4.4) с учетом (4.5) второму из условий (1.6), получим уравнение, определяющее δ в зависимости от θ_0

$$\theta_0 - 2\ln(1+m) + \beta\delta^2 e^{1/2\,\theta_0}\left[\frac{9-m}{4m(1+m)^2} - \frac{3\ln(1+m)}{2m^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{3(1-m)}{2m^2(1+m)}\int_0^1 \frac{\ln(1+mx^2)\,dx}{x}\right] = 0 \tag{4.6}$$

Дифференцируя (4.5) по θ_0 с учетом $d\delta/d\,\theta_0 = 0$, имеем

$$1 - \frac{2m}{1+m} + \frac{\beta\delta^2}{2} e^{1/2\,\theta_0}\left[\frac{m^2-40m-21}{4m(1+m)^2} + \frac{3(1+2m)\ln(1+m)}{m^2(1+m)} + \right.$$
$$\left. + \frac{3(3-3m^2+4m)}{2m^2(1+m)^2}\int_0^1 \frac{\ln(1+mx^2)\,dx}{x}\right] = 0 \tag{4.7}$$

Уравнения (4.6), (4.7) определяют δ_* и θ_{0*} с точностью до членов, содержащих β^2, так что при малых β величины δ_* и θ_{0*}, определяемые системой уравнений (4.6), (4.7), должны быть близки к точным. Система уравнений (4.6), (4.7) решалась методом Ньютона [10]. Для $\beta = 0.001$, 0.01, 0.1 было получено соответственно $\delta_* = 1.995365$, 1. 9937, 1.94, $\theta_{0*} = 1.386500, 1.3883, 1.40$. Сравнивая эти данные с данными, полученными ранее методом последовательных приближений, видим, что δ_{1*} и θ_{01*} аппроксимируют величины δ_* и θ_{0*} снизу, и погрешность их невелика.

Из данных таблицы и последнего расчета следует, что предвзрывной разогрев θ_{0*} увеличивается с ростом β, а взрывной предел, наоборот, уменьшается. Физически это объясняется тем, что теплота трения вызывает местное повышение температуры вблизи стенки трубы, которое тем больше, чем больше β, в результате чего отток тепла из центральной части трубы уменьшается тем сильнее, чем больше β.

Сравнивая данные таблицы и данные последнего расчета, видим, что величины δ_* и θ_{0*} для $b \neq 0$ ниже, чем соответствующие величины δ_* и θ_{0*} для $b = 0$. Снижение величины δ_* при $b \neq 0$, по сравнению со случаем $b = 0$, объясняется тем, что количество тепла от механических источников тепла при $b \neq 0$ больше, чем при $b = 0$, а уменьшение величины θ_{0*} при $b \neq 0$ объясняется тем, что температура от механических источников тепла при $b \neq 0$ повышается более равномерно, чем при $b=0$, в результате чего отток тепла из центральной части трубы увеличивается. Максимум температуры в обоих случаях, в силу условий симметрии, достигается при $y = 0$.

§ 5. Оценим влияние теплоты трения на самовоспламнение реагирующей жидкости при теплоотдаче по закону Ньютона через стенку трубы. С этой целью рассмотрим тепловой взрыв реагирующей жидкости, покоящейся в бесконечной цилиндрической трубе и затем внезапно приведенной в движение. Эта задача — пример динамического самовоспламенения, отличный от примеров, рассмотренных в [13,14]. Математически задача сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} \tag{5.1}$$

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + qk_0\exp\frac{-E}{RT} + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \tag{5.2}$$

с граничными и начальными условиями

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad w(t, r_0) = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad T(t, r_0) = T_0,$$
$$T(0, r) = T_0, \qquad w(0, r) = 0 \tag{5.3}$$

Здесь t — время, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость.

Для простоты считаем, что вязкость и теплофизические коэффициенты постоянны.

Точное решение уравнения (5.1) с условиями (5.3) в виде ряда по бесселевым функциям получено Громеко [6]. Для простоты дальнейшего анализа находим при помощи метода интегральных соотношений [15] простое приближенное решение уравнения (5.1) с условиями (5.3)

$$w = -\frac{r_0^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(1 - \exp\left(-\frac{8\nu t}{r_0^2}\right)\right)\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \tag{5.4}$$

При выводе (5.4) профиль $w = w_0(t)(1 - r^2/r_0^2)$ подставляется в уравнение (5.1), результат подстановки интегрируется по r от 0 до r_0, и решается получаемое для $w_0(t)$ дифференциальное уравнение первого порядка с нулевым условием. Сравнение (5.4) с точным решением показало, что погрешность выражения (5.4) не превышает 12%.

Подставляя (5.4) в (5.2) и приводя результат подстановки к безразмерному виду, имеем уравнение

$$y\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + \delta y e^{\theta} + \beta\delta^2 y^3(1 - e^{-8P\tau})^2 \quad \left(\tau = \frac{\lambda t}{\rho c_p r_0^2}\right) \tag{5.5}$$

с граничными и начальными условиями

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} + B\theta\right)\Big|_{y=1} = 0, \quad \theta(0, y) = 0 \tag{5.6}$$

$$\left(B = \frac{\alpha r_0}{\lambda}, \quad P = \frac{\nu\rho c_p}{\lambda}\right)$$

Здесь P — число Прандтля, α — коэффициент теплоотдачи.

Применим для решения краевой задачи (5.5), (5.6) метод интегральных отношений [14,15]. Допустим, что профиль температуры имеет вид [14]

$$f = g(\tau) - 2\ln(1 + ay^2) \qquad (g = 2\ln(1 + a) + 4a / B(1 + a)) \tag{5.7}$$

Подставляя (5.7) в уравнение (5.5) и интегрируя результат подстановки по y от 0 до 1, получим для определения a (τ) задачу Коши

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{Ba^2(1 + a)\{\delta(1 + a)[2e^{4a/B(1+a)} + \beta\delta(1 - e^{-8P\tau})^2] - 16a\}}{4\{a^2[2 + B(1 + a)] - B(1 + a)^2[a - \ln(1 + a)]\}} \tag{5.8}$$

$$a(0) = 0$$

Если $a(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \tau_0 < \infty$, т. е. если решение задачи Коши (5.8) имеет конечное время определения [16], то имеет место взрыв реагирующей системы, а величина τ_0 в этом случае — период индукции. Считая τ функцией, а a — независимой переменной, легко найдем, что взрыв будет иметь место, если при $a \to \infty$ имеем $\tau(a) \to \tau_0 < \infty$, т. е. в этом случае задача о тепловом взрыве сводится к устойчивости по Лагранжу [16] для $\tau = \tau(a)$.

Покажем, что при любом β существует взрывной предел $\delta = \delta_*$. Функция $a^+(\tau)$, определяемая уравнением

$$\frac{da^+}{d\tau} = \frac{Ba^{+2}(1 + a^+)\{\delta(1 + a^+)\{\beta\delta + 2\exp[4a^+ / B(1 + a^+)]\} - 16a^+\}}{4\{a^{+2}[2 + B(1 + a^+)] - B(1 + a^+)^2[a^+ - \ln(1 + a^+)]\}} \tag{5.9}$$

с начальным условием (5,8), мажорирует $a = a(\tau)$. Решение задачи Коши (5.8), (5.9) при $\delta \leqslant \delta_*^-$ и $\tau \to \infty$ принимает конечные стационарные значения, а при $\delta > \delta_*^-$ имеет место неуклонный рост величины a^+ с ростом τ, так что $\lim a^+(\tau) = \infty$ при $\tau \to \tau_0$.

Легко видеть, что предельное значение $\delta = \delta_*^-$, при котором достигается стационарное значение величины a^+, и соответствующее значение a_* определяются системой уравнений

$$\frac{B}{4 + B(1 + a)}\left[1 + \frac{4\beta B}{(1 + a)^2[4 + B(1 + a)]}\exp\frac{-8a}{B(1 + a)}\right] = \frac{a}{1 + a}$$

$$\delta = \frac{8B}{(1 + a)[4 + B(1 + a)]}\exp\frac{-4a}{B(1 + a)} \tag{5.10}$$

При $B \to \infty$ система (5.10) сводится к одному уравнению

$$\delta = 2(1 - {}^1/_{16}\,\beta\delta^2)^2 \tag{5.11}$$

решение которого

$$\delta_*^- = 2\{1 - {}^1/_4\beta\,[1 - {}^1/_4\beta\,(1 - {}^1/_4\beta)^4]^2\} \tag{5.12}$$

найденное нами методом итераций [10], удовлетворительно совпадает с данными таблицы при $0 < \beta \leqslant 1$. При $\beta \gg 1$ имеем $a_* \gg 1$ и $\delta_*^- \approx 4 / \sqrt{\beta}$.

Для малых значений B методом малого параметра [10] было найдено

$$\delta_*^- = \frac{2B}{e}\left[1 - \frac{3B}{4}\left(1 + \frac{4\beta}{3e^2}\right)\right] \tag{5.13}$$

Поскольку $a < a^+$, то ясно, что при $\delta \leqslant \delta_*^-$ и $\tau \to \infty$ величина $a \to \mathrm{const} < \infty$. В то же время в отсутствие теплоты трения ($\beta = 0$) стационарное распределение температуры имеет место при $\delta \leqslant \delta_*$, где

$$\delta_*^+ = \frac{8a_*}{(1+a_*)^2}\exp\frac{-4a_*}{B(1+a_*)}\left(a_* = 2\frac{1}{B}\left(\sqrt{1+\frac{B^2}{4}} - 1\right)\right) \tag{5.14}$$

Выражение (5. 14) легко получается из системы (5.10) и совпадает с соответствующим точным значением взрывного предела [17].

Таким образом, в рассматриваемом случае при $\beta \neq 0$ взрывной предел всегда существует и заключен в пределах $\delta_*^- \leqslant \delta_* \leqslant \delta_*^+$.

Интересно отметить, что если осуществлять динамический режим самовоспламенения повышением внешней температуры, считая [14], что при $\tau \to \tau_1 < \tau_0$ она плавно возрастает от 0 до θ_{01}, то, в отличие от рассмотренного случая, при $\theta_{01} > 2\ln 2$ имеет место неустойчивое распределение температуры и взрыв реагента наступает при малейшем возмущении при любом значении $\delta > 0$.

Поступила 4 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Зысин Ю. А. К теории теплонапряженности. Протекание экзотермической реакции в струе. Ж. техн. физ., 1941, № 6.
2. Каганов С. А. Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. ПМТФ, 1962, № 3.
3. Кудряшев Л. И., Головин В. М. Влияние диссипации механической энергии на теплообмен при ламинарном течении жидкости в круглой цилиндрической трубе. Сб. «Тепло- и массоперенос», т. 5, Изд. АН БССР, 1963.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
5. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике, Изд-во АН СССР, 1947.
6. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.
7. Асланов С. К. Течение жидкости переменной вязкости в круглом трубопроводе. Изв. высш. учебн. завед. Нефть и газ, 1961, № 12.
8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. Изд. иностр. лит., 1960.
9. Франк-Каменецкий Д. А. Аналитическое решение о тепловом взрыве в цилиндрическом сосуде. Ж. физ. химии, 1958, № 5.
10. Мелентьев П. В. Приближенные вычисления. Физматгиз, 1962.
11. Вега Г. Таблицы семизначных логарифмов. Геодезиздат, 1954.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
13. Мержанов А. Г. К квазистационарной теории теплового взрыва. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 3.
14. Гришин А. М. Применение метода интегральных соотношений для решения задач теории воспламенения. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 5.
15. Белоцерковский О. М., Чушкин П. И. Численный метод интегральных соотношений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, № 5.
16. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Изд. «Мир», 1964.
17. Барзыкин В.В., Мержанов А. Г. Краевая задача в теории теплового взрыва, Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 5.