

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В СВОБОДНЫХ СТРУЯХ

В. М. Стрельчена

(Ленинград)

Использование свободных струй за звуковыми соплами по сравнению с другими методами реализации экспериментов по физической кинетике имеет ряд важных преимуществ [1]: возможность создания простейшего одномерного радиального стационарного течения; автомодельность структуры струи и распределения параметров в ней; возможность регулирования скорости релаксационных процессов.

Эти обстоятельства значительно облегчают теоретический анализ получаемых результатов. Проведенные в последнее время измерения неравновесных функций распределения молекул по скоростям [2, 3], по вращательным [4, 5] и колебательным [6—8] уровням используются для нахождения параметров упругого и анизотропного потенциалов взаимодействия [3], а также констант скоростей энергообмена между внутренними степенями свободы [9, 10]. Для этого решаются кинетические уравнения, описывающие соответствующие релаксационные процессы, с некоторым модельным выражением для потенциала взаимодействия или константы скорости. Параметры модели определяются из сравнения экспериментальных данных с полученным решением системы уравнений; задача при этом радикально упрощается, если последнее может быть найдено в аналитической форме. Возможность получения аналитических решений систем релаксационных уравнений может также значительно облегчить изучение эффектов взаимного влияния релаксационных процессов в струях (например, влияние процессов конденсации на вращательную [11] и колебательную [8] релаксацию).

В этой связи в данной работе развивается аналитический метод [12, 13] решения системы релаксационных уравнений балансного типа, описывающей при соответствующем выборе скоростных коэффициентов процессы вращательной и колебательной релаксации, а также неравновесной конденсации (в рамках квазихимической модели). После перехода от заселенностей к более плавным функциям и нелинейной замены переменных эта система приводится к виду, значительно облегчающему ее исследование (включая численное решение). Показано, что в изэнтропических течениях на оси струи можно выделить ряд зон, которые характеризуются различными механизмами релаксации. Описывается итерационная схема решения системы релаксационных уравнений с оптимальным выбором нулевого приближения в каждой из упомянутых зон.

**1. Постановка задачи.** В свободно расширяющейся струе вращательная (колебательная) релаксация малой примеси двухатомного газа в одноатомном описывается системой релаксационных уравнений

$$(1.1) \quad \frac{u}{d} \frac{dN_j}{dx} = n \sum_{\delta} [K_{j+\delta, j} N_{j+\delta} - (K_{j, j+\delta} + K_{j, j-\delta}) N_j + K_{j-\delta, j} N_{j-\delta}].$$

Здесь  $N_j = n_j/n$ ;  $n \equiv \sum_j n_j$  — числовая плотность молекулярного газа;  $n_j$  — заселенность  $j$ -го энергетического уровня;  $u$  — гидродинамическая скорость потока;  $x$  — нормированная на диаметр сопла  $d$  координата вдоль оси струи;  $K_{i, j}(T)$  — константа скорости энергообмена между внутренней степенью свободы релаксирующего газа и поступательными степенями свободы одноатомного газа, имеющего температуру  $T$ .

Распределение газодинамических параметров вдоль оси струи будем описывать изэнтропическими формулами

$$(1.2) \quad \frac{T(x)}{T_0} = \frac{1}{F(x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \quad \frac{u(x)}{a_0} = \frac{M(x)}{\sqrt{F(x)}}, \quad \frac{n(x)}{n_0} = [F(x)]^{-1/(\gamma-1)}, \quad \gamma = c_p/c_v,$$

где

$$(1.3) \quad F(x) = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(x);$$

$T_0$ ,  $a_0$ ,  $n_0$  — температура, скорость звука и плотность в адиабатически и изэнтропически заторможенном газе. Для числа Маха  $M(x)$  используем

эмпирическую формулу [14]

$$(1.4) \quad M(x) = \begin{cases} A(x-x_0)^{\gamma-1} - \frac{1}{2A} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{(x-x_0)^{\gamma-1}} + \frac{C}{(x-x_0)^{3(\gamma-1)}}, & x \geq x_0 \\ M(x_*) \exp \left\{ \frac{dM(x_*)}{dx} \frac{x-x_*}{M(x_*)} \right\}, & x < x_* \end{cases}$$

Параметр  $x_*$  выбирается из условия  $M(0) = 1$ . Экспоненциальная аппроксимация в (1.4) обеспечивает гладкую сшивку обеих кривых в точке  $x = x_*$ .

На срезе сопла задается больцмановское распределение с  $T = T_* = T_0 / \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)$

$$(1.5) \quad N_j^0 \equiv N_j(0) = \frac{g_j}{Q(T_*)} \exp \left( - \frac{E_j}{kT_*} \right) = N_j^B(T_*).$$

Здесь  $g_j$  — кратность вырождения уровня  $j$ ;  $Q(T_*)$  — статистическая сумма;  $E_j$  — энергия  $j$ -го уровня.

2. Анализ системы релаксационных уравнений. Введем вместо концентраций  $N_j(x)$  более плавные функции  $z_j(x)$ , характеризующие отклонение функции распределения от равновесной:

$$(2.1) \quad z_j(x) = N_j(x) / N_j^B(T(x)).$$

Из (1.1) для  $z_j$  следует

$$(2.2) \quad \frac{dz_j}{dx} = \frac{nd}{u} \sum_{\delta} \left[ K_{j+\delta,j} \frac{N_{j+\delta}^B}{N_j^B} z_{j+\delta} - (K_{j,j+\delta} + K_{j,j-\delta}) z_j + K_{j-\delta,j} \frac{N_{j-\delta}^B}{N_j^B} z_{j-\delta} \right] - \frac{z_j}{N_j^B} \frac{dN_j^B}{dx} \equiv K(z).$$

Представим  $z_{j+\delta}$  в виде

$$(2.3) \quad z_{j+\delta}(x) = z_j(x) \prod_{i=0}^{\delta-1} a_{j+i}(x) f_{j+i}(x), \quad a_m \equiv \frac{K_{m,m+1}}{K_{m+1,m}} \frac{N_m^B}{N_{m+1}^B}.$$

После подстановки (2.3) в (2.2) и ряда преобразований, аналогичных [13], для новых неизвестных функций  $f_j(x)$  получаем систему уравнений

$$(2.4) \quad \frac{1}{f_j} \frac{df_j}{dx} = R_j(f_j, x) + \varepsilon_j(f, x) + \Gamma_j(x),$$

где

$$(2.5) \quad \begin{aligned} R_j &= \frac{nd}{u} \sum_{\delta} [\alpha_j^{(\delta)} f_j^{\delta} + \beta_j^{(\delta)} + \gamma_j^{(\delta)} f_j^{-\delta}], \quad \varepsilon_j = \frac{nd}{u} \sum_{\delta} \varepsilon_j^{(\delta)}, \\ \Gamma_j &= \frac{d}{dx} \ln \frac{K_{j+1,j}}{K_{j,j+1}}, \quad \alpha_j^{(\delta)} = \Pi_{j+1,\delta}^+ - \Pi_{j,\delta}^+, \quad \gamma_j^{(\delta)} = \Pi_{j+1,\delta}^- - \Pi_{j,\delta}^-, \\ \beta_j^{(\delta)} &= (K_{j,j+\delta} - K_{j+1,j+\delta+1}) + (K_{j,j-\delta} - K_{j+1,j-\delta+1}); \\ \varepsilon_j^{(\delta)} &= f_j^{\delta} \left[ \left(1 - \prod_{i=0}^{\delta-1} \frac{f_{j+i}}{f_j}\right) \Pi_{j,\delta}^+ - \left(1 - \prod_{i=0}^{\delta-1} \frac{f_{j+i+1}}{f_j}\right) \Pi_{j+1,\delta}^+ \right] + \\ &+ f_j^{-\delta} \left[ \left(1 - \prod_{i=0}^{\delta-1} \frac{f_j}{f_{j+i-\delta}}\right) \Pi_{j,\delta}^- - \left(1 - \prod_{i=0}^{\delta-1} \frac{f_j}{f_{j+i-\delta+1}}\right) \Pi_{j+1,\delta}^- \right]. \end{aligned}$$

В (2.5) введены обозначения:

$$\Pi_{j,\delta}^+ = K_{j+\delta,j} \frac{N_{j+\delta}^B}{N_j^B} \prod_{i=0}^{\delta-1} a_{j+i}, \quad \Pi_{j,\delta}^- = K_{j-\delta,j} \frac{N_{j-\delta}^B}{N_j^B} \prod_{i=0}^{\delta-1} a_{j+i-\delta}^{-1}.$$

При выполнении принципа детального баланса  $a_j = 1$  для всех. Тогда  $\Pi_{j,\delta}^{\pm} = K_{j,j+\delta}$ ,

$$(2.6) \quad \Gamma_j = \frac{d}{dx} \ln \frac{N_j^B(T(x))}{N_{j+1}^B(T(x))} = - \frac{E_{j+1} - E_j}{kT} \frac{d}{dx} \ln T(x) > 0,$$

а коэффициенты в  $R_j$  удовлетворяют условию

$$(2.7) \quad \alpha_j^{(\delta)} + \beta_j^{(\delta)} + \gamma_j^{(\delta)} = 0.$$

Для слабо зависящих от  $j$  функций  $f_j(x)$  из (2.5) получаем

$$(2.8) \quad |\varepsilon_j(\mathbf{f}, x)| \ll 1.$$

В случае бoльцмановского распределения, согласно (2.3),

$$(2.9) \quad f_j^B = 1,$$

следовательно,

$$(2.10) \quad \varepsilon_j(\mathbf{f}^B) \equiv 0, \quad R_j(\mathbf{f}^B) \equiv 0.$$

При малых отклонениях от равновесия ( $f_j = 1 + \lambda \varphi_j$ ,  $\lambda \ll 1$ ,  $\varphi_j - \varphi_i = O(\lambda)$ ) из (2.7), (2.10) имеем

$$(2.11) \quad R_j = O(\lambda), \quad \varepsilon_j = o(\lambda).$$

Для изэнтропических течений газовых смесей, описываемых формулами (1.2)–(1.4) с  $\gamma > 3/2$  (малая добавка двухатомного газа в одноатомном), из (2.6) вытекает  $\Gamma_j(x) > 0$ , т. е.  $\Gamma_j(x)$  монотонно возрастает от начального значения

$$\Gamma_j(0) = \frac{E_{j+1} - E_j}{kT_0} (\gamma - 1) \frac{dM(x_*)}{dx} \exp \left\{ - \frac{x_*}{M(x_*)} \frac{dM(x_*)}{dx} \right\}$$

и ведет себя при больших  $x$  следующим образом:

$$(2.12) \quad \Gamma_j(x) \underset{x \gg x_*}{\sim} \frac{E_{j+1} - E_j}{kT_0} A^2 (\gamma - 1)^2 (x - x_0)^{2\gamma - 3}.$$

В то же время сомножитель  $n(x)d/u(x)$  в  $\bar{R}_j(x)$  в уравнении (2.4) монотонно убывает и при  $x \gg x_*$

$$(2.13) \quad \frac{n(x)d}{u(x)} \underset{x \gg x_*}{\sim} \frac{n_0 d}{a_0} \frac{2}{(\gamma - 1) A^3 (x - x_0)^{(\gamma - 1)}}.$$

Поскольку при низких температурах константы скорости дезактивации в  $R_j(f_j, x)$  становятся медленными функциями от  $T$  [15], при больших  $x$  основной вклад в правую часть (2.4) дает слагаемое  $\Gamma_j(x)$ .

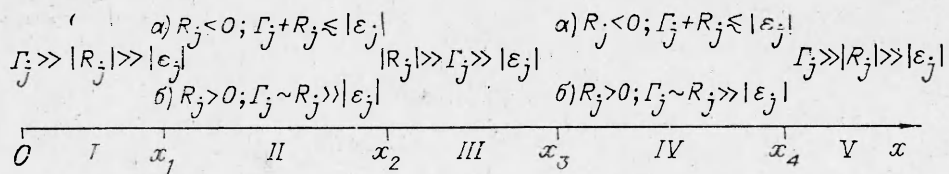
Проведенные оценки позволяют сделать следующие выводы.

1. Если на срезе сопла задано бoльцмановское распределение (1.5), то в силу (2.9), (2.10) отход от равновесия по внутренним степеням свободы на начальном участке струи определяется слагаемым  $\Gamma_j(x)$  в (2.4), т. е., согласно (2.6), газодинамическими характеристиками течения и спектром молекул, а не свойствами межмолекулярного взаимодействия.

2. Пусть в некотором промежутке  $R_j(x) < 0$ . Тогда на нем может осуществляться такой режим, при котором слагаемые  $\Gamma_j(x)$  и  $R_j(x)$  компенсируют друг друга ( $\Gamma_j + R_j = o(\lambda)$ ) и в правой части (2.4), несмотря на (2.8), (2.11), необходимо учитывать все члены. При этом получаем «квазистационарное» распределение, определяемое условием

$$(2.14) \quad R_j(f_j, x) + \Gamma_j(x) + \varepsilon_j(\mathbf{f}, x) = 0.$$

3. Во всех остальных случаях недиагональное по  $\mathbf{f}$  слагаемое в (2.4)  $\varepsilon_j$  может давать заметный вклад в скорость изменения  $f_j(x)$  только для распределений с сильной зависимостью  $f_j$  от  $j$ , т. е. только в случае значительных отклонений от равновесия. Для плавных по  $j$  распределений это слагаемое может быть учтено в рамках теории возмущений.



Р и с. 4

4. При  $x \gg x_*$ , согласно (2.12), (2.13), скорость изменения  $f_j$  определяется, как и на начальном участке струи, слагаемым  $\Gamma_j(x)$ .

Таким образом, на оси струи можно выделить пять зон, характеризующихся различными режимами релаксации (рис. 1).

3. **Решение системы релаксационных уравнений.** Решение системы (2.4) будем искать методом итераций. Поскольку, однако, на различных участках оси струи соотношение между вкладом от различных слагаемых в правую часть (2.4) существенно различно (рис. 1), необходимо рассмотреть вопрос об оптимальном выборе нулевого приближения в каждом из режимов релаксации.

На отрезке  $[0, x_1]$  в качестве нулевого приближения возьмем решение задачи Коши

$$(3.1) \quad \frac{1}{f_{j,0}^{(1)}} \frac{df_{j,0}^{(1)}}{dx} = \Gamma_j(x), \quad f_{j,0}^{(1)}(0) = 1.$$

С учетом (2.1), (2.3), (2.6) из (3.1) находим

$$(3.2) \quad f_{j,0}^{(1)}(x) = \frac{N_j^B(T(x))/N_j^B(T_*)}{N_{j+1}^B(T(x))/N_{j+1}^B(T_*)}$$

или

$$(3.3) \quad \frac{N_{j+1,0}^{(1)}(x)}{N_{j,0}^{(1)}(x)} = \frac{N_{j+1}^0}{N_j^0} \equiv \frac{N_{j+1}^B(T_*)}{N_j^B(T_*)}.$$

Решение (3.3) описывает такой процесс изменения заселенностей, при котором верхние уровни оказываются перезаселенными, а нижние — недо-заселенными (рис. 2), что согласуется с экспериментальными данными [4, 5] по вращательной релаксации молекул азота в свободных струях (линии 1, 2 —  $N_j^B(T(x))$ ,  $N_j(x)$  при  $x > 0$ , 3 —  $N_j^B(T_*)$  при  $x = 0$ ).

Для последующих приближений из (2.4) получаем

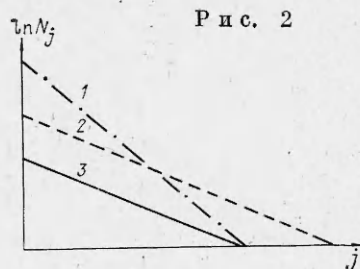
$$(3.4) \quad \frac{1}{f_{j,h+1}^{(1)}} \frac{df_{j,h+1}^{(1)}}{dx} = R_j(f_{j,h}^{(1)}, x) + \varepsilon_j(f_h^{(1)}, x) + \Gamma_j(x),$$

откуда с учетом (3.1) следует

$$(3.5) \quad f_{j,h+1}^{(1)}(x) = f_{j,0}^{(1)}(x) \exp \left\{ \int_0^x [R_j(f_{j,h}^{(1)}, \xi) + \varepsilon_j(f_h^{(1)}, \xi)] d\xi \right\}.$$

Поскольку все функции, входящие в (2.4), непрерывны на  $[0, x_1]$  и, кроме того,  $f_j(x) > 0$ , правая часть рассматриваемой системы удовлетворяет условию Липшица, что обеспечивает сходимость последовательности итераций (3.5) к решению задачи Коши. Концентрации  $N_j^{(1)}(x)$  выражаются через найденные функции  $f_j^{(1)}(x)$  при помощи соотношений (2.3), (2.1).

На отрезке  $[x_1, x_2]$  в случае *a* (см. рис. 1) нулевым приближением может служить «квазистационарное» распределение, задаваемое



Р и с. 2

условием (2.14). Для его нахождения, однако, проще решать не систему (2.14), а систему, которая получается при этом из (2.2):

$$(3.6) \quad K_{j,j+1} z_{j+1}^{(II)} = K_j z_j^{(II)} - K_{j,j-1} z_{j-1}^{(II)},$$

$$K_j \equiv K_{j,j+1} + K_{j,j-1} + \frac{u}{nd} \frac{d}{dx} \ln N_j^B(T(x)).$$

Так как температура газа быстро падает вдоль оси струи, в (3.6) учтены лишь одноквантовые переходы ( $\delta = 1$ ), многоквантовые будем учитывать в последующих приближениях. Решение системы (3.6) можно записать в виде

$$(3.7) \quad z_{j+1,0}^{(II)} = \prod_{i=0}^j \frac{K_i}{K_{i,i+1}} \left[ 1 - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{K_{i+1,i} K_{i,i+1}}{K_i K_{i+1}} + p_j \right] z_{0,0}^{(II)},$$

где коэффициенты  $p_j$  вычисляются по рекуррентной формуле.

$$p_j = p_{j-1} + \frac{K_{j,j-1} K_{j-1,j}}{K_{j-1} K_j} \left( \sum_{i=0}^{j-2} \frac{K_{i+1,i} K_{i,i+1}}{K_i K_{i+1}} - p_{j-2} \right), \quad p_0 = p_1 = p_2 = 0,$$

а  $z_{0,0}^{(II)}(x)$  — из условия нормировки

$$\sum_j N_j(x) = \sum_j z_j(x) N_j^B(T(x)) = 1.$$

Для последующих приближений из (2.2) вытекает  $dz_{j,h+1}^{(II)}/dx = \mathbf{K}(z_h^{(II)})$ , откуда

$$z_{j,h+1}^{(II)}(x) = \int_{x_1}^x \mathbf{K}[z_h^{(II)}(\xi)] d\xi + z_j^{(I)}(x_1).$$

В качестве нулевого приближения на отрезке  $[x_2, x_3]$  возьмем решение задачи Коши

$$(3.8) \quad \frac{1}{f_{j,0}^{(III)}} \frac{df_{j,0}^{(III)}}{dx} = R_j(f_{j,0}^{(III)}), \quad f_{j,0}^{(III)}(x_2) = \frac{z_{j+1}^{(II)}(x_2)}{a_j(x_2) z_j^{(II)}(x_2)}.$$

Учитывая в  $R_j$  только одноквантовые переходы ( $\delta = 1$ ), имеем [13]

$$(3.9) \quad f_{j,0}^{(III)}(x) = \frac{1 + f_{j,0}^{(III)}(x_2) + (1 - f_{j,0}^{(III)}(x_2))}{1 + f_{j,0}^{(III)}(x_2) + (1 - f_{j,0}^{(III)}(x_2))} \cdot$$

$$\frac{\left\{ \int_{x_2}^x \frac{n(\xi) d}{u(\xi)} E_j(\xi) [\alpha_j(\xi) + \gamma_j(\xi)] d\xi - E_j(x) \right\}}{\left\{ \int_{x_2}^x \frac{n(\xi) d}{u(\xi)} E_j(\xi) [\alpha_j(\xi) + \gamma_j(\xi)] d\xi + E_j(x) \right\}},$$

$$E_j(x) \equiv \exp \left\{ \int_{x_2}^x \frac{n(\xi) d}{u(\xi)} [\alpha_j(\xi) - \gamma_j(\xi)] d\xi \right\}.$$

Приближения более высоких порядков находим из системы (3.4)

$$f_{j,h+1}^{(III)}(x) = f_{j,0}^{(III)}(x) \exp \left\{ \int_{x_2}^x [R'_j(f_{j,h}^{(III)}, \xi) + \varepsilon_j(f_{j,h}^{(III)}, \xi) + \Gamma_j(\xi)] d\xi \right\},$$

где в  $R'_j$  учитываются только многоквантовые переходы ( $\delta \geq 2$ ).

На отрезке  $[x_2, x_4]$  решение строится так же, как и на отрезке  $[x_1, x_2]$ : с нулевым приближением (3.7) и с соответствующим изменением начальных данных. Наконец, при  $x \geq x_4$  выбор начального приближения осуществляется, как и на начальном участке струи  $[0, x_1]$ .

Наиболее сложен вопрос об оптимальном выборе нулевого приближения на участках *II* и *IV* (см. рис. 1) в случае *б*, т. е. когда слагаемые  $\Gamma_j$  и  $R_j$  в (2.4) — положительные величины одного порядка. Даже в приближении одноквантовых переходов вместо (3.8) из (2.4) при этом следует

$$(3.10) \quad \frac{df_{j,0}}{dz} = \frac{nd}{u} [\alpha_j^{(1)} f_{j,0}^2 + \beta_j^{(1)} f_{j,0} + \gamma_j^{(1)}] + f_{j,0} \Gamma_j.$$

Каждое из уравнений системы (3.10) есть общее уравнение Риккати с неравной нулю суммой коэффициентов, поэтому в отличие от (3.8) вопрос об их интегрировании требует отдельного рассмотрения.

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы.

Во-первых, решение (3.2), (3.3) системы (3.1) описывает наблюдаемый экспериментально процесс перераспределения внутренней энергии при свободном расширении молекулярного газа, а именно перезаселение верхних и недозаселение нижних уровней по сравнению с больцмановским распределением.

Во-вторых, правая часть в (3.1), согласно (2.6), пропорциональна  $E_{j+1} - E_j$ . С учетом разбегания вращательного спектра двухатомных молекул вращательная неравновесность в расширяющейся струе проявляется в первую очередь на верхних уровнях, что также согласуется с экспериментальными данными [4, 5].

В-третьих, при восстановлении констант скоростей вращательного (колебательного) энергообмена из релаксационных экспериментов надо учитывать наличие изображенных на рис. 1 зон с различными механизмами релаксации, так как традиционные методы применимы лишь в зоне *III* и, возможно, в переходных зонах *II*, *IV*. Поэтому в каждом отдельном случае необходимо оценивать границы интервалов  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Используя обобщение решения (3.9) системы (3.8) [13], итерационную схему интегрирования уравнений (1.1), предлагаемую в данной работе, можно применять и в случае учета межмолекулярного вращательно-вращательного или колебательно-колебательного энергообмена. Она может оказаться полезной и при численном решении систем релаксационных уравнений, так как последние, как известно, являются жесткими и требуют применения специальных методов (например, различных вариантов метода Гира).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ребров А. К. Неравновесные процессы в свободных струях // Современные проблемы теории теплообмена и физической гидрогазодинамики. — Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1984.
2. Muntz E. P. Measurements of anisotropic velocity distribution functions in rapid radial expansions // Rarefied Gas Dynamics: 5th Int. Symp. — N. Y.; L.: Acad. Press. — 1967. — V. 2.
3. Cattolica R., Robben F. et al. Translational nonequilibrium in free jets expansions // Phys. Fluids. — 1974. — V. 17, N 10.
4. Борзенко Б. Н., Карелов Н. В. и др. Экспериментальное исследование заселенности вращательных уровней молекул в струе азота // ПМТФ. — 1976. — № 5.
5. Шарафутдинов Р. Г., Беликов А. Е. и др. Вращательная релаксация в высокотемпературных свободных струях азота // Хим. физика. — 1984. — Т. 3, № 12.
6. Milne T. A., Beachy J. E., Greene F. T. Study of relaxation in free jets using temperature dependence of n-butane mass spectra // J. Chem. Phys. — 1972. — V. 56, N 6.
7. Sharma P. K., Young W. S. et al. Freezing of vibrational degrees of freedom in free jets flows with applications to jets containing CO<sub>2</sub> // J. Chem. Phys. — 1975. — V. 62, N 2.
8. Востриков А. А., Миронов С. Г. Кинетика колебательной релаксации N<sub>2</sub>O (001) в сверхзвуковой струе с участием кластеров // ЖТФ. — 1984. — Т. 54, вып. 2.
9. Варгин А. Н., Ганина Н. А. и др. Вращательная релаксация молекулярного азота в свободно расширяющейся струе // ПМТФ. — 1979. — № 3.
10. Шарафутдинов Р. Г., Беликов А. Е., Седельников А. И., Сухинин Г. И. Определение констант скоростей RT-процессов из измерений в свободных струях Ar—N<sub>2</sub> // Тез. докл. VIII Всесоюз. конф. по динамике разреженных газов. — М.: МАИ, 1985. — Т. 2.

11. Карелов Н. В., Ребров А. К., Шарафутдинов Р. Г. Заселенность вращательных уровней молекул азота при неравновесной конденсации в свободно расширяющемся газе // ПМТФ.— 1978.— № 3.
12. Васильев А. П., Дубровский Г. В., Стрельчя В. М. Приближенное аналитическое описание колебательной релаксации слабоангармонических осцилляторов // ПМТФ.— 1984.— № 5.
13. Дубровский Г. В., Стрельчя В. М. Релаксация ангармонических молекул // ПМТФ.— 1986.— № 3.
14. Zacharias H., Loy M. M. T. et al. Rotational and electronic relaxation in pulsed supersonic beams of NO seeded in He and Ar // J. Chem. Phys.— 1984.— V. 81, N 7.
15. Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Дубровский Г. В., Стрельчя В. М. К теории колебательного и вращательного возбуждения полиатомных молекул. II. Упрощенные формулы для констант скоростей.— Л., 1984.— (Препринт/ФТИ АН СССР; № 916).

Поступила 30/1 1986 г.

УДК 532.517

## МЕДЛЕННОЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ДИСКАМИ

Л. А. Кадинский, Ю. А. Половко, В. С. Юфеев

(Ленинград)

Исследованию течения жидкости между коаксиальными дисками посвящена обширная литература. Обзор по этой проблеме можно найти, например, в [1]. Детально изучен также класс течений в каналах с проницаемыми стенками (со вдувом или отсосом) [2]. Для обоих классов задач в предположении, что жидкость несжимаемая, найдены точные одномерные решения уравнений Навье — Стокса.

Очевидно, что в случае сжимаемого газа аналогичные одномерные решения, вообще говоря, получить нельзя. Однако если рассматривать медленные течения вязкого газа, когда число Маха мало и им можно пренебречь, а изменение плотности газа связано с большими перепадами температуры, то при определенных условиях одномерность решений удастся сохранить. С учетом прикладной значимости таких задач, например для химической технологии и микроэлектроники, в настоящей работе получено одномерное решение уравнений Навье — Стокса для течения вязкого, теплопроводного газа в дисковом канале.

Пусть нижний диск вращается с угловой скоростью  $\omega$ , а через верхний осуществляется вдув газа с входной скоростью  $v_{вх}$ . Введем цилиндрическую систему координат с осью  $Oz$ , направленной вдоль оси диска. Поскольку число Маха предполагается малым, то можно пренебречь вкладом кинетической энергии в полную энергию газа и не учитывать в уравнении энергии вязкую диссипацию. Кроме того, если изменение давления газа в канале невелико, то в уравнении состояния этим изменением можно пренебречь и считать, что плотность газа зависит только от его температуры. Конкретные условия применимости последнего допущения указаны ниже.

Сделанные допущения позволяют представить решение задачи в виде (индекс 0 относится к параметрам при  $z = 0$ )

$$(1a) \quad v_r = r \frac{v_0}{h^2} F\left(\frac{z}{h}\right), \quad v_\omega = \omega r G\left(\frac{z}{h}\right), \quad v_z = \frac{v_0}{h} H\left(\frac{z}{h}\right);$$

$$(1b) \quad p = -\rho_0 \frac{v_0^2}{2h^4} ar^2 + \rho_0 \frac{v_0^2}{h^2} P\left(\frac{z}{h}\right) + p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right),$$

$$T = T_0 \Theta\left(\frac{z}{h}\right), \quad \rho = \rho_0 \Theta^{-1}\left(\frac{z}{h}\right),$$

где  $h$  — ширина канала;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $g$  — ускорение свободного падения;  $R$  — газовая постоянная;  $a$  — параметр, связанный с величиной скорости вдува. Последнее слагаемое в (1b) учитывает наличие в уравнении импульсов силы тяжести, направленной по оси  $Oz$ .