

ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

А. И. Зобнин

(Новосибирск)

В теоретических исследованиях нестационарного отрывного обтекания тел широко применяется модель потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости (см., например, [1, 2]). Однако в рамках этой модели до сих пор не решен ряд важных вопросов. К их числу относится построение асимптотики решения в окрестности начального момента времени. Данная работа посвящена исследованию этого вопроса для плоского отрывного течения около кругового цилиндра, начавшего свое движение из состояния покоя.

Рассмотрим плоское течение жидкости около кругового цилиндра, возникающее при его движении из состояния покоя. Предположим, что течение происходит с отрывом потока, который моделируем одним вихревым следом, сходящим с контура цилиндра. Жидкость считаем идеальной и несжимаемой, а течение вне цилиндра и вихревого следа — потенциальным.

Поставим задачу об определении кинематических параметров течения в малой окрестности начального момента времени $t = 0$ при некоторых ограничениях на скорость движения цилиндра и параметры вихревого следа. Введем прямоугольную систему координат $O_1x_1y_1$, в бесконечно удаленной точке которой жидкость покоится. Пусть цилиндр L_0 радиуса R движется со скоростью $-U(t)$ вдоль оси O_1x_1 (см. фигуру).

Будем предполагать, что кривизна контура вихревого следа L_1 с направлением обхода от A к B_1 непрерывна, а интенсивность вихревого следа $\gamma_1(\tau_1, t)$ имеет производную по τ на L_1 , принадлежащую классу H^* в окрестности конца B_1 и классу H на остальной его части [3] (τ — комплексная координата точки контура L_1 в комплексной плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$, t — время). Предположим также, что скорости жидкости всюду конечны. В силу этого вихревой след будет сходиться с обтекаемого контура по касательной [4], и его интенсивность в точке B_1 будет нулевой.

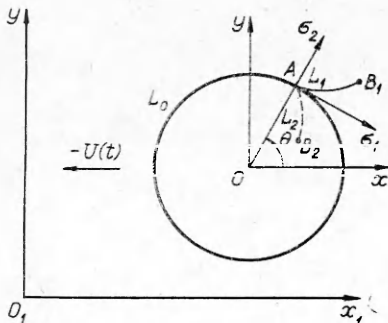
В плоскости комплексного переменного z_1 в фиксированный момент времени t для комплексной скорости $\bar{v}(z_1, t)$ можно сформулировать аналогично тому, как это делается в [5, 6], краевую задачу о построении аналитической вне контуров L_0 и L_1 функции $\bar{v}(z_1, t)$, удовлетворяющей условию непротекания на L_0 , имеющей заданный скачок на L_1 , исчезающей на бесконечности, всюду конечной и удовлетворяющей теореме Томпсона о постоянстве циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру. Эта задача является задачей Римана — Гильберта и допускает единственное решение, которое может быть записано в виде

$$(1) \quad \bar{v}(z_1, t) = -\frac{U^2 R^2}{(z_1 - z_0)^2} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1,2} \int_{L_k} \frac{\gamma_k(\tau_k) d\tau_k}{\tau_k - z_1},$$

где L_2 — контур, полученный из L_1 инверсией относительно окружности L_0 ; $\gamma_2(\tau_2) = -\gamma_1(\tau_1) \partial\tau_1 / \partial\tau_2$; z_0 — комплексная координата точки O .

Таким образом, в каждый момент времени поле скоростей определяется заданием скорости $U(t)$, контура L_1 вихревого следа и распределения вихревой интенсивности на нем $\gamma_1(\tau_1)$.

С помощью интеграла Коши — Лагранжа и условия отсутствия скачка давления на контуре L_1 можно получить, что циркуляция Γ вихревого следа, отсчитываемая от его конца B_1 , сохраняется в точках, движущихся со скоростями $v_0 =$



$= (v^+ + v^-)/2$. Отсюда следует, что если контур L_1 задать в параметрическом виде $\tau_1 = \tau_1(\Gamma, t)$, то его движение будет описываться уравнением [5, 6]

$$(2) \quad \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial t}(\Gamma, t) = \bar{v}_0(\tau_1(\Gamma, t), t).$$

Введем скалярную функцию времени

$$\gamma_*(t) = \gamma_1(\tau_1^*, t) \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial s_1} \right)^*,$$

где звездочкой отмечены величины, относящиеся к точке отрыва, s_1 — дуговая координата точки на кривой L_1 , отсчитываемая от A . Функция $\gamma_*(t)$ удовлетворяет уравнению [4]

$$(3) \quad \frac{d\gamma_*}{dt} = \gamma_* \left(\frac{\partial v_n^+}{\partial n} \right)^*,$$

n — внешняя нормаль к обтекаемому контуру L_0 .

Можно показать, что в предположениях о конечности поля скоростей и непрерывности кривизны контура L_1 его асимптотика в окрестности точки отрыва потока имеет вид [5, 7]

$$(4) \quad \sigma_2 = -\frac{\sigma_1^2}{2R} + \lambda(t) \sigma_1^{5/2} + o(\sigma_1^{5/2}),$$

где σ_1, σ_2 — абсцисса и ордината точки на L_1 в прямоугольной декартовой системе координат с началом в точке A (см. фигуру). При этом ось σ_1 направлена по касательной к L_0 , а ось σ_2 — по внешней нормали, $\lambda(t)$ — некоторый коэффициент, зависящий от времени.

Перейдем к непосредственному решению задачи об отыскании асимптотики течения в окрестности начального момента времени. Соотношения (1)–(4) позволяют свести эту задачу к определению зависимости от времени функций $\gamma_*(t)$, $\lambda(t)$ и $l(t)$ — длины проекции следа на ось σ_1 .

Введем функцию $V = U + v$ и комплексную переменную $z = z_1 - iz_0$. Через τ_1, τ_2 будем обозначать далее комплексные координаты точек на L_1 и L_2 в плоскости z .

Получим новые соотношения, содержащие искомые величины γ_*, λ, l . Преобразуем выражение (3), вычисляя в нем $(\partial V^+/\partial n)^*$ через предельное значение $\partial V^+/\partial z$. Из формулы (1) в соответствии с поведением интеграла типа Коши вблизи конца контура интегрирования [3] и формулой Лейбница [8] получим

$$(5) \quad \alpha_0^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}(z) = \frac{\alpha_0^2}{2\pi i} \left\{ \frac{4\pi i U R^2}{z^3} + \sum_{h=1,2} \left(\frac{\gamma_h(a)}{a-z} + \gamma_h'(a) \ln \frac{b_h - z}{a - z} + \int_{L_h} \frac{\gamma_h'(\tau_h) - \gamma_h'(a)}{\tau_h - z} d\tau_h \right) \right\}.$$

Контурные интегралы в этом выражении являются непрерывными функциями переменной z в окрестности точки a . Остальные слагаемые, кроме первого, имеют особенность в этой точке. Здесь $\alpha_0 = a/R$. Подставляя сюда

$$\gamma_2(a) = -\gamma_1(a), \quad \gamma_2'(a) = -\gamma_1'(a) - 2\gamma_1(a)(1/R - k_2)\bar{a}/R,$$

приходим к выводу, что коэффициент при особенности $(a-z)^{-1}$ равен нулю, а при $\ln(a-z)$

$$\frac{\alpha_0^2}{\pi i} \gamma_1(a) \frac{\bar{a}}{R} \left(\frac{1}{R} - k_2 \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial s_1} \left(\frac{1}{R} - k_2 \right).$$

В силу предположения о конечности поля скоростей во всей плоскости течения необходимо выполнение условия

$$(6) \quad k_2 = 1/R,$$

что обеспечивает равенство нулю коэффициента при $\ln(a - z)$. Условие (6) означает совпадение кривизны вихревого следа в точке схода с кривизной обтекаемого контура.

С учетом соотношений (5), (6) равенство (3) после ряда преобразований может быть приведено к виду

$$(7) \quad \gamma_*' = \gamma_* \operatorname{Re} \frac{a_0^2}{2\pi i} \left\{ \frac{4\pi i UR^2}{a^3} - \int_{L_1} \left(\frac{1}{(\tau_1 - a)^2} - \frac{1}{(\tau_2 - a)^2} \right) d\Gamma \right\}.$$

Получим еще одно соотношение, используя (1), (2). Для этого вычислим скорость $\bar{V}_0 = (\bar{V}^+ + \bar{V}^-)/2$ в некоторой точке $\tau \in L_1$, полагая $\tau \neq a$ [3]. Определим $\bar{V}_0(a)$ как предел $\bar{V}_0(\tau)$ при $\tau \rightarrow a$. Полученный предел можно преобразовать к виду

$$\bar{V}_0(a) = U(1 - R^2/a^2) - \gamma_1(a)/2 + (2\pi i)^{-1} \int_{L_1} (1/(\tau_1 - a) - 1/(\tau_2 - a)) \gamma_1(\tau_1) d\tau_1.$$

С другой стороны, $\bar{V}_0(a) = \bar{V}^-(a) + \gamma_1(a)/2$, где $\bar{V}^-(a)$ — скорость частицы жидкости, находящейся под следом. Приравняв правые части этих равенств, приходим к искомому соотношению

$$(8) \quad \bar{V}^-(a) + \gamma_1(a) = U(1 - R^2/a^2) - (2\pi i)^{-1} \int_{L_1} (1/(\tau_1 - a) - 1/(\tau_2 - a)) d\Gamma.$$

Выражая в (7), (8) τ_1, τ_2 через σ_1, σ_2 и переходя к скалярным величинам, получим

$$(9) \quad -R\theta' + \gamma_*' = 2U \sin \theta + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{2\sigma_2 + R^{-1}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} d\Gamma,$$

$$\gamma_*' = 2\gamma_* UR^{-1} \cos \theta - \frac{\gamma_*}{\pi} \int_{L_1} \frac{2\sigma_1\sigma_2 + R^{-1}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} d\Gamma,$$

где θ — угловая координата точки отрыва, отсчитываемая от оси Ox против часовой стрелки.

Исследуем систему соотношений (9). Заметим, что если в обоих уравнениях отбросить интегральные слагаемые, то получаемая таким образом система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\gamma_*(t)$ и $\theta(t)$ не имеет решений, удовлетворяющих условию $\gamma_*(0) = 0$. Это означает, что эти слагаемые должны играть существенную роль при $t \rightarrow 0$. Более того, интегральный член во втором уравнении должен быть величиной того же порядка по времени и того же знака, что и γ_*'/γ_* . Отсюда можно показать, что интегральный член в первом уравнении по порядку величины не превышает γ_* и имеет противоположный знак. Полагая ускорение точки отрыва в начальный момент равным нулю и $U(t) = U_0 t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, заключаем, что $R\theta'$ мало по сравнению с $2U \sin \theta$. Это означает степенной вид зависимости от времени с показателем α главной части $\gamma_*(t)$:

$$(10) \quad \gamma_*(t) = \gamma_0 t^\alpha + o(t^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Из (9) следует также, что конфигурации следа, при которых для всех точек контура $\sigma_2 \leq 0$, не реализуются. Величина $2UR^{-1}\gamma_* \cos \theta$ есть беско-

нечно малая при $t \rightarrow 0$ по сравнению с γ'_* , поэтому при дальнейших выкладках его можно пренебречь.

Согласно представлению (10), для малых моментов времени с точностью до величин более высокого порядка малости будут иметь место формулы

$$(11) \quad l - \sigma_1 = \frac{\gamma_0}{2(\alpha + 1)} t_1^{\alpha+1},$$

$$(12) \quad \gamma(\sigma_1) = \gamma_1(l - \sigma_1)^\omega,$$

где t_1 — время схода с цилиндра точки вихревого следа, имеющей в момент времени t координату σ_1 ;

$$(13) \quad \gamma_1 = \gamma_0^{1/(\alpha+1)} (2/(\alpha+1))^{\alpha/(\alpha+1)}, \quad \omega = \alpha/(\alpha+1), \quad \gamma(\sigma_1) = -d\Gamma/d\sigma_1.$$

Следует отметить, что в силу формулы (12), непрерывности кривизны контура L_1 и касания его с контуром L_0 в точке A функция $\gamma_1(\tau)$ на контуре L_1 будет принадлежать классу H^* в окрестности конца B_1 и удовлетворять условию Гёльдера на остальной его части. Это означает, что формула (10) не противоречит предположениям, при которых получены соотношения (9). Кроме того, формула (11), взятая при $t_1 = t$, дает зависимость длины следа от времени, что уменьшает число искомым функций и позволяет вместо функции $\lambda(t)$ рассматривать некоторую функцию $\lambda_1(l)$.

Выразим σ_2 через σ_1 с помощью разложения (4), удерживая в нем два первых члена, и подставим его в (9). Заметим, что если вместо двух членов взять только один, то система (9) снова не будет иметь решения, удовлетворяющего условию $\gamma_*(0) = 0$. Чтобы левая и правая части второго из полученных таким образом соотношений были величинами одного порядка, необходимо выполнение равенства

$$\lambda_1(l) = \lambda_0 l^{-3/2} + o(l^{-3/2}).$$

С учетом этого факта, а также формул (11)—(13) можно показать, что соотношения (9) представимы в виде

$$\gamma_* = 2U \sin \theta - \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\lambda_0 l^{-3/2} \sigma_1^{5/2}}{\sigma_1^2 + \lambda_0^2 l^{-3} \sigma_1^5} \gamma(\sigma_1) d\sigma_1 + o(l^\omega),$$

$$\gamma'_* = \frac{\gamma_*}{\pi} \int_0^l \frac{2\lambda_0 l^{-3/2} \sigma_1^{7/2}}{(\sigma_1^2 + \lambda_0^2 l^{-3} \sigma_1^5)^2} \gamma(\sigma_1) d\sigma_1 + o(l^{2\omega-1}).$$

Зависимость интегралов от l в этих соотношениях можно выделить в виде множителей с помощью выражения (12) путем замены переменных интегрирования. Тогда, отбрасывая остаточные члены, окончательно получим

$$(14) \quad \gamma_* = 2U \sin \theta - \lambda_0 \pi^{-1} \gamma_1 l^\omega \int_0^1 \frac{\sigma_1^{1/2}}{1 + \lambda_0^2 \sigma_1^3} (1 - \sigma_1)^\omega d\sigma_1,$$

$$\gamma'_* = 2\lambda_0 \pi^{-1} \gamma_* \gamma_1 l^{\omega-1} \int_0^1 \frac{\sigma_1^{-1/2}}{(1 + \lambda_0^2 \sigma_1^3)^2} (1 - \sigma_1)^\omega d\sigma_1.$$

Система соотношений (14) устанавливает связь между параметрами вихревого следа и скоростью цилиндра в рассматриваемый момент времени t . Для произвольных положительных U_0 и $0 < \alpha \leq 1$ эта система позволяет однозначно определить величины γ_0 , λ_0 и, следовательно, искомые функции γ_* , λ , l , которые определяют в силу (1), (4), (11)—(13) асимптотику начальной стадии отрывного обтекания цилиндра.

В частности, решение уравнений (14) для движения с конечным ускорением ($\alpha = 1$) определяется соотношениями

$$\frac{\pi}{8\lambda_0} = \int_0^1 \frac{\sigma_1^{-1/2}}{(1 + \lambda_0^2 \sigma_1^3)^2} (1 - \sigma_1)^{1/2} d\sigma_1,$$

$$\gamma_0 = 2U_0 \sin \theta \left(1 + \lambda_0 \pi^{-1} \int_0^1 \frac{\sigma_1^{1/2}}{1 + \lambda_0^2 \sigma_1^3} (1 - \sigma_1)^{1/2} d\sigma_1 \right)^{-1}.$$

С помощью первого из них константа λ_0 может быть найдена численно с любой степенью точности. Расчет показал, что $\lambda_0 = 0,252$. Отсюда следует $\gamma_0 = 1,94 U_0 \sin \theta$.

Таким образом, искомые функции будут в этом случае

$$(15) \quad \gamma_*(t) = \gamma_0 t, \quad \lambda(t) = 8\lambda_0 \gamma_0^{-3/2} t^{-3}, \quad l(t) = \gamma_0 t^2/4.$$

Полученная асимптотика может быть использована для качественного анализа и численного расчета начальной стадии обтекания кругового цилиндра. Например, соотношения (15) позволяют сделать вывод, что центр тяжести завихренности вихревого следа и его конец B_1 в окрестности момента времени $t = 0$ движутся по прямым, составляющим с осью σ_1 углы около 6 и 14° соответственно.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность Д. Н. Горелову за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 20 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогин Л. В., Нейланд В. Я., Степанов Г. Ю. Теория двумерных отрывных течений. — Итоги науки и техники. Гидромеханика, 1975, т. 8, с. 5.
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
3. Мухелишвили И. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
4. Ильичев К. П., Постоловский С. Н. Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2.
5. Бетяев С. К., Захаров С. Б., Молчанов В. Ф., Судаков Г. Г. Некоторые задачи теории отрывных течений идеальной жидкости и газа. Труды XI чтений К. Э. Циолковского, 1976.
6. Никольский А. А. О «второй» форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование вихревых отрывных потоков). — ДАН СССР, 1957, т. 116, № 2.
7. Бетяев С. К. Эволюция вихревых пелен. — В кн.: Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: изд. Чуваш. ун-та, 1980.
8. Крикунов Ю. М. Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций. — В кн.: Краевые задачи теории функций. Казань: изд. Казан. ун-та, 1962.

УДК 532.62

КРУПНЫЕ ВОЛНЫ И СРЫВ ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ СТЕКАНИИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

А. Е. Боков, Б. Г. Ганчев

(Москва)

При стекании пленки жидкости по вертикальной стенке на ее поверхности развивается волновое движение. Характеристики волн не остаются неизменными, а меняются вдоль пути пробега пленки [1—3].

Волновое движение имеет характер слабо стационарного эргодического процесса. Поэтому для его описания могут быть использованы осредненные характеристики — средняя толщина пленки $\delta_{\text{ср}}$, средняя толщина непрерывного слоя $\delta_{\text{н}}$, средняя толщина выступов $\delta_{\text{в}}$, средняя высота волн $h = \delta_{\text{в}} - \delta_{\text{н}}$, средняя частота ω и длина волны λ .

Если средняя толщина пленки стабилизируется уже на небольших расстояниях от входа (как правило, не более 200—400 мм), то насыщение волнового движения затягивается до 3—4 м. Наряду с мелкими волнами капиллярной природы развива-