

**О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ
ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ЖИДКОСТИ
В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ**

А. К. Колесников

(Пермь)

В работе проводится исследование конвективной устойчивости равновесия реагирующей жидкости, насыщающей горизонтальный пористый слой, ограниченный изотермическими плоскостями, имеющими одинаковую температуру. В результате химической реакции нулевого порядка во всем объеме жидкости выделяется тепло, причем мощность тепловыделения экспоненциально зависит от температуры. Известно [1], что в такой системе в некотором интервале значений параметра Франк-Каменецкого δ возможны два стационарных теплопроводных режима, соответствующих механическому равновесию среды. Один из этих режимов, отвечающий меньшим разогревам, является устойчивым, второй, характеризующийся более высокими равновесными температурами, — неустойчив. Поскольку тепловыделяющая среда подвижна, возникает вопрос об устойчивости этих стационарных теплопроводных режимов по отношению к возникновению конвекции. В работе определены границы устойчивости для нижнего и верхнего равновесных состояний. Показано, что критическое число Рэлея, определяющее порог конвекции, сильно зависит от интенсивности химической реакции. При всех значениях параметров неустойчивость носит монотонный характер.

Бесконечный горизонтальный слой пористой среды толщиной d ограничен идеально теплопроводными непроницаемыми плоскостями. В слое, насыщенном химически активной жидкостью, происходит гомогенная экзотермическая реакция разложения. Тепловой эффект реакции предполагается высоким, что позволяет не учитывать выгорание реагента, т. е. пользоваться моделью реакции нулевого порядка. Скорость химического процесса описывается законом Аррениуса. Границы слоя поддерживаются при постоянной температуре T_0 . Ось z направлена вертикально вверх, плоскость xy совпадает с нижней границей слоя.

Кинетика описанной реакции существенно отличается от рассмотренной в работе [2], где исследовано возникновение концентрационной конвекции в пористой среде в случае изотермической реакции первого порядка. Конвективная устойчивость горизонтального слоя обычной вязкой химически активной жидкости с реакцией нулевого порядка изучалась в работах [3, 4].

Уравнения тепловой конвекции реагирующей жидкости в пористой среде отличаются от уравнений конвективной фильтрации [5] наличием члена, описывающего тепловые источники, и имеют вид

$$(1) \quad \frac{1}{\rho_l} \nabla p + \frac{\nu}{K} \mathbf{v} - g\beta\Theta \mathbf{y} = 0,$$

$$(\rho c_p)_s \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\rho c_p)_l \mathbf{v} \nabla \Theta = \kappa_s \Delta \Theta + Q k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Скорость фильтрации, как правило, мала, что позволяет пренебрегать инерционными членами в уравнении движения.

В системе (1) введены следующие обозначения: v — скорость фильтрации; p — конвективная добавка к давлению; Θ — температура, отсчитываемая от температуры границ слоя, $\Theta = T - T_0$, где T и T_0 — абсолютные температуры соответственно внутри слоя и на его границах; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; β — коэффициент объемного расширения жидкости; K — проницаемость; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; κ — коэффициент теплопроводности; g — ускорение силы тяжести; γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх; Q — тепловой эффект реакции; k_0 — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная. Индексами l и s отмечены величины, относящиеся соответственно к жидкости и к пористой среде, насыщенной жидкостью.

Перепишем (1) в безразмерном виде, оставляя прежние обозначения и выбрав следующие единицы измерения: расстояния — d , времени — d^2/χ , скорости — χ/d , температуры — RT_0^2/E , давления — $\rho_l \nu \chi / K$, где $\chi = \kappa_s / (\rho c_p)_l$:

$$(2) \quad \begin{aligned} \nabla p + v - \text{Ra} \Theta \gamma &= 0, \\ b \partial \Theta / \partial t + v \nabla \Theta &= \Delta \Theta + \delta \exp(\Theta / (1 + \beta \Theta)), \quad \text{div } v = 0. \end{aligned}$$

Безразмерные параметры задачи: $\text{Ra} = g \beta R T_0^2 K d / E \nu \chi$ — фильтрационный аналог числа Рэлея; $\delta = Q k_0 d^2 E \exp(-E / R T_0) / \kappa_s R T_0^2$ — параметр Франк-Каменецкого; $\beta = R T_0 / E$ — малый параметр, значения которого не превышают 0,1; $b = (\rho c_p)_s / (\rho c_p)_l$, обычно значения b близки к единице и в дальнейшем полагаем $b = 1$.

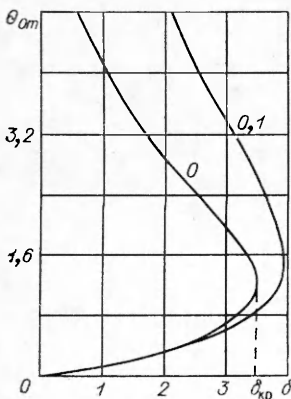
Механическое равновесие жидкости, при котором $v_0 = 0$ и $\partial / \partial t = 0$, описывается уравнениями

$$(3) \quad \nabla p_0 = \text{Ra} \Theta_0 \gamma, \quad \Delta \Theta_0 = -\delta \exp(\Theta_0 / (1 + \beta \Theta_0)).$$

На границах при $z = 0; 1$ $\Theta_0 = 0$.

Первое уравнение системы (3) показывает, что необходимым условием равновесия является вертикальность градиента температуры, который при наличии внутренних источников тепла зависит от z .

Решение нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности из (3) приводится в [1]. Показано, что стационарные состояния системы при $\beta = 0$ возможны лишь при значениях δ от 0 до 3,514. Верхняя граница этого интервала $\delta_{кр}$ определяет порог теплового взрыва. Равновесные распределения температуры симметричны относительно середины слоя (см. [1, 4]), где температура достигает максимума Θ_{0m} . На фиг. 1 приводится зависимость Θ_{0m} от δ для $\beta = 0$ и $\beta = 0,1$. В области $\delta < \delta_{кр}$ существует два стационарных режима, верхний из которых неустойчив [1].



Ф и г. 1

Исследуем конвективную устойчивость описанных равновесных состояний. Для этого рассмотрим малые возмущения скорости, температуры и давления (для возмущений сохраняем прежние обозначения v, Θ, p). После линеаризации с учетом (3) система уравнений для возмущений примет вид

$$(4) \quad \nabla p + \mathbf{v} - \text{Ra} \Theta \mathbf{e}_z = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \Theta_0 = \Delta \Theta + \delta \frac{\exp(\Theta_0/(1 + \beta \Theta_0))}{(1 + \beta \Theta_0)^2} \Theta, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0.$$

На стенках слоя обращаются в нуль нормальная компонента скорости фильтрации и возмущения температуры

$$(5) \quad v_z = 0, \quad \Theta = 0 \quad \text{при } z = 0; 1.$$

Рассмотрим нормальные возмущения, зависящие от горизонтальных координат и времени по закону $\exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]$, где k_1 и k_2 — вещественные волновые числа; λ — декремент возмущений.

Исключив из уравнения движения давление, получим из (4), (5) краевую задачу для амплитуд нормальных возмущений скорости $w(z)$ и температуры $\theta(z)$

$$(6) \quad (w'' - k^2 w) = -k^2 \text{Ra} \theta, \\ -\lambda \theta = (\theta'' - k^2 \theta) - w \theta_0' + \delta \frac{\exp(\Theta_0/(1 + \beta \Theta_0))}{(1 + \beta \Theta_0)^2} \theta, \\ w = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } z = 0; 1,$$

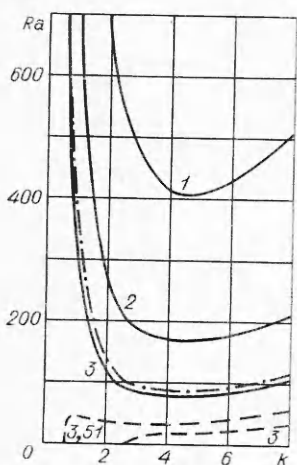
где $k^2 = k_1^2 + k_2^2$; штрихом обозначено дифференцирование по z .

При решении краевой задачи (6) использовался метод Рунге — Кутты — Мерсона [6], который позволяет автоматически выбирать шаг интегрирования, обеспечивающий заданную точность вычислений. Численные расчеты проводились на ЭВМ. Применение этого метода для решения задач конвективной устойчивости обсуждается в [7]. В соответствии с [7] уравнения краевой задачи представлялись в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и используемым методом строились два линейно-независимых частных решения, удовлетворяющих граничным условиям в начале интервала интегрирования $z = 0$. Из требования существования нетривиального решения задачи, удовлетворяющего условиям в конечной точке интегрирования $z = 1$, вытекает характеристическое соотношение, из которого определяются собственные значения задачи. Собственными значениями задачи являются декременты нормальных возмущений λ , зависящие от трех параметров: числа Рэлея, параметра Франк-Каменецкого и волнового числа. В общем случае декременты комплексны: $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$. Устойчивым состояниям соответствуют $\lambda_r > 0$, неустойчивым $\lambda_r < 0$; на границе устойчивости $\lambda_r = 0$.

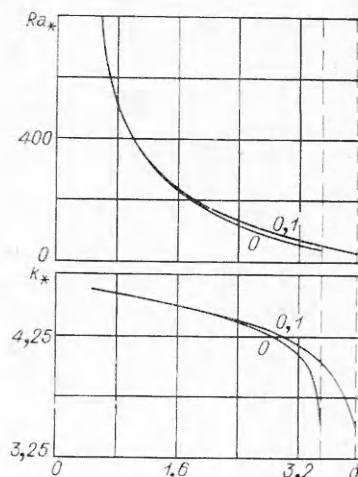
В отличие от обычной задачи конвективной устойчивости горизонтального слоя жидкости без внутренних источников тепла, для рассматриваемой задачи доказательство принципа монотонности провести не удастся, однако вычисления показывают, что все декременты вещественны ($\lambda_i = 0$) и колебательных режимов в системе нет.

В предельном случае $\text{Ra} = 0$, который реализуется, например, при отсутствии подъемной силы, задача (6) сводится к краевой задаче, определяющей устойчивость равновесных решений в покоящейся жидкости. Ее решение дает спектр декрементов $\lambda(\delta)$. Из вида спектра $\lambda(\delta)$ следует, что при $\text{Ra} = 0$ стационарный равновесный теплопроводный режим, соответствующий меньшим разогревам, устойчив, а большим — неустойчив, причем наиболее опасными оказываются возмущения плоскопараллельной структуры ($k = 0$).

Рассмотрим общий случай, когда число Рэлея отлично от нуля. Вследствие экзотермической химической реакции происходит разогрев



Ф и г. 2



Ф и г. 3

жидкости внутри слоя и в верхней половине возникает неустойчивая стратификация, приводящая при некоторых значениях параметров к кризису равновесия системы и развитию конвекции. Порог возникающей неустойчивости для фиксированного δ характеризуется нейтральной кривой $Ra(k)$. На фиг. 2 сплошными линиями показано семейство нейтральных кривых конвективной устойчивости нижнего стационарного теплового режима при различных значениях параметра Франк-Каменецкого ($\delta = 1; 2; 3$). Неустойчивая область ($\lambda < 0$) находится над кривыми. Из фиг. 2 видно существенное понижение устойчивости с ростом δ . Дестабилизация связана с тем, что при увеличении параметра Франк-Каменецкого для этого решения увеличивается равновесная температура в центре слоя (см. фиг. 1), т. е. растет и градиент плотности в его неустойчиво стратифицированной верхней части.

Влияние малого параметра β незначительно и приводит к небольшому увеличению конвективной устойчивости системы. Нейтральная кривая, соответствующая $\delta = 3$ и $\beta = 0,1$, изображена на фиг. 2 штрихпунктиром. Штриховые кривые нейтральных возмущений на фиг. 2 относятся ко второму равновесному решению ($\delta = 3,51; 3$). Устойчивому состоянию жидкости отвечает область под границей устойчивости. При смене стационарных теплопроводных режимов для значений δ , близких к $\delta_{кр}$, происходит деформация нейтральных кривых и длинноволновые возмущения приводят к абсолютной неустойчивости верхнего стационарного состояния. Уменьшение δ , соответствующее для второго решения увеличению $\Theta_{от}$, расширяет область абсолютной неустойчивости. Таким образом, рост числа Рэлея не приводит к стабилизации второго равновесного состояния системы, неустойчивого в режиме чистой теплопроводности.

Отметим, что полученная картина конвективной устойчивости в слое пористой среды качественно похожа на известную для вязкой химически активной жидкости [3, 4].

Зависимости минимального критического числа Рэлея Ra_* и соответствующего критического волнового числа k_* от δ для нижнего равновесного режима приводятся на фиг. 3. Кривые построены при предельных значениях β — 0 и 0,1. При $\delta = \delta_{кр}$ Ra_* имеет конечное значение.

Автор выражает благодарность Е. М. Жуховицкому за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 24 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Фраиш-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
2. Сергеев Ю. А., Письмен Л. М. Возникновение свободной конвекции под действием химической реакции в пористом слое.— «Изв. АН СССР», 1972, т. 205, № 6.
3. Merzhanov A. G., Shtessel E. A. Free convection and thermal explosion in reactive systems.— «Astronautica Acta», 1973, vol. 18, p. 191—199.
4. Jones D. R. The dynamic stability of confined, exothermically reacting fluids.— «Internat. J. Heat and Mass Transfer», 1973, vol. 16, p. 157—167.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
6. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., ИЛ, 1962.
7. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Применение метода Рунге—Кутты для исследования устойчивости плоскопараллельных конвективных течений.— В кн.: Приближенное решение краевых задач и функциональных уравнений. Пермь, изд. Пермск. политех. ин-та, 1971, № 84.

УДК 539.374,678 : 532

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОВЯЗКОМ СТЕРЖНЕ И ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ СТЕРЖНЯ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ

З. Н. Кузина, А. И. Леонов, А. А. Марков

(Москва)

Ряд общих результатов в динамической теории нелинейной упругости без учета диссипативных явлений получен в [1], где также решено значительное количество интересных задач. Соотношения на сильных и слабых разрывах в наследственных средах общего типа изучались в [2]. Однако для решения разнообразных динамических задач необходима конкретизация вида наследственного функционала. Этой проблеме применительно к описанию реологического поведения неспитых каучуков, расплавов и концентрированных растворов посвящены работы [3, 4].

В ряде работ проводилась проверка полученных в [3, 4] реологических соотношений, показавшая их хорошее совпадение с экспериментальными данными (некоторые результаты этой проверки и ссылки см. в [3]).

Распространению волн в стержнях с различными реологическими характеристиками посвящен ряд работ (например, [5—7]), где рассматривались малодеформируемые жесткие материалы, в связи с чем изменением сечения в обычном стержневом приближении авторы этих работ пренебрегали; здесь же пренебрегалось квадратичными силами инерции, а центр тяжести переносился на исследование волновых эффектов, связанных с физической нелинейностью реологических уравнений.

В данной работе с учетом сильных геометрических и физических нелинейностей рассмотрены различные типы волн, распространяющихся в упруговязком стержне.

Для исследования изотермического движения упруговязкого стержня будем использовать осредненное по сечению описание, рассматривая движение стержня как близкое к одноосному растяжению — сжатию. Предполагается, что все величины достаточно медленно меняются по длине стержня, а последняя много больше поперечного размера сечения.