Геология и геофизика, 2013, т. 54, № 1, с. 132—143

УДК 550.837

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В.П. Губатенко

Саратовский государственный технический университет,
410054, Саратов, ул. Политехническая, 77, Россия

Предложен эвристический метод нахождения аналитических решений задач электроразведки для случая постоянных токов и трехмерных изотропных сред. Метод основан на определении из уравнений Максвелла соответствующих параметров среды (электропроводности и магнитной проницаемости) по заданной в аналитическом виде напряженности электрического или магнитного полей. Рассмотрены примеры применения данного метода.

Аналитические решения, прямая задача электроразведки.

A HEURISTIC METHOD FOR THE ANALYTICAL SOLUTION OF MAXWELL'S EQUATIONS FOR DIRECT CURRENT

V.P. Gubatenko

We propose a heuristic method for the analytical solution of electrical-prospecting problems for direct currents and 3D isotropic media. The corresponding parameters of the medium (conductivity, magnetic permeability) are determined from Maxwell's equations by the assignment of electric- or magnetic-field intensity in the analytical form. The application of this method is illustrated with examples.

Analytical solutions, direct problem of electrical prospecting

ВВЕДЕНИЕ

Сравнение по точности и эффективности различных алгоритмов и программ численного моделирования прямых и обратных задач электроразведки невозможно без сопоставления результатов расчета с некоторыми эталонами (аналитическими решениями), обеспечивающими верные решения поставленных задач. Более того, аналитические решения трехмерных задач электроразведки помогут в наиболее общем виде исследовать электромагнитное поле в сложнопостроенной геологической среде.

Источником аналитических решений задач электроразведки являлись до настоящего времени прямые задачи электроразведки, для решения которых применяются классические методы математической физики — зеркальных отображений, интегральных преобразований, функций Грина, разделения переменных и интегральных уравнений. Вместе с тем число известных аналитических решений прямых задач невелико даже в случае двумерных (плоских и осесимметрических) электромагнитных полей.

В настоящей работе предлагается альтернативный подход к нахождению аналитических решений уравнений Максвелла, основанный на методе заданного поля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в односвязной области V трехмерного евклидова пространства $\mathbf{R}^3$ соотношения

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0. \tag{3}$$

Эти соотношения являются однородными уравнениями Максвелла для постоянного тока. Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей; σ и μ — скалярные электропроводность и магнитная проницаемость.

Поставим задачу о нахождении различных частных решений уравнений (1)—(3). В наиболее общем виде эта задача сводится к определению всевозможных систем функций $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \sigma, \mu\}$, обращающих соотношения (1)—(3) в тождества. Ограничим эти системы достаточно гладкими, а также физически реализуемыми функциями. Таким образом, пусть в области V

$$\sigma > 0\,,\ \mu > 0\,. \tag{4}$$

Если же область V неограниченная, то положим, что

$$\lim_{\rho(M,S)\to\infty} \mathbf{E}(M) = 0\,, \quad \lim_{\rho(M,S)\to\infty} \mathbf{H}(M) = 0\,, \tag{5}$$

т.е. электромагнитное поле стремится к нулю при неограниченном увеличении расстояния $\rho(M,S)$ от точки $M \in V$ до поверхности S, отделяющей область V от $\mathbf{R}^3 \setminus V$ — дополнения V до всего пространства $\mathbf{R}^3$.

В частности, из условий (4) и (5) следует, что если V совпадает с пространством $\mathbf{R}^3$, то $\mathbf{E}(M) \equiv 0$ и $\mathbf{H}(M) \equiv 0$. Поэтому всюду в дальнейшем будем рассматривать область V как подмножество $\mathbf{R}^3$.

Для отыскания решения данной задачи можно применить два способа. Первый способ традиционный и составляет прямую задачу электроразведки. В этой задаче следует найти в ограниченной области V решение $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ уравнений (1)—(3) с заданными параметрами среды σ и μ, удовлетворяющее на поверхности S краевому условию $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\big|_S = \mathbf{E}_\tau^S$ (или условию $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{H})\big|_S = \mathbf{H}_\tau^S$), где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности S, направленная в сторону области $\mathbf{R}^3 \setminus V$; $\mathbf{E}_\tau^S$ и $\mathbf{H}_\tau^S$ — заданные на поверхности S соответствующие тангенциальные составляющие напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей. В случае неограниченной области указанные краевые условия дополняются условиями (5) на бесконечности.

Во втором способе можно задать в области V вектор $\mathbf{E}$ (или вектор $\mathbf{H}$) и попытаться определить из уравнений (1)—(3) параметры среды σ и μ, а также вектор $\mathbf{H}$ (или вектор $\mathbf{E}$). Этот метод, как мы увидим, отличается от первого способа своей простотой, так как его применение сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Однако он имеет тот недостаток, что найденные данным способом параметры среды σ и μ могут не удовлетворять в области V условиям (4), а векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — условиям (5) (в случае неограниченной области V). Поэтому второй способ можно назвать эвристическим в отличие от первого и будет достаточно подробно рассмотрен в настоящей работе.

Если найдено некоторое частное решение $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \sigma, \mu\}$ поставленной задачи, то ему можно придать следующую физическую интерпретацию: стационарное электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в области V, заполненной средой с электропроводностью σ и магнитной проницаемостью μ, возбуждается некоторыми сторонними токами, расположенными вне этой области. В соответствии с принципом эквивалентности [Никольский, 1978] поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ может быть создано, например, протекающими по поверхности S поверхностными сторонними электрическими $\mathbf{j}^e$ и магнитными $\mathbf{j}^m$ токами с плотностями

$$\mathbf{j}^e = -\mathbf{n}\times\mathbf{H}^S\,,\ \mathbf{j}^m = \mathbf{n}\times\mathbf{E}^S\,,$$

где $\mathbf{E}^S$ и $\mathbf{H}^S$ — соответствующие значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на поверхности S. При таком распределении сторонних токов электромагнитное поле в области $\mathbf{R}^3 \setminus V$ тождественно равно нулю независимо от электропроводности и магнитной проницаемости в этой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ПО ЗАДАННОМУ ВЕКТОРУ E

Пусть в области V задан вектор $\mathbf{E}$. Найдем в этой области такие скалярные функции μ и σ, а также вектор $\mathbf{H}$, для которых уравнения (1)—(3) обращаются в тождества. В соответствии с уравнением (2) решение этой задачи может существовать только для потенциального вектора $\mathbf{E}$, т.е.

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi\,, \tag{6}$$

где φ — потенциальная функция. Тогда уравнения (1), (3) примут вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \sigma\operatorname{grad}\varphi\,, \tag{7}$$

$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0\,. \tag{8}$$

Таким образом, задание напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля в данном случае равносильно заданию потенциальной функции φ, и тогда соотношения (7), (8) можно рассматривать в качестве уравнений относительно неизвестных σ, $\mathbf{H}$ и μ.

Правая часть в (7) есть вихревой вектор, поэтому, как следует из этого соотношения,

$$\operatorname{div}(\sigma\operatorname{grad}\varphi) = 0$$

или

$$\sigma\nabla^2\varphi + (\operatorname{grad}\sigma, \operatorname{grad}\varphi) = 0 .$$

Записывая последнее соотношение в прямоугольных декартовых координатах x, y, z, получаем относительно неизвестной функции σ линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\sigma}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\sigma . \tag{9}$$

Пусть векторное поле $\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{div}\mathbf{E}$ не обращаются одновременно в нуль в области V. Тогда [Гюнтер, 1934; Куренский, 1934; Камке, 1966; Эльсгольц, 1969] существует общее решение этого уравнения. Его отыскание сводится к нахождению трех независимых первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = -\frac{d\sigma}{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\sigma} , \tag{10}$$

называемой характеристической системой, соответствующей уравнению (9).

Пусть $C_1 = \xi(x, y, z, \sigma)$, $C_2 = \eta(x, y, z, \sigma)$, $C_3 = \zeta(x, y, z, \sigma)$ — независимые первые интегралы системы (10). Тогда для общего интеграла уравнения (9) справедливо выражение

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0 , \tag{11}$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция.

В силу независимости первых интегралов уравнение (11) разрешимо относительно любого из аргументов ξ, η или ζ, и поэтому общий интеграл уравнения (9) можно записать, например, в виде

$$\xi = \Phi^*(\eta, \zeta) ,$$

где Φ^* — произвольная дифференцируемая функция.

Рассмотрим частный случай, когда $\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla^2\varphi = 0$, т.е. $\mathbf{E}$ в области V является не только потенциальным вектором, но и вихревым. Поскольку из уравнения (1) следует, что $\operatorname{div}\sigma\mathbf{E} = 0$, то из условия $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ получаем $(\operatorname{grad}\sigma, \mathbf{E}) = 0$. Это последнее равенство определяет физический смысл условия $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ — векторные линии напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля (плотности тока $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$) лежат на поверхностях уровня электропроводности σ. Такая ситуация возможна, например, если $\sigma = \text{const}$. В случае $\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla^2\varphi = 0$ имеем характеристическую систему

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = \frac{d\sigma}{0} .$$

Отсюда получаем $C_1 = \sigma$, $C_2 = \eta(x, y, z)$, $C_3 = \zeta(x, y, z)$, где C_2 и C_3 — независимые первые интегралы системы

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} .$$

Тогда общий интеграл уравнения (9) имеет вид

$$\sigma = \tilde{\Phi}(\eta, \zeta) ,$$

где $\tilde{\Phi}$ — произвольная дифференцируемая функция. В частности, полагая $\tilde{\Phi} = \sigma_0 = \text{const}$, видим, что семейство решений $\sigma = \tilde{\Phi}(\eta, \zeta)$ содержит решение $\sigma = \sigma_0$, обеспечивающее постоянную электропроводность σ в области V. Если же $\operatorname{div}\mathbf{E} \neq 0$, то никаким выбором функции Φ в формуле (11) получить решение $\sigma = \text{const}$ невозможно.

Следовательно, для заданного $\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi$ общий интеграл уравнения (9) выражается через одну произвольную дифференцируемую функцию Φ^* от двух аргументов η и ζ, представляющих собой определенные выражения из независимых переменных x, y, z. Значит, задача нахождения электропроводности σ по заданному вектору $\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\varphi$ существенно не единственна, поэтому не единственна задача нахождения $\mathbf{H}$ и μ.

Более того, даже выбрав из множества решений, определяемых выражением (11), некоторое $\sigma = \sigma(x, y, z)$, находим из уравнения (7), следуя работе [Кочин, 1965], также множество векторов $\mathbf{H}$, определенных с точностью до градиента произвольной дифференцируемой функции ψ:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathrm{grad}\,\psi . \tag{12}$$

Здесь вектор $\mathbf{H}_0 = (P, Q, R)$ задается выражениями

$$P(x,y,z) = -\int_{y_0}^{y} j_z(x,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} j_y(x,y_0,z)\,dz ,$$

$$Q(x,y,z) = 0 , \tag{13}$$

$$R(x,y,z) = \int_{y_0}^{y} j_x(x,y,z)\,dy ,$$

где $j_x(x,y,z) = \sigma(x,y,z)\dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}$, $j_y(x,y,z) = \sigma(x,y,z)\dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}$, $j_z(x,y,z) = \sigma(x,y,z)\dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}$ — компоненты плотности тока $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$; $(x_0, y_0, z_0) \in V$.

Наконец, конкретизируя функцию ψ в формуле (12) и выбирая ее так, чтобы $\mathbf{H}$ не равнялась тождественно нулю в области V, найдем некоторый вектор $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$, определяющий напряженность магнитного поля в области V. Тогда для нахождения магнитной проницаемости μ можно использовать уравнение (8), имеющее в координатной форме вид линейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$H_x \frac{\partial\mu}{\partial x} + H_y \frac{\partial\mu}{\partial y} + H_z \frac{\partial\mu}{\partial z} = -\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right)\mu . \tag{14}$$

Уравнение (14) вполне аналогично (9), и существует общий интеграл этого уравнения, определяемый тем же методом, что и общий интеграл уравнения (9). Иными словами, находятся три независимых первых интеграла $C_1 = \xi_1(x,y,z,\mu)$, $C_2 = \eta_1(x,y,z,\mu)$, $C_3 = \zeta_1(x,y,z,\mu)$ характеристической системы

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z} = -\frac{d\mu}{\left(\dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_z}{\partial z}\right)\mu} , \tag{15}$$

после чего записывается общий интеграл уравнения (14)

$$\Phi_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0 , \tag{16}$$

где Φ_1 — произвольная функция. Соотношение (16) определяет множество функций μ для заданного вектора $\mathbf{H}$ из семейства (12). Общим интегралом уравнения (12) является также соотношение

$$\xi_1 = \Phi_1^*(\eta_1, \zeta_1) ,$$

где Φ_1^* — произвольная функция.

Следовательно, множество всех достаточно гладких потенциальных функций φ и таких, что вектор $\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\varphi$ и $\mathrm{div}\,\mathbf{E}$ не обращается одновременно в нуль в области V, определяют в соответствии с формулами (6), (11)—(13), (16) векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и скаляры σ, μ, обращающие в тождества уравнения (1)—(3).

Заметим, что семейству решений (16) принадлежит решение $\mu = \mathrm{const}$, соответствующее немагнитным горным породам, тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{H}$, определяемый формулой (12), есть вихревой вектор, т.е. если $\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$ в области V. Этому условию всегда можно удовлетворить подходящим выбором функции ψ в выражении (12).

Рассмотрим пример. Пусть в ограниченной замкнутой односвязной области V, расположенной в области $x>0$, $y>0$, $z>0$, задана потенциальная функция $\varphi=\alpha x^2y^2z^2$, где $\alpha=\mathrm{const}$ $\left(\frac{\text{В}}{\text{м}^6}\right)$. Тем самым в области V задана напряженность электрического поля

$$\mathbf{E}=\operatorname{grad}\varphi=2\alpha xy^2z^2\mathbf{i}+2\alpha x^2yz^2\mathbf{j}+2\alpha x^2y^2z\mathbf{k}=$$

$$=2\alpha xyz\left(yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}\right), \tag{17}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты прямоугольной декартовой системы координат. Требуется найти напряженность $\mathbf{H}$ магнитного поля, электропроводность σ и магнитную проницаемость μ такие, что уравнения (1)—(3) обращаются в тождества. Поскольку вектор $\mathbf{E}$, определяемый выражением (17), потенциальный, то решение этой задачи существует.

Подчеркнем, что в данном примере область V ограниченная, поэтому выражение (17) для напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля не противоречит условиям (5), применяемым к неограниченной области V. Кроме того, V — замкнутая область, принадлежащая октанту $x>0$, $y>0$, $z>0$ прямоугольной декартовой системы координат, что исключает случаи $x=0$, $y=0$ и $z=0$. В качестве области V может быть выбран, например, прямоугольный параллелепипед $x_1\le x\le x_2$, $y_1\le y\le y_2$, $z_1\le z\le z_2$, где $0<x_1<x_2<+\infty$, $0<y_1<y_2<+\infty$, $0<z_1<z_2<+\infty$.

Заметим также здесь, что наряду с прямоугольными декартовыми координатами x, y, z точек $M\in\mathbf{R}^3$ будем всюду использовать безразмерные координаты $\bar{x}=x/\tilde{d}$, $\bar{y}=y/\tilde{d}$, $\bar{z}=z/\tilde{d}$, где $\tilde{d}$ — некоторая характерная длина в выбранной системе СИ. В качестве длины $\tilde{d}$ можно выбрать, например, диаметр области V, единицу длины (м) и т.д.

Из выражения (17) находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2\alpha xy^2z^2,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2\alpha x^2yz^2,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2\alpha x^2y^2z,$$

$$\nabla^2\varphi=2\alpha\left(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2\right).$$

Подставляя эти выражения в соотношение (9), получаем для электропроводности σ уравнение

$$xy^2z^2\frac{\partial\sigma}{\partial x}+x^2yz^2\frac{\partial\sigma}{\partial y}+x^2y^2z\frac{\partial\sigma}{\partial z}=-\left(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2\right)\sigma. \tag{18}$$

Для решения этого уравнения запишем характеристическую систему

$$\frac{dx}{xy^2z^2}=\frac{dy}{x^2yz^2}=\frac{dz}{x^2y^2z}=-\frac{d\sigma}{\left(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2\right)\ \sigma} \tag{19}$$

или эквивалентную ей систему

$$\frac{d\ln x}{y^2z^2}=\frac{d\ln y}{x^2z^2}=\frac{d\ln z}{x^2y^2}=-\frac{d\ln\sigma}{\left(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2\right)}. \tag{20}$$

Воспользуемся следующим свойством дробей.

Если $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, то $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_j}{b_j}$, $j=1,2,\ldots,n$. Применяя это свойство дробей к системе (20), получаем

$$\frac{d\ln x+d\ln y+d\ln z}{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}=-\frac{d\ln\sigma}{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2},$$

откуда $C_1=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\sigma$. Из уравнений $\frac{d\ln x}{y^2z^2}=\frac{d\ln y}{x^2z^2}$ системы (20) имеем

$$xdx=ydy,$$

следовательно, $C_2=\bar{x}^2-\bar{y}^2$, а из уравнения $\frac{d\ln y}{x^2z^2}=\frac{d\ln z}{x^2y^2}$ находим

$$ydy = zdz\ ,$$

тогда $C_3 = \bar{y}^2 - \bar{z}^2$.

Независимые первые интегралы характеристической системы (19) найдены, общее решение уравнения (18) в соответствии с формулой (11) можно записать в неявном виде

$$\Phi\left(C_1, C_2, C_3\right) = \Phi\left(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\ \ \sigma, \bar{x}^2 - \bar{y}^2, \bar{y}^2 - \bar{z}^2\right) = 0$$

или в явном

$$\sigma = \frac{\beta}{\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{z}} \Phi^*\left(\bar{x}^2 - \bar{y}^2, \bar{y}^2 - \bar{z}^2\right),$$

где Φ^* — произвольная безразмерная дифференцируемая функция соответствующих аргументов; β — постоянная (См/м).

Пусть, например, $\Phi^* = 1$, тогда

$$\sigma = \frac{\beta}{\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{z}}\ . \tag{21}$$

Запишем компоненты вектора плотности тока $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$:

$$j_x = 2\alpha\beta\tilde{d}^3 yz\ ,\ \ j_y = 2\alpha\beta\tilde{d}^3 zx\ ,\ \ j_z = 2\alpha\beta\tilde{d}^3 xy\ .$$

Подставляя эти выражения в формулы (13) при $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, находим

$$\mathbf{H}_0 = \alpha\beta\tilde{d}^3\left[x\left(z^2 - y^2\right)\ \mathbf{i} + zy^2\mathbf{k}\right].$$

Положим $\psi = \alpha\beta\tilde{d}^3 y^2 z^2$ в формуле (12). Тогда

$$\mathbf{H} = \alpha\beta\tilde{d}^3\left[x\left(z^2 - y^2\right)\ \mathbf{i} + 2yz^2\mathbf{j} + 3zy^2\mathbf{k}\right], \tag{22}$$

а уравнение (14) для искомой магнитной проницаемости μ примет вид

$$x\left(z^2 - y^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} + 2yz^2\frac{\partial\mu}{\partial y} + 3zy^2\frac{\partial\mu}{\partial z} = -\left(2y^2 + 3z^2\right)\ \mu\ . \tag{23}$$

Составим соответствующую уравнению (23) характеристическую систему

$$\frac{dx}{x\left(z^2 - y^2\right)} = \frac{dy}{2yz^2} = \frac{dz}{3zy^2} = -\frac{d\mu}{\left(2y^2 + 3z^2\right)\ \mu}\ . \tag{24}$$

Система уравнений (24) эквивалентна системе

$$\frac{d\ln x}{\left(z^2 - y^2\right)} = \frac{d\ln y}{2z^2} = \frac{d\ln z}{3y^2} = -\frac{d\ln\mu}{2y^2 + 3z^2}\ .$$

Учитывая свойство дробей, можем записать

$$\frac{d\ln x + d\ln y + d\ln z}{\left(z^2 - y^2\right) + 2z^2 + 3y^2} = \frac{d\ln x + d\ln y + d\ln z}{2y^2 + 3z^2} = -\frac{d\ln\mu}{2y^2 + 3z^2}\ .$$

Следовательно, $C_1 = \bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}\,\mu$. Далее из $\dfrac{d\ln y}{2z^2} = \dfrac{d\ln z}{3y^2}$ получаем $3ydy = 2zdz$, откуда $C_2 = \bar{y}^2 - \dfrac{2}{3}\bar{z}^2$. Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d\ln x}{\left(z^2 - y^2\right)} = \frac{d\ln z}{3y^2}$$

с учетом того, что $\bar{y}^2 = C_2 + \dfrac{2}{3}\bar{z}^2$. Тогда

$$\frac{d\overline{x}}{\overline{x}}=\frac{\left(\overline{z}^2-\overline{y}^2\right)d\overline{z}}{3\overline{z}\;\;\overline{y}^2}=\frac{\left(\overline{z}^2-C_2-\dfrac{2}{3}\overline{z}^2\overline{y}^2\right)d\overline{z}}{3\overline{z}\;\left(C_2+\dfrac{2}{3}\overline{z}^2\right)}=\left[\frac{\overline{z}}{3\left(C_2+\dfrac{2}{3}\overline{z}^2\right)}-\frac{1}{3\overline{z}}\right]d\overline{z}\,.$$

Выполняя интегрирование этого уравнения, получаем

$$\ln\overline{x}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{3}\overline{z}^2+C_2\right)-\frac{1}{3}\ln\overline{z}+\ln C_3\,.$$

Подставляя в это выражение $C_2=\overline{y}^2-\dfrac{2}{3}\overline{z}^2$, находим $C_3=\dfrac{\overline{x}\;\;\overline{z}^{1/3}}{\overline{y}^{1/2}}$.

Независимые первые интегралы характеристической системы (24) найдены, и можно записать в явном виде общее решение уравнения (23)

$$\mu=\frac{\theta}{\overline{x}\;\;\overline{y}\;\;\overline{z}}\Phi_1^*\left(\overline{y}^2-\frac{2}{3}\overline{z}^2,\frac{\overline{x}\;\;\overline{z}^{1/3}}{\overline{y}^{1/2}}\right),\qquad(25)$$

где $\boldsymbol{\Phi}_1^*$ — произвольная безразмерная дифференцируемая функция соответствующих аргументов; θ — произвольная постоянная (Гн/м).

Подставляя систему функций {$\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, σ, μ}, определяемых формулами (17), (22), (21) и (25), в уравнения (1)—(3), нетрудно убедиться, что эти уравнения обращаются в тождества.

Данный результат можно интерпретировать также следующим образом: векторы **E** и **H**, заданные выражениями (17) и (22), есть аналитическое решение уравнений Максвелла (1)—(3) для трехмерной модели изотропной среды с электропроводностью σ и магнитной проницаемостью μ, заданными выражениями (21) и (25). Если дополнительно потребовать, чтобы в ограниченной замкнутой области V, расположенной в октанте $x>0$, $y>0$, $z>0$, выполнялись условия (4) физической реализуемости, то в формуле (21) следует положить $\beta>0$, а в формуле (25) выбрать положительную функцию $\boldsymbol{\Phi}_1^*$ и задать $\theta>0$. Кроме того, выбранная область V исключает случаи $x=0$, $y=0$ и $z=0$, следовательно, функции σ и μ ограничены в этой области.

Данный пример показывает, что успех применения эвристического метода для нахождения аналитических решений уравнений Максвелла определяется возможностью построения интегрируемых комбинаций характеристических систем (10) и (15). Для нахождения общих решений уравнений (9) и (14) можно воспользоваться известными справочниками [Камке, 1966; Зайцев, Полянин, 2003].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ПО ЗАДАННОМУ ВЕКТОРУ H

Пусть в области V задан в аналитическом виде вектор $\mathbf{H}$. Найдем в этой области скалярные функции μ, σ и вектор $\mathbf{E}$ такие, что уравнения (1)—(3) обращаются в тождества. Можно показать, что решение этой задачи существует тогда и только тогда, когда в области V

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{H},\operatorname{rot}\;\operatorname{rot}\mathbf{H}\right)=0\,.\qquad(26)$$

Действительно, из уравнения (2) следует, что искомый вектор $\mathbf{E}$ должен быть потенциальным: $\mathbf{E}=\operatorname{grad}\varphi$. Следовательно, решение поставленной задачи сводится к отысканию неизвестных σ, $\mathbf{E}=\operatorname{grad}\varphi$ и μ из уравнений (1), (3). Тогда уравнение (1) примет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\sigma\operatorname{grad}\varphi\,.\qquad(27)$$

Очевидно также, что представление (27) справедливо тогда и только тогда, когда в области V обращается в тождество соотношение

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right)=0\,.\qquad(28)$$

При заданном векторе $\mathbf{H}$ оно может рассматриваться как уравнение относительно неизвестной электропроводности σ. Вводя обозначение $\mathbf{J}=\operatorname{rot}\mathbf{H}=\left(j_x,j_y,j_z\right)$, новую неизвестную функцию $\rho=1/\sigma$ (удельное электрическое сопротивление среды) и требуя, чтобы функция ρ не равнялась тождественно нулю в области V, перепишем уравнение (28) в виде

$$\left[\operatorname{grad}\rho,\mathbf{J}\right]+\rho\operatorname{rot}\mathbf{J}=0\,.$$

Тогда в прямоугольной декартовой системе координат получаем систему линейных неоднородных уравнений в частных производных первого порядка для неизвестной функции ρ:

$$j_z \frac{\partial \rho}{\partial y} - j_y \frac{\partial \rho}{\partial z} + \left(\frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z} \right) \rho = 0 , \tag{29}$$

$$-j_z \frac{\partial \rho}{\partial x} + j_x \frac{\partial \rho}{\partial z} + \left(\frac{\partial j_x}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial x} \right) \rho = 0 , \tag{30}$$

$$j_y \frac{\partial \rho}{\partial x} - j_x \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right) \rho = 0 . \tag{31}$$

Найдем нетривиальное решение этой системы. Рассматривая соотношения (29)—(31) как алгебраическую систему линейных неоднородных уравнений для неизвестных частных производных функции ρ, видим, что определитель матрицы коэффициентов этой системы тождественно равен нулю. Следовательно, всякое уравнение системы (29)—(31) есть линейная комбинация оставшихся уравнений или эта система несовместна.

Пусть в области V хотя бы одна из компонент j_x, j_y, j_z вектора $\mathbf{J}$ не равна тождественно нулю. Положим, например, что $j_z \neq 0$. Умножая уравнения (29)—(31) соответственно на j_x, j_y, j_z и складывая полученное, находим, что всюду в области V

$$\left(\mathbf{J}, \operatorname{rot} \mathbf{J} \right) \ \rho = 0 .$$

Отсюда сразу следует необходимое условие совместности системы уравнений (29)—(31), следовательно, необходимое условие существования решения поставленной задачи имеет вид

$$\left(\mathbf{J}, \operatorname{rot} \mathbf{J} \right) = \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}, \operatorname{rot} \ \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) = 0 ,$$

что доказывает необходимость условия (26).

Будем считать условие (26) выполненным. Тогда, как уже отмечалось, любое уравнение системы (29)—(31) будет линейной комбинацией остальных уравнений. Следовательно, одно из уравнений этой системы можно опустить. Исключим из рассмотрения, например, уравнение (31).

Так как $j_z \neq 0$ в области V, то уравнения (29), (30) можно записать в канонической форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{j_y}{j_z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{j_z} \left(\frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z} \right) \rho = 0 , \tag{32}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{j_x}{j_z} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{1}{j_z} \left(\frac{\partial j_x}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial x} \right) \rho = 0 . \tag{33}$$

Применяя теорию систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно одной неизвестной функции, введем дифференциальные операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{j_y}{j_z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{j_z} \left(\frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z} \right),$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{j_x}{j_z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{j_z} \left(\frac{\partial j_x}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial x} \right)$$

и составим уравнение

$$X_1 \left(X_2 (\rho) \right) - X_2 \left(X_1 (\rho) \right) = 0 . \tag{34}$$

Применяя условие (26), из которого следует, что $\frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{J}, \operatorname{rot} \mathbf{J} \right) = 0$, нетрудно доказать, что соотношение (34) выполняется тождественно в области V. Значит система уравнений (32), (33) является инволюционной, следовательно, она будет якобиевой системой [Камке, 1966]. Эта система имеет общее решение, которое может быть найдено с помощью методов Якоби или способа Майера [Гюнтер, 1934; Камке, 1966].

Общее решение системы (32), (33) определяет множество функций ρ, а значит, функций σ, соответствующих заданному вектору $\mathbf{H}$.

После нахождения σ из системы уравнений (32), (33) и, применяя уравнение (1), находим

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{H}. \tag{35}$$

Это соотношение определяет множество векторов $\mathbf{E}$ напряженности электрического поля, соответствующих произвольному, но подчиняющемуся условию (26), заданию вектора $\mathbf{H}$ напряженности магнитного поля.

Наконец, магнитная проницаемость μ среды определяется из уравнения (3) уже изложенным ранее методом. Достаточность условия (26) доказана.

Заметим, что в случае немагнитных горных пород к условию (26) следует добавить условие $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$.

Следующий пример иллюстрирует нахождение аналитических решений уравнений Максвелла по заданному вектору **H**. Так же, как и в предыдущем примере, рассмотрим ограниченную замкнутую односвязную область V, расположенную в октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Пусть напряженность **H** магнитного поля задана выражением

$$\mathbf{H} = -\gamma\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}\ \bar{z}^{\alpha/\gamma}}\mathbf{i} + \alpha\frac{\bar{y}^2}{\bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}}\mathbf{k}, \tag{36}$$

где $\alpha = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$ (А/м). Определим из уравнений (1)—(3) параметры среды σ, μ и вектор $\mathbf{E}$.

Убедимся, прежде всего, что выполнен критерий (26) существования решения этой задачи. Для этого вычислим векторы $\mathbf{J} = \operatorname{rot}\mathbf{H}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{J} = \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{H}$:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\tilde{d}}\cdot\frac{1}{\bar{z}^{\alpha/\gamma}}\left(2\alpha\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\mathbf{i} + \alpha\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}\ \bar{z}}\mathbf{j} + 2\gamma\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\mathbf{k}\right),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{J} = \frac{1}{\tilde{d}^2}\cdot\frac{1}{\bar{z}^{\alpha/\gamma}}\left\{\left[\frac{2\gamma}{\bar{x}} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma}\cdot\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}\ \bar{z}^2}\right]\mathbf{i} + \right. \tag{37}$$

$$\left. + \left[2\gamma\frac{\bar{y}}{\bar{x}^2} - \frac{2\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma}\frac{\bar{y}}{\bar{z}^2}\right]\mathbf{j} - \frac{\alpha}{\bar{z}}\left(2 + \frac{\bar{y}^2}{\bar{x}^2}\right)\mathbf{k}\right\}.$$

Легко проверить, что $(\mathbf{J}, \operatorname{rot}\mathbf{J}) = 0$, т.е. условие (26) выполнено.

Так как в области V компонента j_z вектора $\mathbf{J}$ не равна нулю, то для нахождения скалярной функции $\rho = 1/\sigma$ воспользуемся якобиевой системой уравнений (32), (33), которая в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial\bar{y}} - \frac{\alpha}{2\gamma}\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}} + \left[\frac{1}{\bar{y}} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{2\gamma^2}\cdot\frac{\bar{y}}{\bar{z}^2}\right]\rho = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\bar{x}} - \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\bar{x}}{\bar{z}}\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}} + \left[\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma^2}\frac{\bar{x}}{\bar{z}^2} - \frac{1}{\bar{x}}\right]\rho = 0. \tag{39}$$

Общий интеграл этой системы будем искать, применяя метод Якоби. Известно [Гюнтер, 1934; Камке, 1966], что задачу нахождения общего решения системы уравнений (38), (39) можно свести к эквивалентной задаче — нахождению общего решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial\bar{y}} - \frac{\alpha}{2\gamma}\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\frac{\partial U}{\partial\bar{z}} - \left[\frac{1}{\bar{y}} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{2\gamma^2}\cdot\frac{\bar{y}}{\bar{z}^2}\right]\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial U}{\partial\bar{x}} - \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\bar{x}}{\bar{z}}\frac{\partial U}{\partial\bar{z}} - \left[\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma^2}\frac{\bar{x}}{\bar{z}^2} - \frac{1}{\bar{x}}\right]\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} = 0, \tag{41}$$

где $U = U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho)$ — функция независимых переменных $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho$, и последующего решения уравнения

$$U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho) = 0. \tag{42}$$

В соответствии с методом Якоби найдем вначале независимые первые интегралы характеристической системы

$$\frac{d\bar{x}}{1} = \frac{d\bar{y}}{0} = -\frac{d\bar{z}}{\dfrac{\alpha}{\gamma} \cdot \dfrac{\bar{x}}{\bar{z}}} = \frac{d\rho}{\left[\dfrac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma^2} \dfrac{\bar{x}}{\bar{z}^2} - \dfrac{1}{\bar{x}}\right]\rho},$$

соответствующей уравнению (41). Очевидно, что ее интегралами будут

$$C_1 = \bar{y}, \ C_2 = \bar{x}^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2, \ C_3 = \frac{\rho}{\bar{x} \ \bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}}.$$

Правые части независимых первых интегралов определяют функции

$$y_2 = \bar{y}, \ y_3 = \bar{x}^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2, \ y_4 = \frac{\rho}{\bar{x} \ \bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}}.$$

Введем новые независимые переменные $y_1 = x$, y_2, y_3, y_4. Тогда уравнения (40), (41) для функции $U = \tilde{U}(y_1, y_2, y_3, y_4,)$ примут вид

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_3} - \frac{y_4}{y_2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_4} = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_1} = 0.$$

Из второго уравнения этой системы следует, что функция $\tilde{U}$ не зависит от переменной y_1. Составим характеристическую систему для первого уравнения:

$$\frac{dy_2}{1} = -\frac{dy_3}{y_2} = -\frac{dy_4}{\dfrac{y_4}{y_2}}.$$

Независимыми первыми интеграла этой системы являются $C_1 = y_2 y_4$, $C_2 = \dfrac{y_2^2}{2} + y_3$, и, следовательно, общий интеграл системы уравнений (40), (41) можно записать в виде

$$U = \Phi\left(y_2 y_4, \frac{y_2^2}{2} + y_3\right) = \Phi\left(\frac{\bar{y} \ \rho}{\bar{x} \ \bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}}, \frac{\bar{y}^2}{2} + \bar{x}^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2\right),$$

где $\Phi(u, v)$ — произвольная дифференцируемая функция двух независимых аргументов u и v.

Удовлетворяя функцию U уравнению (42), находим общий интеграл системы уравнений (38), (39):

$$\Phi\left(\frac{\bar{y} \ \rho}{\bar{x} \ \bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}}, \frac{\bar{y}^2}{2} + \bar{x}^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2\right) = 0.$$

В силу независимости аргументов функции Φ запишем

$$\rho = \lambda \frac{\bar{x} \ \bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}}{\bar{y}} \tilde{\Phi}\left(\frac{\bar{y}^2}{2} + \bar{x}^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2\right),$$

где $\tilde{\Phi}$ — произвольная безразмерная дифференцируемая функция одного аргумента; λ — постоянная (Ом·м). Вспоминая, что $\rho = 1/\sigma$, находим электропроводность среды

$$\sigma = \frac{\bar{y}}{\lambda\bar{x} \ \bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma} \ \tilde{\Phi}\left(\dfrac{\bar{y}^2}{2} + \bar{x}^2 + \dfrac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2\right)}. \tag{43}$$

Для рассмотрения пассивных сред, удовлетворяющих условию (4), следует в формуле (43) положить $\lambda > 0$ и выбрать положительную функцию $\tilde{\Phi}$.

Применяя формулы (37), (43), находим напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = \frac{\lambda}{\tilde{d}}\tilde{\Phi}\left(\frac{\bar{y}^2}{2} + \bar{x}^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2\right)\cdot\left(2\alpha\bar{x}\mathbf{i} + \alpha\bar{y}\mathbf{j} + 2\gamma\bar{z}\mathbf{k}\right). \tag{44}$$

Нетрудно проверить, что $\mathbf{E}$ — потенциальный вектор.

Из уравнения (3) найдем магнитную проницаемость μ. Записывая уравнение (3) в координатной форме и применяя формулу (36), получим уравнение

$$-\gamma\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}\ \ \bar{z}^{\alpha/\gamma}}\frac{\partial\mu}{\partial\bar{x}} + \alpha\frac{\bar{y}^2}{\bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}}\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}} = -\frac{\bar{y}^2}{\bar{z}^{\alpha/\gamma}}\left(\gamma\frac{1}{\bar{x}^2} - \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma}\frac{1}{\bar{z}^2}\right)\mu. \tag{45}$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$-\frac{d\bar{x}}{\gamma\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}\ \ \bar{z}^{\alpha/\gamma}}} = \frac{d\bar{y}}{0} = \frac{d\bar{z}}{\alpha\frac{\bar{y}^2}{\bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}}} = -\frac{d\mu}{\frac{\bar{y}^2}{\bar{z}^{\alpha/\gamma}}\left(\gamma\frac{1}{\bar{x}^2} - \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma}\frac{1}{\bar{z}^2}\right)\mu}.$$

Независимыми первыми интегралами характеристической системы являются

$$C_1 = \frac{\mu}{\bar{x}\ \ \bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}},\ C_2 = \bar{y},\ C_3 = \bar{x}^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2,$$

поэтому для общего интеграла уравнения (45) справедливо выражение

$$\mu = \delta\ \bar{x}\ \ \bar{z}^{(\alpha+\gamma)/\gamma}\Phi^*\left(\bar{y}, \bar{x}^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\bar{z}^2\right), \tag{46}$$

где $\Phi^*(u,v)$ — произвольная безразмерная функция двух аргументов; δ — постоянная (Гн/м).

Таким образом, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, определяемые в области V соответственно выражениями (44) и (36), являются аналитическими решениями уравнений (1)—(3) для трехмерной модели изотропной среды с электропроводностью σ и магнитная проницаемость μ, распределенными в области V по законам (43) и (46).

Изложенный метод нахождения аналитических решений уравнений Максвелла может быть обобщен на случай переменных электромагнитных полей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Эвристический метод отыскания аналитических решений однородных уравнений Максвелла для постоянного тока может применяться в двух вариантах. В первом варианте в области V задается произвольный вектор $\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi$, затем определяются функции σ, μ и $\mathbf{H}$. Во втором — задается вектор $\mathbf{H}$, удовлетворяющий в области V условию (26), после чего находятся σ, μ и вектор $\mathbf{E}$. В обоих вариантах сформированная система функций $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \sigma, \mu\}$ обращает уравнения (1)—(3) в тождества.

2. Оба варианта метода приводят к неединственному определению электропроводности σ и магнитной проницаемости μ. Однако такая неоднозначность облегчает выбор параметров среды σ и μ, удовлетворяющих в области V условию физической реализуемости.

3. Первый вариант имеет «стартовое» преимущество по сравнению со вторым, так как задание потенциального вектора $\mathbf{E}$ несравненно проще задания вектора $\mathbf{H}$, подчиняющегося условию (26). Более того, для нахождения множества таких векторов $\mathbf{H}$ можно применить первый вариант рассмотренного метода.

Работа выполнена благодаря поддержке РФФИ (грант 10-05-00753-а).

ЛИТЕРАТУРА

Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л., М., ОНТИ, 1934, 360 с.

Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М., Физматлит, 2003, 416 с.

Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., Наука, 1966, 260 с.

Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Наука, 1965, 424 с.

Куренский М.К. Дифференциальные уравнения. Кн. 2. Дифференциальные уравнения с частными производными. Л., Артиллерийская академия РККА им. Дзержинского, 1934, 330 с.

Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. М., Физматгиз, 1978, 544 с.

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Наука, 1969, 424 с.

Рекомендована к печати 23 апреля 2012 г.
М.И. Эповым

Поступила в редакцию 6 мая 2010 г.,
после доработки — 18 января 2012 г.