

ланных предположений и дает возможность проведения оценок падения плотности в молекулярном пучке из-за газового облака перед скиммером с помощью формулы (2).

Таким образом, установлено, что существуют условия, при которых наружное скиммерное взаимодействие не искажает нормированную функцию распределения скоростей молекул набегающего потока. К этим условиям относятся малый телесный угол детектора и среднее число столкновений молекулы набегающего потока с рассеивающим газом $Z_{AB} \ll 1$. Полученные результаты показывают, что при измерениях функций распределения нет необходимости в высоких требованиях к качеству изготовления передней кромки и наружной поверхности скиммера. Обнаруженные ранее [3] искажения функции распределения при формировании молекулярного пучка с помощью скиммера обусловлены главным образом процессами, происходящими вниз по потоку за входным сечением скиммера, т. е. внутренним скиммерным взаимодействием.

Поступила 12 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Kantrowitz A., Grey J. High intensity source for the molecular beam. Pt 1. Theoretical.—«Rev. Scient. Instrum.», 1951, vol. 22, N 5, p. 328.
2. Bossel U. On the optimization of skimmer geometries.— «Entropie», 1971, N 42, p.12.
3. Anderson J. B. Molecular beams from nozzle sources.— In: Molecular Beams and Low-Density Gas Dynamics. Ed. by P. P. Wegener. N. Y., 1974, p. 1.
4. Bossel U. Skimmer interaction: transition from a «shock beam» to a supersonic nozzle beam.— «Entropie», 1969, N 30, p. 11.
5. French J. B., McMichael G. E. Progress in developing high energy nozzle beams.— In: Rarefied Gas Dynamics. 5th International Symposium. Vol. 2. 1967, p. 1385.
6. Зарвин А. Е., Шарафутдинов Р. Г. Генератор молекулярного пучка для исследований потоков разреженного газа.— В кн.: Динамика разреженных газов. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1976.
7. Бочкарев А. А., Косинов В. А., Ребров А. К., Шарафутдинов Р. Г. Измерение параметров газового потока с помощью электронного пучка.— В кн.: Экспериментальные методы в динамике разреженных газов. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1974.
8. Зарвин А. Е., Шарафутдинов Р. Г. Измерение параметров молекулярного пучка в присутствии остаточного газа.— В кн.: Динамика разреженных газов. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1976.
9. Дэшман С. Научные основы вакуумной техники. М., «Мир», 1964.
10. Зарвин А. Е., Шарафутдинов Р. Г. Влияние газа окружающего пространства на функцию распределения скоростей молекул в молекулярном пучке.— ПМТФ, 1976, № 4.

УДК 532.529

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗОПЫЛЕВОЙ СМЕСИ

В. В. Жолобов, Л. Г. Жолобова

(Томск)

1. Уравнения одномерного нестационарного движения газопылевой смеси [1] запишем в следующей форме:

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} v_1 - \frac{\partial}{\partial \xi} u_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
v_1 \frac{\partial}{\partial t} v_2 + (u_2 - u_1) \frac{\partial}{\partial \xi} v_2 - v_2 \frac{\partial}{\partial \xi} u_2 &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \frac{\partial}{\partial \xi} p &= -v_1 f_{12}, \\
v_1 \frac{\partial}{\partial t} u_2 + (u_2 - u_1) \frac{\partial}{\partial \xi} u_2 &= v_2 v_1 f_{12}, \\
v_1 \frac{\partial}{\partial t} p + \gamma p \frac{\partial}{\partial t} v_1 &= (\gamma - 1) v_1 f_{12} (u_1 - u_2) - \beta_1 (T_1 - T_2), \\
v_1 \frac{\partial}{\partial t} T_2 + (u_2 - u_1) \frac{\partial}{\partial \xi} T_2 &= \beta_2 v_1 (T_1 - T_2), \\
v_1 d\xi &= dx - u_1 dt,
\end{aligned}$$

где u_i, v_i, T_i — скорости, удельные объемы и температуры фаз (индекс 1 относится к параметрам газа); p — давление; f_{12} — объемная сила, обусловленная взаимодействием между газом и частицами за счет сил трения; γ — отношение удельных теплоемкостей газа. Коэффициенты β_i имеют вид

$$\beta_1 = \frac{6(\gamma - 1)v_1}{\rho_2^0 d v_2}, \quad \beta_2 = \frac{6}{\rho_2^0 d c_2} \alpha, \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{d} \text{Nu},$$

где ρ_2^0 — истинная плотность второй фазы; d — диаметр частиц; λ_1 — коэффициент теплопроводности; Nu — число Нуссельта. Члены, отражающие силовое и тепловое взаимодействие между фазами, конкретизируются следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}
\text{Nu} &= 2 + 0,6 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3}, & \text{Pr} &= c_p \mu_1 / \lambda_1, \\
\text{Re} &= \frac{|u_1 - u_2| d}{\mu_1 v_1}, & f_{12} &= \frac{3}{4} \frac{c_d}{d} \frac{(u_1 - u_2) |u_1 - u_2|}{\rho_2^0 v_2 v_1},
\end{aligned}$$

где c_p, μ_1, c_d — удельная теплоемкость при постоянном давлении, динамическая вязкость газа, коэффициент лобового сопротивления сферических частиц. В дальнейшем применяется зависимость c_d от критерия Рейнольдса в виде [3]

$$c_d = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0,197 \text{Re}^{0,63} + 2,6 \cdot 10^{-4} \text{Re}^{1,38}).$$

Система (1.1) замыкается соотношениями

$$p v_1 = R T_1, \quad \rho_2^0 = \text{const}, \quad \mu_1 = \mu_1^0 (T_1 / T^0)^m,$$

где m — константа, зависящая от природы газа.

В системе (1.1) перейдем к безразмерным величинам по формулам

$$\begin{aligned}
(1.2) \quad \xi^* &= \xi v_1^0 / l^0, \quad p^* = p / \gamma p^0, \quad v_i^* = v_i / v_i^0, \quad u_i^* = u_i / a^0, \\
T_i^* &= T_i / T^0, \quad t^* = a^0 t / l^0, \quad a^* = a / a^0, \quad f_{12}^* = (l^0 / a^{02}) f_{12}, \\
a^{02} &= \gamma p^0 v_1^0, \quad \beta_1^* = \beta_1 l^0 / \gamma R a^0, \quad \beta_2^* = l^0 \beta_2 / a^0,
\end{aligned}$$

где верхним индексом нуль отмечены начальные параметры смеси; l^0 — характерный размер. Вид системы (1.1) при этом не изменится и в дальнейшем индекс звездочка будет опускаться.

Предполагая, что все искомые функции зависят от одной функции уровня [4], в качестве которой примем скорость газа, из первого и пред-

последнего уравнений системы (1.1) находим

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_1 = \frac{(\gamma - 1) f_{12} v_1 (u_1 - u_2) - \beta_1 (T_1 - T_2)}{v_1 \frac{dp}{du_1} + \gamma p \frac{dv_1}{du_1}},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \frac{dv_1}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Приравнявая смешанные производные, после несложных преобразований получим условие интегрируемости (1.3) в виде

$$(1.4) \quad dv_1/du_1 = \delta = \text{const.}$$

Подставляя (1.3) в остальные уравнения системы (1.1), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1.5) \quad v_1 \frac{dv_2}{du_1} + (u_2 - u_1) \frac{dv_1}{du_1} \frac{dv_2}{du_1} - v_2 \frac{du_2}{du_1} \frac{dv_1}{du_1} = 0;$$

$$(1.6) \quad v_2 + v_1 \frac{du_2}{du_1} \left[(u_2 - u_1) \frac{du_2}{du_1} + v_2 \frac{dp}{du_1} \right] = 0;$$

$$(1.7) \quad \frac{du_2}{du_1} = \frac{v_2 f_{12}}{\beta_2 (T_1 - T_2) du_1};$$

$$(1.8) \quad \left[v_1 \frac{dp}{du_1} + \gamma p \frac{dv_1}{du_1} \right] \frac{\beta_2 v_1 (T_1 - T_2)}{\left[v_1 + (u_2 - u_1) \frac{dv_1}{du_1} \right]} = \{ (\gamma - 1) f_{12} (u_1 - u_2) v_1 - \beta_1 (T_1 - T_2) \} \frac{dT_2}{du_1}.$$

Можно видеть, что система (1.4)–(1.8) имеет интегралы

$$(1.9) \quad v_1 = \delta u_1 + C_1, \quad v_2 = C_2 (\delta u_2 + C_1), \quad p = C_3 - \frac{4}{\delta} \left\{ u_1 + \frac{1}{C_2} u_2 \right\},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. С учетом (1.9) система (1.4)–(1.8) сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка

$$(1.10) \quad \frac{du_2}{du_1} = \frac{v_2 f_{12}}{\beta_2 (T_1 - T_2) du_1},$$

$$\frac{dT_2}{du_1} = \frac{\left(\delta \gamma p - \frac{4}{\delta} v_1 \right) (T_1 - T_2) \beta_2 v_1 (T_1 - T_2)}{(\delta u_2 + C_1) \{ f_{12} v_1 [(\gamma - 1)(u_1 - u_2) + v_1 / \delta v_2] - \beta_1 (T_1 - T_2) \}}.$$

Функция уровня определяется из (1.3) с учетом (1.4)

$$(1.11) \quad t + \delta \xi = \int_0^{u_1} \frac{\left(v_2 \frac{dp}{du_1} + \gamma p \frac{dv_1}{du_1} \right) du_1}{(\gamma - 1) f_{12} v_1 (u_1 - u_2) - \beta_1 (T_1 - T_2)} + C_4.$$

Таким образом, простая волна описывает автомодельное движение, определяемое группой переноса [5]. При численных расчетах использование переменной u_1 вместо $(t + \delta \xi)$ предпочтительней, поскольку промежуток интегрирования становится конечным.

2. Используем полученные соотношения для описания движения, возникающего перед поршнем, который вдвигается по определенному за-

кону в первоначально покоящуюся смесь. На линии $\xi = -(1/\delta)t$ зададим следующие условия:

$$(2.1) \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_1 = 1, \quad v_2 = v_2^0, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 1, \quad p = 1/\gamma.$$

Примем, что удар частиц о поверхность поршня является абсолютно неупругим, а выпавшие на поверхность поршня частицы образуют слой в состоянии плотной упаковки (пленку). Использование такой модели взаимодействия частиц с поверхностью поршня приводит к следующим граничным условиям на поверхности слоя:

$$\xi = \hat{0}, \quad x = x_+ + \Delta, \quad u_1 = u_+ + d\Delta/dt,$$

где x_+ , u_+ — координата и скорость поршня соответственно; Δ — толщина слоя (пленки), определяемая из дифференциального уравнения

$$(2.2) \quad \frac{d\Delta}{dt} = \frac{u_1 - u_2}{v_2 \rho_2^0 \varepsilon_2^*} \quad (\Delta = 0, \quad t = 0)$$

(ε_2^* — объемное содержание частиц в состоянии плотной упаковки). Давление в пленке распределяется по закону

$$p_+ = p + \Delta p - \varepsilon_2^* \rho_2^0 (\delta - x) \frac{\partial}{\partial t} u_+,$$

где Δp — локальное повышение давления, под которым подразумевается давление, производимое частицей на поверхность слоя при соударении [6], вычисляемое по формуле

$$\Delta p = \eta(u_1 - u_2)^2/v_2.$$

Учитывая (2.1), из (1.9) находим

$$(2.3) \quad C_1 = 1, \quad C_2 = v_2^0, \quad C_3 = 1/\gamma, \quad C_4 = 0.$$

Из условий кинематической совместности следует $\delta = -1$.

Таким образом, решение уравнений (1.10), (2.2) с начальными данными $u_2(0) = 0$, $T_2(0) = 1$, $\Delta(0) = 0$ и соотношения (1.9), (1.11), (2.3) описывают течение газопылевой смеси, возникающее перед поршнем,двигающимся по закону

$$(2.4) \quad t = \int_0^{u_1(v_+)} \frac{\left(v_1 \frac{dp}{du_1} + \gamma p \frac{dv_1}{du_1} \right) du_1}{(\gamma - 1) f_{12} v_1 (u_1 - u_2) - \beta_1 (T_1 - T_2)},$$

$$u_1 = u_+ + \frac{u_1 - u_2}{v_2 \rho_2^0 \varepsilon_2^*}$$

в первоначально покоящуюся смесь.

Отметим параметры течения, возникающего в равновесной смеси, перед поршнем,двигающимся по закону (2.4), индексом звездочка снизу. Равновесное течение запыленного газа описывается классическими уравнениями газовой динамики, но отношение удельных теплоемкостей γ заменяется некоторым эффективным его значением

$$\gamma_* = \frac{c_p + c_2/v_2^0}{c_v + c_2/v_2^0},$$

а под плотностью подразумевается суммарная плотность смеси [7]. Используя решение типа простой волны [4], удовлетворим граничному условию на поршне и начальным условиям (2.1) на линии $\xi = t/a$. В результате получим

$$(2.5) \quad p_* = \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{\gamma_* - 1}{2} a u_* \right\}^{2\gamma_*/(\gamma_* - 1)},$$

$$v_* = \frac{v_2^0}{1 + v_2^0} \left\{ 1 + \frac{\gamma_* - 1}{2} a u_* \right\}^{2/(1 - \gamma_*)},$$

$$t - a \left\{ 1 + \frac{\gamma_* - 1}{2} a u_* \right\}^{(\gamma_* + 1)/(1 - \gamma_*)} \xi = \Phi(u_*), \quad a = \sqrt{\frac{\gamma(1 + v_2^0)}{\gamma_* v_2^0}}.$$

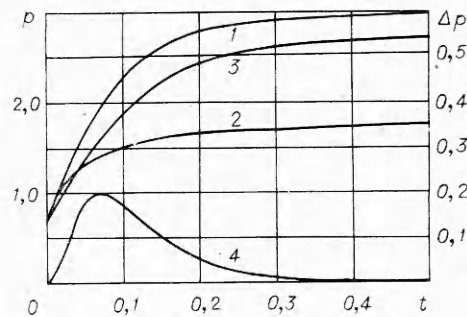
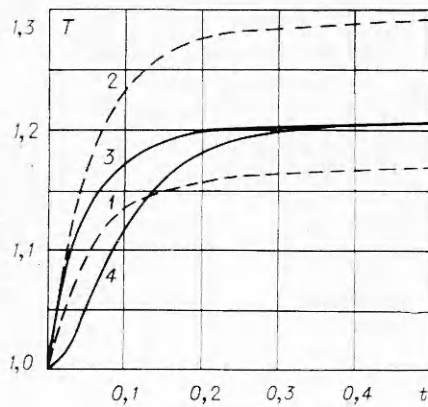
Функция $\Phi(u_*)$ определяется из (2.4), если положить $t = \Phi(u_*)$. В случае чистого газа при выборе безразмерных величин в виде (1.2) решение основной системы уравнений, удовлетворяющее граничному условию на поршне и начальным условиям (2.1) на линии $\xi = t$, имеет вид

$$(2.6) \quad p = \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} u \right\}^{2\gamma/(\gamma - 1)}, \quad v = \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} u \right\}^{2/(1 - \gamma)},$$

$$t - \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} u \right\}^{(\gamma + 1)/(1 - \gamma)} \xi = \Phi(u).$$

Численные расчеты проводились при $\Delta \equiv 0$ и следующих значениях термодинамических параметров фаз: $c_p = 1047,5$ Дж/кг·град; $c_2 = 800$ Дж/кг·град; $d = 10^{-5}$ м; $\lambda_1 = 0,05$ Дж/м·с·град; $\mu_1^0 = 1,86 \cdot 10^{-5}$ Н \times \times с/м²; $R = 287,29$ Дж/кг·град; $l^0 = 1$ м; $T_1^0 = T_2^0 = 300$ К; $p = 10^{-5}$ Н/м²; $\gamma = 1,4$; $m = 0,5$; $v_1^0/v_2^0 = 2$.

На фиг. 1, 2 приведено распределение температур и давлений на линии поршня соответственно. Кривые 1, 2 в дальнейшем соответствуют параметрам, рассчитанным по формулам (2.5), (2.6), 3 — параметрам газа, 4 — параметрам частиц. В рассматриваемом случае формулы (2.5) дают погрешность в определении температуры смеси, не превышающую 4%. Следует отметить, что решение (2.5), (2.6) справедливо до момента образования ударной волны, т. е. в области, ограниченной прямыми $\xi = 0$, $\xi = t/a$ (или $\xi = t$) и соответствующей характеристикой, проходящей через точку образования ударной волны.



Фиг. 1

Фиг. 2

3. При отсутствии динамической неравновесности ($u_1 = u_2$) условия (2.1) задаются по линии $\xi = \sqrt{1 + 1/v_2^0} t$. В этом случае получается известный результат работы [5]

$$p = \frac{1}{\gamma} + bu_1, \quad v_1 = 1 - bu_1, \quad v_2 = v_2^0 v_1,$$

$$T_2 = 1 + \frac{b^2(\gamma + 1)}{2\alpha} u_1^2, \quad \alpha = \frac{c_2(\gamma - 1)}{\gamma R v_2^0}, \quad b = \sqrt{1 + \frac{1}{v_2^0}}, \quad \Delta = 0,$$

$$u_1 = \frac{2\alpha(\gamma - 1)b}{\gamma(1 + 2\alpha) + 1} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1 + \gamma(1 + 2\alpha)}{2(\gamma + 1)} \beta_2 b(t - b\xi) \right] \right\}.$$

В предельном случае $c_2 = \infty$ ($\gamma_* = 1, T_2 = 1$) вместо (2.5) имеем

$$p_* = (1/\gamma) \exp au_*, \quad v_* = (1/v_2^0) \exp(-au_*),$$

$$t - a\xi \exp(-au_*) = \Phi(u_*).$$

Распределение температуры газа и давления в этом случае приведено на фиг. 3, 4.

При отсутствии тепловой неравновесности между фазами ($T_2 = T_1$) вместо первого уравнения (1.10) имеем

$$(3.1) \quad \frac{du_2}{du_1} = \frac{\gamma \delta C_2 C_3 - \gamma C_2 (u_1 + u_2/C_2) - (u_1 + C_1/\delta) C_2}{(\gamma - 1)(u_1 - u_2) + u_1 + C_1/\delta}.$$

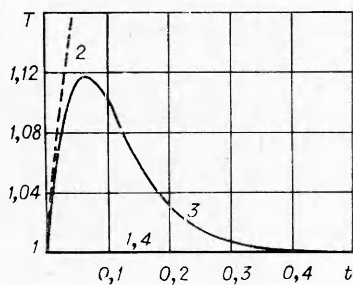
Учитывая (2.1), решение уравнения (3.1) запишем следующим образом:

$$u_2 = \frac{\{\gamma - [\gamma^2 + (\gamma^2 - 1)v_2^0]u_1\}}{\gamma^2 + (\gamma^2 - 1)v_2^0} \left\{ -\frac{\gamma}{\gamma + 1} + \right.$$

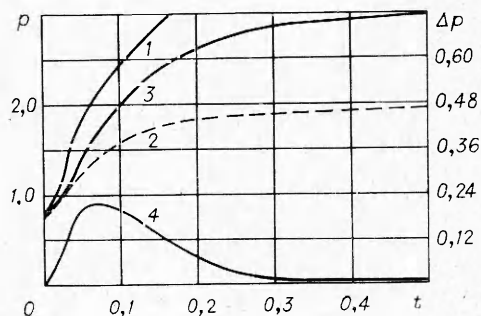
$$\left. + \sqrt{\frac{\gamma^2 + (\gamma^2 - 1)v_2^0}{(\gamma - 1)^2} + \frac{v_2^0(\gamma + 1) + 2\gamma w_0 - (\gamma - 1)v_2^0}{(\gamma - 1) \left[\frac{\gamma^2 + (\gamma^2 - 1)v_2^0}{\gamma} u_1 - 1 \right]^2}} \right\} - \frac{v_2^0(\gamma + 1)}{\gamma^2 + (\gamma^2 - 1)v_2^0},$$

где $w_0 = -v_2^0(\gamma + 1)/\gamma$.

В этом случае из (1.3), (2.2), (1.11), (2.4) получим решение ранее сформулированной задачи в квадратурах. На фиг. 5 приведен график коэффициента скольжения фаз $k = u_2/u_1$.



Ф и г. 3



Ф и г. 4

В случае $u_2 = 0$ вместо уравнений (1.6), (1.7) получим одно уравнение

$$1 - \frac{dp}{v_1 du_1} \frac{dv_1}{\gamma p du_1} \{(\gamma - 1) f_{12} u_1 v_1 - \beta_1 (T_1 - T_2)\} = -f_{12} v_1.$$

Решение прежней задачи сводится к совместному интегрированию уравнения (2.2) и уравнений

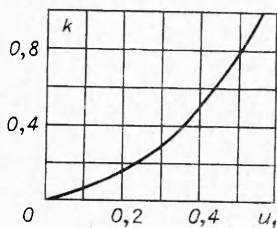
$$\frac{dp}{du_1} = 1 + \frac{f_{12}}{(T_1 - T_2)\beta_2} \frac{dT_2}{du_1},$$

$$\frac{dT_2}{du_1} = \frac{\beta_2(\gamma p + u_1 - 1)(T_1 - T_2)(1 - u_1)}{\beta_1(T_1 - T_2) + (1 - u_1)(1 - \gamma u_1)f_{12}}$$

с начальными условиями

$$p(0) = 1/\gamma, \quad T_2(0) = 1, \quad \Delta(0) = 0.$$

4. В двухскоростной и двухтемпературной среде в отличие от односкоростной одготемпературной среды наблюдается расслоение характеристик и линий уровня, что характерно для уравнений с правыми частями.



Ф и г. 5

В классической газовой динамике, а также при неравновесных течениях [8] точкой возникновения ударной волны является точка пересечения ближайших характеристик одного семейства. При этом положение первой точки пересечения на начальной характеристике определяется параметрами газа и ускорением поршня в начальный момент. Дифференциальное уравнение семейства характеристик, к которому принадлежит начальная характеристика $\xi = -\delta t$, можно записать в виде

$$(4.1) \quad dz/dt = 1 + \sqrt{\gamma p(u_1(z))/v_1(u_1(z))}, \quad z = \xi + \delta t.$$

В случае отсутствия одного из релаксационных процессов функция, стоящая в правой части (4.1), удовлетворяет условиям теоремы Пикара в области $0 < t, 0 \leq z \leq t$. Уравнение (4.1) имеет в этой области единственное решение, что обеспечивает отсутствие в области течения ударных волн.

Переход к инерциальной системе координат, движущейся относительно лабораторной системы со скоростью $U = -1/\delta$, приводит основную систему уравнений в случае простой волны к стационарному виду. Это позволяет использовать результат работы [9], где показано, что при $U = -1$ соответствующие течения описывают движение смеси типа «непрерывной ударной волны». Таким образом, рассматриваемые течения являются примером неразрывающихся течений сжатия, возможность существования которых показана в работах [8, 10].

Соотношения (1.9)—(1.11) представляют особый интерес с точки зрения апробации численных методов расчета нестационарных движений газозвеси.

Поступила 1 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Marble Frank E. Dynamics of dusty gases.— In: Annual Rev. Fluid Mech. Vol. 2. Palo Alto, Calif., 1970. Рус. пер. Марбол Ф. Динамика запыленных газов.— Сб. пер. Механика, № 6, 1974.

2. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Некоторые результаты численного исследования нестационарных волн в газовзвесах.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1976, № 5.
3. Лонгвелл Д. П. Горение жидких топлив.— В кн.: Процессы горения. М., Физматгиз, 1961.
4. Комаровский Л. В. Задача Лагранжа с подводом массы импульса и энергии.— В кн.: Докл. 3-й Сибирск. конф. по матем. и механике. Томск, изд. Томск. ун-та, 1964.
5. Ткаленко Р. А. Об автомодельных движениях двухфазных сред.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 3.
6. Салтанов Г. А. Сверхзвуковые двухфазные течения. М., «Выш. школа», 1972.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
8. Крайко А. И. О возникновении ударных волн при неравновесных течениях.— ПММ, 1967, т. 31.
9. Нигматулин Р. И. К вопросу о волнах уплотнения в двухфазных средах.— «Вестн. Моск. ун-та. Матем. и механика», 1969, № 4.
10. Нигматулин Р. И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 5.

УДК 532.593

**ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ,
ГЕНЕРИРУЕМЫЕ ЛОКАЛЬНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ
В ЛИНЕЙНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ
КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**

И. В. Стурова

(Новосибирск)

1. Для исследования внутренних волн, вызванных удлиненным осесимметричным телом, движущимся горизонтально с постоянной скоростью U в стратифицированной жидкости, рассмотрена стационарная задача об обтекании точечных источника и стока равной мощности m , помещенных под свободной поверхностью, равномерным потоком тяжелой жидкости конечной глубины. Метод решения данной задачи аналогичен [1], где исследован случай безграничной жидкости.

Источник и сток расположены на глубине h от невозмущенной свободной поверхности $y = 0$ горизонтального слоя жидкости $-\infty < x, z < \infty, -H \leq y \leq 0$. Отрезок прямой, соединяющий особенности, имеет длину $2a$ и параллелен оси x , совпадающей с направлением вектора скорости жидкости далеко вверх по потоку. В невозмущенном состоянии распределение плотности жидкости имеет вид

$$(1.1) \quad \rho_0(y) = \rho_s(1 - \alpha y), \quad -H \leq y \leq 0, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Считается, что при достаточно большом погружении и слабой стратификации обтекание такой комбинации источника и стока эквивалентно обтеканию замкнутого осесимметричного тела (аналогично безграничной однородной жидкости). Радиус миделева сечения R , удлинение тела d и скорость основного потока U однозначно определяют величины a и m [1].

В линейной постановке с использованием приближения Буссинеска уравнения движения имеют вид

$$(1.2) \quad \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = m[\delta(x + a) - \delta(x - a)]\delta(y + h)\delta(z),$$