

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

А. И. Старшинов

(Ленинград)

При выходе ударной волны из трубы, расположенной в полуограниченном объеме, возникает система волн между концом трубы и дном объема, а также в зазоре между трубой и боковыми стенками объема. Распространение ударной волны после выхода из трубы до момента ее касания боковых стенок объема рассмотрено в работе [1]. В настоящей статье рассматривается движение газа в полуограниченном объеме после касания прошедшей ударной волной боковых стенок объема.

В § 1 приводится построение физической модели движения газа до момента прихода первичной ударной волны к дну объема. В § 2 находятся соотношения, позволяющие определить параметры потока в полуограниченном объеме до момента прихода первичной ударной волны к дну объема. В § 3 рассматривается движение отраженной ударной волны между трубой и боковыми стенками объема.

Обозначения

$\bar{N} = N\bar{a}_1$ — скорость распространения ударной волны;	$\bar{a} = a\bar{a}_1$ — скорость распространения звука;
$\bar{u} = u\bar{a}_1$ — скорость частиц газа;	$k = \frac{c_p}{c_v}$ — показатель адиабаты;
$\bar{\rho} = \rho\rho_1$ — плотность газа;	$t = a_1 t/\bar{d}$ — безразмерное время;
$\bar{p} = p/p_1$ — давление;	$F = \bar{F}/\bar{d}^2$ — площадь;
$M = \bar{u}/\bar{a}$ — число Маха;	$V = \bar{V}/\bar{d}^3$ — объем;
$\lambda = \bar{u}/\bar{a}_*$ — приведенная скорость;	$\bar{d}$ — внутренний диаметр трубы [м];
	$t$ — время [сек].

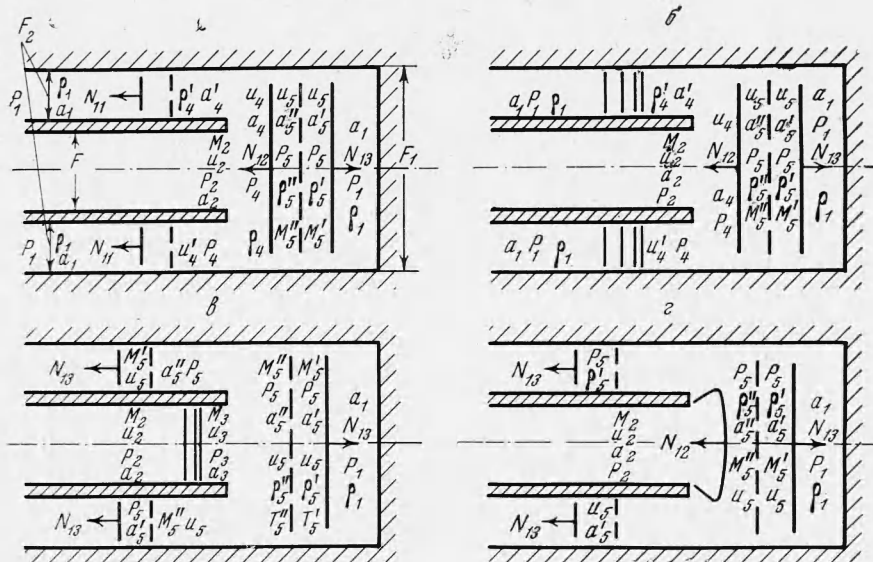
Индексом 1 обозначены параметры газа в объеме до выхода ударной волны из трубы, индексом 2 обозначены параметры газа за фронтом ударной волны в трубе, чертой сверху обозначены размерные параметры, индексом 0 обозначены параметры адиабатически заторможенного газа, \* обозначены критические параметры потока.

1. В полуограниченном объеме (фиг. 1) расположена труба. По трубе распространяется ударная волна со скоростью  $N_1$ , за фронтом ударной волны параметры газа постоянны.

В зависимости от параметров потока за фронтом ударной волны в трубе и от площадей  $F, F_1, F_2$  будут иметь место следующие случаи формирования потока.

(а) Скорость спутного потока за фронтом ударной волны в трубе  $M_2 \geq 1$ , а значение площадей  $F, F_1, F_2$  таково, что в результате расширения газа за прошедшей ударной волной давление в плоскости конца трубы  $p_4 > 1$ . Предполагаем, что давление по обе стороны от плоскости конца трубы одинаково, разделение потока, выходящего из трубы налево, в зазор и направо происходит в плоскости конца трубы. Следует отметить, что предположение о равенстве давления по обе стороны от плоскости среза конца трубы может быть заменено каким-либо другим представлением о характере течения в этой зоне. Принятое предположение оправдывается хорошим совпадением расчетных значений параметров потока с экспериментом, который был проведен в газодинамической лаборатории ЛГУ. Так как  $p_4 > 1$ , то в зазоре между трубой и боковыми стенками объема будет распространяться ударная волна со скоростью  $N_{11}$  (фиг. 1, а). Ввиду того что скорость потока на выходе из трубы сверхзвуковая, при расширении потока в объеме скорость его увеличится, а давление уменьшится. С другой стороны, при увеличении площади ударной волны от значения  $F$  до значения  $F_1$  после выхода ее из трубы давление и скорость газа на фронте ударной волны уменьшатся.

Для устранения возникшего противоречия необходимо сделать предположение о наличии вторичной ударной волны между концом трубы и прошедшей из трубы первичной ударной волной. Вторичная ударная волна будет распространяться относительно частиц газа, вышедших из трубы, навстречу их движению. Поток газа, проходя через вторичную ударную волну, будет подтормаживаться. Газ в области между первичной и вторичной ударными волнами разделен контактной поверхностью (стационарный разрыв). Слева от контактной поверхности будет находиться газ, вышедший из трубы, справа — газ, находившийся в объеме.



Фиг. 1. Схема течения газа в полуограниченном объеме при различных значениях интенсивности ударной волны в трубе и различных значениях площадей:

а — при  $M_2 \geq 1$ ,  $p_4 > 1$ ; б — при  $M_2 \geq 1$ ,  $p_4 < 1$ ;  
в — при  $M_3 < 1$ ,  $p_5 > 1$ ; г — при  $M_4 > N_{12}/a_4$

(б) Скорость слутного потока за фронтом ударной волны в трубе  $M_2 \geq 1$ , а значение площадей  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  таково, что в результате расширения газа за прошедшей ударной волной давление в плоскости конца трубы  $p_4 < 1$ . Предполагаем, как делалось выше, что давление по обе стороны от плоскости конца трубы одинаково, смешивание потока из зазора и из трубы происходит в плоскости конца трубы. В зазоре будет распространяться волна разрежения. Схема течения газа приведена на фиг. 1, б.

Рассуждения, аналогичные проведенным в (а), показывают, что в области между концом трубы и дном объема будут распространяться первичная ударная волна, контактная поверхность и вторичная ударная волна.

(в) Скорость слутного потока за фронтом ударной волны в трубе  $M_2 < 1$ , а значение площадей  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  таково, что в прошедшей в трубу волне разрежения газ ускоряется до значения  $M_3 = 1$ . В результате расширения газа за прошедшей в объем ударной волной давление в плоскости конца трубы, как и в рассмотренных случаях (а) и (б), может быть либо  $p_4 > 1$ , либо  $p_4 < 1$ . При этом характер течения в полуограниченном объеме будет соответственно такой же, как в (а) и (б).

В (а), (б) и (в) рассматривались такие значения исходных данных  $N_1$ ,  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ , когда скорость потока в объеме перед фронтом вторичной ударной волны была выше скорости распространения вторичной ударной

волны. Вторичная ударная волна относительно стенок объема перемещалась вниз по потоку.

(г) При увеличении площади  $F_1$  скорость потока перед вторичной ударной волной будет расти медленнее, чем скорость вторичной ударной волны. Наступит момент, когда скорость потока будет равна скорости вторичной ударной волны и последняя относительно стенок объема перемещаться не будет. При дальнейшем увеличении площади  $F_1$  произойдет отрыв границы вторичной ударной волны от боковых стенок объема; эта волна расположится в непосредственной близости от конца трубы. В зазоре будет распространяться ударная волна такой же интенсивности, как и первичная ударная волна. Схема течения представлена на фиг. 1, з.

(д) Скорость спутного потока за фронтом ударной волны в трубе  $M_2 < 1$ , а значение площадей  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  таково, что в прошедшей в трубу волне разрежения газ ускоряется до значения  $M_3 < 1$ . В этом случае  $p_4 > 1$ , вторичная ударная волна отсутствует, в зазоре распространяется ударная волна такой же интенсивности, как и первичная ударная волна в области между концом трубы и дном объема (схема течения на фиг. 1б).

2. (а) Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для контрольных поверхностей, расположенных на срезе открытого конца трубы, в зазоре между концом трубы и ударной волной, между вторичной ударной волной и концом трубы, имеют вид

$$u_2 \rho_2 F = u_4 \rho_4 F_1 + u_4' \rho_4' F_2,$$

$$\rho_2 u_2^2 F + p_2 F = \rho_4 u_4^2 F_1 + \rho_4' u_4'^2 F_2 + p_4 F_2 + p_4 F_1 \quad (2.1)$$

$$\rho_2 u_2 F \left( \frac{1}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \right) = \rho_4 u_4 F_1 \left( \frac{1}{k-1} \frac{p_4}{\rho_4} + \frac{u_4^2}{2} \right) + \rho_4' u_4' F_2 \left( \frac{1}{k-1} \frac{p_4}{\rho_4'} + \frac{u_4'^2}{2} \right)$$

Предполагается, что газ перед вторичной ударной волной расширяется изэнтропически. Используемые обозначения см. на фиг. 1а. Из условия динамической совместности на ударной волне в зазоре напомним соотношения, выражающие  $u_4'$  и  $\rho_4'$  через  $p_4$

$$u_4' = (p_4 - 1) f, \quad \rho_4' = \frac{\kappa p_4 + 1}{\kappa + p_4} \quad f = \frac{1}{k} \left( \frac{k+1}{2k} p_4 + \frac{k-1}{2k} \right)^{-1/2}, \quad \kappa = \frac{k+1}{k-1} \quad (2.2)$$

Решая систему уравнений (2.1), (2.2) относительно  $p_4$ , получим

$$q e = F_2 f (p_4 - 1) \left( \frac{p_4}{k-1} + b \right) + \frac{[m - (F_1 - F_2) p_4 - 2F_2 b] F_1}{q - F_2 c f} \times \\ \times \left\{ \frac{p_4}{k-1} + \frac{1}{2F_1} [m - (F_1 - F_2) p_4 - 2F_2 b] \right\} \quad (2.3)$$

$$q = \rho_2 u_2 F, \quad e = \frac{1}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2}, \quad m = \rho_2 u_2^2 F + p_2 F$$

$$b = \frac{(p_4 - 1)^2}{k [(k+1) + (k-1) p_4]}, \quad c = \frac{(p_4 - 1) [(k+1) p_4 + (k-1)]}{[(k+1) + (k-1) p_4]}$$

$$u_4 = \frac{m - (F_1 - F_2) p_4 - 2F_2 b}{q - F_2 c f}, \quad \rho_4 = \frac{(q - F_2 c f)^2}{F_1 [m - (F_1 - F_2) p_4 - 2F_2 b]}$$

Приведенные соотношения позволяют определить параметры потока в области между ударной волной в зазоре и вторичной ударной волной.

Используя условия динамической совместности на первичной и вторичной ударных волнах, получим

$$\begin{aligned} [(\gamma + 1) N_{13}^2 - \gamma] &= p_4 [(\gamma + 1) N_{12}^2 / a_4^2 - \gamma] \\ 2(N_{13} - 1 / N_{13}) / (k + 1) &= u_4 - 2(N_{12} - a_4^2 / N_{12}) / (k + 1) \\ \gamma &= (k-1) / (k+1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решая систему уравнений (2.4), определим значения  $N_{13}$  и  $N_{12}$ . Остальные параметры потока в области между первичной и вторичной ударными волнами могут быть найдены из условий динамической совместности.

(б) Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для контрольных поверхностей, расположенных на срезе открытого конца трубы, в зазоре между волной разрежения и концом трубы, между вторичной ударной волной и концом трубы, имеют вид (2.5)

$$u_2 \rho_2 F = u_4 \rho_4 F_1 - u_4' \rho_4' F_2, \quad \rho_2 u_2^2 F + p_2 F = \rho_4 u_4^2 F_1 - \rho_4' u_4'^2 F_2 + p_4 F_1 - p_4' F_2$$

$$\rho_2 u_2 F \left( \frac{1}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \right) = \rho_4 u_4 F_1 \left( \frac{1}{k-1} \frac{p_4}{\rho_4} + \frac{u_4^2}{2} \right) - \rho_4' u_4' F_2 \left( \frac{1}{k-1} \frac{p_4'}{\rho_4'} + \frac{u_4'^2}{2} \right)$$

Предполагается, что газ до вторичной ударной волны расширяется изэнтропически. Используемые обозначения приведены на фиг. 1б. На волне разрежения имеем

$$u_4' = \frac{2}{k-1} (1 - p_4^{1/2(k-1)/k}), \quad \rho_4' = p_4^{1/k} \quad (2.6)$$

Решая уравнения (2.5) и (2.6) относительно  $p_4$ , получим

$$qe = \frac{[m + F_2 h - (F_1 - F_2) p_4] F_1}{q + F_2 n} \left\{ \frac{p_4}{k-1} - \frac{1}{2F_1} [m + F_2 h - (F_1 - F_2) p_4] \right\} -$$

$$- F_2 n p_4^{-1/k} \left( \frac{p_4}{k-1} + \frac{F_2 k}{2} \right) \quad (2.7)$$

$$h = \frac{4}{(k-1)^2} (1 - p_4^{1/2(k-1)/k})^2 p_4^{1/k}, \quad n = \frac{2}{k-1} (1 - p_4^{1/2(k-1)/k}) p_4^{1/k}$$

$$u_4 = \frac{m + F_2 h - (F_1 - F_2) p_4}{q + F_2 n}, \quad \rho_4 = \frac{(q + F_2 n)^2}{F_1 [m + F_2 h - (F_1 - F_2) p_4]}$$

Приведенные соотношения совместно с уравнениями (2.4) позволяют определить все параметры потока в области между первичной ударной волной и волной разрежения.

В случае (в), используя условие  $M_3 = 1$ , параметры потока на выходе из трубы могут быть найдены по известным соотношениям на волне разрежения. Вид уравнений, определяющих параметры потока в объеме, будет таким же, как в случаях (а) и (б). Вместо начальных параметров потока, обозначавшихся в (а) и (б) индексом 2, вводятся начальные параметры, обозначаемые индексом 3, которые находятся на выходе из волны разрежения при условии  $M_3 = 1$ .

(г) Выражая значения членов очевидного тождества

$$\rho_5 = \frac{p_5}{p_{05}} \frac{p_{05}^*}{p_{04}} \frac{p_{02}}{p_2} p_2$$

через  $\lambda$  и  $N_{13}$ , получим

$$[(\gamma + 1) N_{13}^2 - \gamma] = \left( \frac{1 - \gamma \lambda_5^2}{1 - \gamma \lambda_2^2} \right)^{k/(k-1)} \left( \frac{1 - \gamma \lambda_4^2}{1 - \gamma / \lambda_4^2} \right)^{1/(k-1)} [(\gamma + 1) N_{12}^2 - \gamma] \lambda_4^2 \quad (2.8)$$

обозначения — согласно схеме течения, см. фиг. 1г.

Выражая в тождестве  $u_5 = \lambda_5'' a_{*5}''$  значения  $u_5$  из условия динамической совместности, а  $a_{*5}''$  через  $a_2$  и  $\lambda_2$ , получим

$$\frac{2}{k+1} \left( N_{13} - \frac{1}{N_{13}} \right) = \lambda_5'' \left( \frac{2}{k-1} \right)^{1/2} \frac{a_2}{(1 - \lambda_2^2 \gamma)^{1/2}} \quad (2.9)$$

Предполагается, что поток за вторичной ударной волной перед контактной поверхностью расширяется изэнтропически до площади, равной суммарной величине проходных сечений  $(F_1 + F_2)$ . Обозначая через

$F_*$  площадь поверхности вторичной ударной волны, из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{F}{F_*} = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \left( \frac{1 - \lambda_4^2 \gamma}{1 - \lambda_2^2 \gamma} \right)^{1/(k-1)}, \quad \frac{F_*}{F_1 + F_2} = \lambda_5'' \lambda_4 \left( \frac{1 - \lambda_5''^2 \gamma}{1 - \gamma / \lambda_4^2} \right)^{1/(k-1)}$$

Отсюда]

$$\frac{F}{F_1 + F_2} = \frac{\lambda_4^2 \lambda_5''}{\lambda_2} \left[ \frac{(1 - \lambda_4^2 \gamma)(1 - \lambda_5''^2 \gamma)}{(1 - \lambda_2^2 \gamma)(1 - \gamma / \lambda_4^2)} \right]^{1/(k-1)} \quad (2.10)$$

Исключая при помощи (2.10) из (2.8)  $\lambda_4$ , получим

$$[(1 + \gamma) N_{13}^2 - \gamma] = \frac{F}{F_1 + F_2} [(1 + \gamma) N_1^2 - \gamma] \left( \frac{1 - \lambda_5''^2 \gamma}{1 - \lambda_2^2 \gamma} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_5''}} \quad (2.11)$$

Решение системы уравнений (2.9) и (2.11) определяют значения  $N_{13}$ ,  $\lambda_5''$ . Остальные параметры потока могут быть найдены из условий на первичной ударной волне.

(д) Определение параметров потока в объеме сводится в этом случае к одной из задач, рассмотренных в работе [2]. Используя условия динамической совместности на первичной ударной волне, условия на волне разрежения в трубе, а также уравнение неразрывности, получим следующую систему уравнений относительно  $M_3$ ,  $M_5''$  и  $N_{13}$ , решение которой определяют параметры потока в объеме:

$$\frac{F}{F_1 + F_2} = \frac{M_5''}{M_3} \left( \frac{1 + \alpha M_3^2}{1 + \alpha M_5''^2} \right)^{1/2 k} \quad (2.12)$$

$$[(1 + \gamma) N_{13}^2 - \gamma] = \left( \frac{1 + \alpha M_3^2}{1 + \alpha M_5''^2} \right)^{k/(k-1)} \left( \frac{1 + \alpha M_2}{1 + \alpha M_3} \right)^{k/\alpha}$$

$$\frac{2}{k+1} \left( N_{13} - \frac{1}{N_{13}} \right) = M_5'' \left( \frac{1 + \alpha M_2}{1 + \alpha M_3} \right) \left( \frac{1 + \alpha M_3^2}{1 + \alpha M_5''^2} \right)^{1/2} a_2, \quad \alpha = \frac{k-1}{2}$$

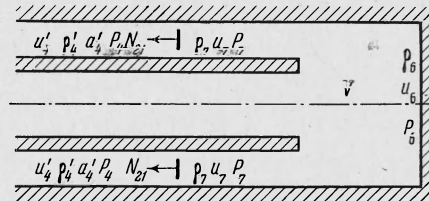
3. После подхода первичной ударной волны к дну объема ударная волна отразится от него и начнет распространяться вверх по потоку, взаимодействуя при этом с контактной поверхностью и вторичной ударной волной (если таковая образовалась). Результаты этого взаимодействия могут быть рассчитаны по соотношениям, приведенным в работе [3]. Ниже рассматривается распространение отраженной ударной волны в зазоре с момента прихода ее в плоскость конца трубы. Нахождение параметров потока за ударной волной в зазоре при строгой постановке задачи сводится к интегрированию системы трех дифференциальных уравнений в частных производных при весьма сложных граничных условиях. В настоящее время решение такой задачи может быть осуществлено только численными методами. В данной работе решение задачи проводится при следующих предположениях: а) пренебрегается наличием контактной поверхности между прошедшей в зазор отраженной ударной волной и плоскостью среза конца трубы; б) изменение параметров газа по длине в области между плоскостью конца трубы и ударной волной происходит мгновенно; в) в объеме между концом трубы и дном объема отсутствуют волновые процессы, заполнение объема происходит квазистационарно. На фиг. 2 приведена схема течения и обозначения, используемые при решении задачи.

Газ из объема вытекает в зазор, при этом расход равен  $Q_2 = \rho_7 u_7 F_2$ , где  $u_7$ ,  $\rho_7$  — соответственно скорость и плотность газа за ударной волной,  $Q_1$  — расход газа из трубы. Тогда уравнение сохранения массы для объема  $V$  запишется следующим образом:

$$V d\rho_6 / dt = Q_1 - Q_2 \quad (3.1)$$

где  $\rho_6$  — средняя по объему  $V$  плотность в момент времени  $t$ .

Выразим в (3.1)  $\rho_6$  и  $u_7$  через  $\rho_7$ . Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для контрольных поверхностей, расположенных между ударной волной



Фиг. 2. Схема течения газа в полуограниченном объеме после проникновения отраженной ударной волны в зазор

