

ЭВОЛЮЦИЯ ТОЧЕК СИНГУЛЯРНОСТИ И КОНТАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ОТДЕЛЯЮЩИХ ОБЛАСТЬ ПРЕБЫВАНИЯ ЭТИХ ТОЧЕК ОТ ЖИДКОСТИ

УДК 532.5

Н. А. Иногамов¹, А. Ю. Демьянов²

¹ Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка

² Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный

Бесспорно, что гидромеханические теории во многом отправляются от представлений о вихрях. Исследования вихрей состоят из изучения их генерации и эволюции. В силу сохранения циркуляции в однородной жидкости генерация завихренности при отсутствии твердых границ возможна только на скачках плотности. Поэтому анализ динамики таких скачков, называемых также контактными или граничными поверхностями, имеет принципиальное значение.

В настоящей работе предлагается некоторая разработка этих вопросов. Она опирается на восходящие к С. А. Чаплыгину идеи о сингулярностях потенциала скорости, которые в определенном смысле виртуальны, поскольку находятся вне области, занятой жидкостью. Обычно при этом речь идет о стационарных решениях и о сингулярностях в установившихся позициях. Здесь же рассматриваются именно передвижения сингулярностей и нестационарные эффекты. Обсуждается гипотеза о том, что траектория сингулярности может упираться в границу жидкости. При этом в момент прикосновения к жидкости сингулярность из виртуальной превращалась бы в реальную. Полученные результаты основаны на разложениях высоких порядков известных классических краевых условий на граничной поверхности и прямом численном моделировании движения жидкостей со скачками плотности. Аналитические разложения проведены для $\mu = 0$ (μ — отношение плотностей), когда жидкость граничит с жидкостью бесконечно малой плотности (вакуумом). Они пригодны до момента появления особенности. При выполнении этих двух условий функция $y = \eta(x, t)$, задающая границу, остается однозначной функцией x . В то же время численные расчеты были выполнены при $\mu \neq 0$, поскольку, к сожалению, использованные численные методы не могут быть применены при $\mu = 0$. В этом случае в нижней части струи образуется грибовидное затупление, а на границе струи возможно развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. По отношению к целям, поставленным в данной работе, эти эффекты являлись нежелательными. Для их уменьшения расчеты проводились при $\mu \ll 1$.

1. Основные уравнения. Динамика неоднородной несжимаемой жидкости в нестационарном случае описывается известными уравнениями

$$D_t \mathbf{v} + (\nabla p)/\rho - \mathbf{g} = 0, \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad D_t \rho = 0, \quad D_t = \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{v} = \{u, v\}$, ρ , p , \mathbf{g} — скорость, плотность, давление и гравитационное ускорение. Последнее уравнение в этой системе описывает перенос неоднородностей плотности. Случай несжимаемой жидкости рассмотрен ниже аналитически и численно. Кроме того, численно при небольших значениях чисел Маха проанализирован эффект сжимаемости жидкости.

Соответствующие известные уравнения имеют вид

$$D_t \mathbf{v} \dots, \rho_t + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0, \quad D_t(\varepsilon + v^2/2) + (\nabla \cdot p \mathbf{v})/\rho - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon. \quad (1.2)$$

Здесь первое уравнение $D_t \mathbf{v} + \dots$, связанное с импульсом, совпадает с первым уравнением системы (1.1); ε — внутренняя энергия в расчете на единицу массы; γ — показатель адиабаты.

Работа посвящена исследованию эволюции скачков плотности. Распределение ρ испытывает скачок на граничной поверхности $\eta(x, t)$. В начальный момент $\rho = \rho_1$ при $y > \eta$ и $\rho = \rho_2$ при $y < \eta$. Пусть $\mu = \rho_2/\rho_1$. Распределение p при $t = 0$ находится из уравнения гидростатики. В областях $y > \eta$ и $y < \eta$ движение безвихревое ($\text{rot} \mathbf{v} = 0$). Системы (1.1) и (1.2) интегрируются прямыми численными разностными методами на сетке, покрывающей прямоугольную расчетную область. Аналитическая теория строится в терминах скалярного потенциала скорости φ ($\mathbf{v} = \nabla \varphi$). При этом, как известно, система (1.1) сводится к краевой задаче. Потенциал подчиняется уравнению $\Delta \varphi = 0$ при $y > \eta$ и $y < \eta$. Кроме того, выполняются два крайних условия. Ограничимся случаем $\rho_2 = 0$, $\mu = 0$. Классические [1-4] кинематическое и динамическое крайние условия

$$(-\eta_t + \varphi_y - \eta_x \varphi_x) \Big|_{y=\eta} = 0, \quad (-\varphi_t - v^2/2 + gy) \Big|_{y=\eta} = 0 \quad (1.3)$$

вытекают из уравнения адвекции поверхности и уравнения Бернулли соответственно.

Проблема описания поведения скачков плотности возникает в широком спектре приложений, например, в связи с неустойчивостями Рихтмайера — Мешкова [5-9] и Рэлея — Тейлора [9-16].

2. Аналитические результаты. Пусть возмущения периодичны. Разложим η и φ в ряды по гармоникам

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{N+1} s_n(t) \cos(nx), \quad \varphi(x, y, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \cos(nx) \exp(-ny)/n, \quad (2.1)$$

а η — в ряд по степеням

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^N \eta_n(t) x^{2n}. \quad (2.2)$$

Коэффициенты s_n и η_n связаны друг с другом простыми линейными соотношениями. Перейдем в сопутствующую систему координат, связанную с точкой ($x = 0$, $y = \eta_0$), лежащей на границе η . Формула перехода $x, y \rightarrow x, Y$ имеет вид $Y = y - \eta_0$. Ряд φ (2.1) в этой системе примет вид

$$\Phi(x, Y, t) = \sum_{n=1}^N A_n(t) \cos(nx) \exp(-nY)/n - \dot{\eta}_0(t) Y, \quad A_n = a_n \exp(-n\eta_0). \quad (2.3)$$

Подставим ряды (2.2) и (2.3) в крайние условия (1.3). После длинных вычислений [17], на которых здесь нет возможности остановиться, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющей эволюцию неизвестных функций $A_n(t)$ и $\eta_n(t)$:

$$-\dot{M}_1/2 + \dot{M}_0 \eta_1 = -M_1^2/2 + g \eta_1; \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_3/24 - \dot{M}_2 \eta_1/2 + \dot{M}_1 \eta_1^2/2 + \dot{M}_0 \eta_2 = -M_2^2/8 + M_1 M_3/6 - M_1 M_2 \eta_1/2 - \\ - M_1^2 \eta_1^2/2 + g \eta_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$-\dot{M}_5/720 + \dots + \dot{M}_1\eta_1\eta_2 + \dot{M}_0\eta_3 = -M_3^2/72 + M_2M_4/48 - \dots - M_1^2\eta_1\eta_2 + g\eta_3; \quad (2.6)$$

$$\dot{M}_7/40320 - \dots + \dot{M}_1\eta_1\eta_3 + \dot{M}_0\eta_4 = -M_4^2/1152 + M_3M_5/720 - \dots - M_1^2\eta_1\eta_3 + g\eta_4; \quad (2.7)$$

$$-\dot{M}_9/3628800 + \dots + \dot{M}_1\eta_1\eta_4 + \dot{M}_0\eta_5 = -M_5^2/28800 + \\ + M_4M_6/17280 - \dots - M_1^2\eta_1\eta_4 + g\eta_5; \quad (2.8)$$

$$\dot{M}_{11}/479001600 - \dots + \dot{M}_1\eta_1\eta_5 + \dot{M}_0\eta_6 = -M_6^2/1036800 + M_5M_7/604800 - \dots + g\eta_6. \quad (2.9)$$

$$\dot{\eta}_1 = -M_2/2 + 3M_1\eta_1; \quad (2.10)$$

$$\dot{\eta}_2 = M_4/24 + 5(-M_3\eta_1/6 + M_2\eta_1^2/2 + M_1\eta_2); \quad (2.11)$$

$$\dot{\eta}_3 = -M_6/720 + 7(M_5\eta_1/120 - M_4\eta_1^2/12 + M_3\eta_1^3/6 - M_3\eta_2/6 + M_2\eta_1\eta_2 + M_1\eta_3); \quad (2.12)$$

$$\dot{\eta}_4 = +M_8/40320 - M_7\eta_1/560 + 3M_6\eta_1^2/80 - M_5\eta_1^3/4 - \dots - 3M_3\eta_3/2 + \\ + 9M_2\eta_1\eta_3 + 9M_1\eta_4; \quad (2.13)$$

$$\dot{\eta}_5 = -M_{10}/3628800 + 11(M_9\eta_1/362880 - M_8\eta_1^2/10080 + \dots - M_3\eta_4/6 + \\ + M_2\eta_1\eta_4 + M_1\eta_5); \quad (2.14)$$

$$\dot{\eta}_6 = M_{12}/479001600 - 13(M_{11}\eta_1/39916800 + \dots + M_2\eta_2\eta_4 - \\ - M_3\eta_5/6 + M_2\eta_1\eta_5 + M_1\eta_6). \quad (2.15)$$

Здесь и далее наряду с амплитудами для краткости записей будут использоваться их линейные комбинации

$$M_j = \sum_{m=1}^N m^j A_m.$$

Система (2.4)–(2.15) относится к случаю, когда порядок аппроксимации N краевых условий (1.3) равен шести. Системы меньшего порядка следуют из этой системы при сокращении соответствующих старших уравнений и числа неизвестных функций.

Система (2.4)–(2.15) состоит из двух подсистем уравнений на неизвестные A_n и η_n соответственно. Если вторая из них разрешена относительно производных $\dot{\eta}_n$, то в первую (содержащую производные \dot{A}_n) производные \dot{A}_n входят в виде некоторых линейных комбинаций. Левые части уравнений из первой подсистемы можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} \dot{A}_j,$$

где индекс i указывает номер уравнения, а $N \times N$ матрица Γ_{ij} имеет матричные элементы, зависящие только от η_n .

Из анализа [17] следует, что при $N > 1$ представляющие физический интерес решения системы (2.4)–(2.15) притягиваются к вложенной в пространство A_n, η_n гиперповерхности D , на которой $\det \Gamma_{ij} = 0$. Отсюда и вытекает гипотеза о том, что эти решения существуют на конечном отрезке по времени $0 < t < t_c$. Анализ сходимости, изложение которого выходит за рамки данной работы, показал, что разности между последовательными аппроксимациями быстро (примерно экспоненциально) убывают с ростом N . Это говорит о хорошей сходимости результатов. Моменты t_c , в которые решение притягивается к D , также оказались слабо зависящими от N .

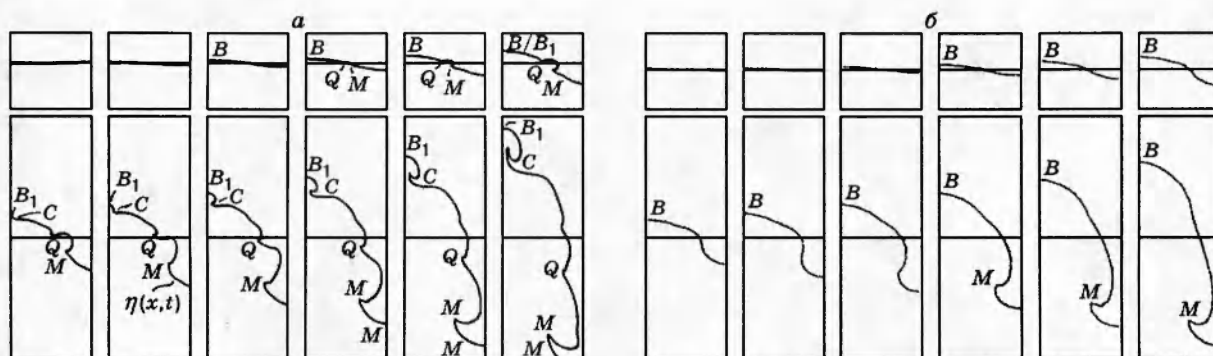


Рис. 1

Отметим, что в периодическом случае возмущенная граница представляет собой череду впадин (пузырей) и выпячиваний (струй) жидкости. По-видимому, при $t \rightarrow t_c$ ряд (2.3) расходится. Возможно, что это указывает на то, что расстояние между ближайшей к границе η сингулярностью и вершиной пузыря $x = 0, y = \eta_0$ становится малым (см. [17]). Посмотрим, как проявляется приближение сингулярности на результатах двумерных сеточных расчетов.

3. Наблюдение потери гладкости. Проверим высказанную выше гипотезу относительно окончания гладкой эволюции η в момент t_c вследствие образования особенности в вершине. Остановимся сначала на вопросе о том, имеются ли указания на нарушение гладкой эволюции. Характерный численный пример таких указаний приведен на рис. 1, *a*. Здесь $A_0 = 0,1; \eta_0 = 0; \mu = 0,1$; плотной является жидкость над границей η ; у левого края расчетной области располагается впадина (пузырь) в плотной жидкости, а у правого — выпячивание (струя) этой жидкости; случай неустойчивости Рэля — Тейлора $g = -1$, ось y направлена вверх; единицы измерения $|g| = 1, k = 1$ (k — волновое число); при этом время дается в единицах $1/\sqrt{gk}$. Начальным было возмущение с одной гармоникой. Ввиду четности функции $\eta(x, t)$ по x показана половина периода λ . В нижнем ряду прямоугольные кадры охватывают все расчетное поле. Отношение высоты к ширине этого прямоугольника равно 3 : 1 (рис. 1 сохраняет это отношение). В целях экономии места в верхнем ряду представлена только часть прямоугольника в виде полосы, прилегающей к границе η . В начальный момент поверхность η делила расчетное поле пополам. Соответствующая прямая для ориентировки показана на всех кадрах.

Развитие во времени дано на рис. 1 в направлении слева направо и затем сверху вниз. Это ясно видно по тому, как растет возмущение. Последовательные кадры на рис. 1 выдаются через промежутки $t_{n+1} - t_n = 0,5$ от $t = 0$ до $t = 5,5$. Появление неровностей M и Q при $t \approx 1,5$ примерно посередине полупериода по x не имеет отношения к особенности в вершине B . Возможно, оно обусловлено тем, что $\mu \neq 0$. Во всяком случае неровность M постепенно трансформируется в повернувшую струю $M - M$ (см. последние кадры развертки рис. 1, *a*), которая образует «шляпку» грибовидного затупления. Как известно [18], такие затупления связываются с ненулевой плотностью нижней жидкости ρ_2 , так как использованные гидродинамические сеточные коды не работают при $\mu = 0$. Поэтому для проверки теории бралось достаточно малое значение μ .

Похоже, что из анализа рис. 1, *a* следует утвердительный ответ на вопрос о нарушении гладкости: в момент $t_c = 2,5 \div 3$ к верхней точке пузыря B подходит сингулярность.

Возможно, что это является причиной наблюдаемого возникновения первоначально малого нового пузырька в окрестности вершины старого большого пузыря. Симметричная половина границы нового пузырька дается дугой B_1C . Эта дуга ограничена каспом (заострением) C . С течением времени происходит «раздувание» (инфляция) дуги B_1C . Вершина пузыря при $t < t_c$ и $t > t_c$ обозначается B и B_1 .

Рассмотрим влияние разрешающей способности сеток. Была исследована зависимость от шагов по времени Δt и пространству. Использовались сетки с прямоугольными ячейками с шагами Δx и Δy и с квадратными ячейками $\Delta x = \Delta y = \Delta$. Оказалось, что для получения удовлетворительных данных требуются аккуратные расчеты с малыми значениями как Δt , так и Δ . Соответственно большими должны быть значения N_{st} и N_{gr} , где $N_{st} = T/\Delta t$ — число шагов по времени, T — время интегрирования, $N_{gr} = \lambda/\Delta x$. В частности, развитие возмущений до амплитуд $\sim \lambda$ должно происходить за $10^5 \div 10^6$ шагов по времени. Разрешения редких сеток с $\Delta > \lambda/(40 \div 50)$ не хватает для выявления особенности. На редких сетках появление особенности замазывается. Сравни расчеты на редкой (рис. 1, б с $\lambda/\Delta = 30$) и густой (рис. 1, а с $\lambda/\Delta = 110$) сетках. Это связано с таким фактором, как снижение разрешающей способности из-за сглаживающего действия сеток, приводящего к замазыванию тонких деталей картины, а также с возрастанием эффективной аппроксимационной вязкости и обусловленного этим увеличения искусственной диссипации, в связи с чем развитие возмущения немного замедляется (ср. положение струи на последних кадрах рис. 1, а и б). С ростом Δ касп C , образующийся после момента t_c , постепенно расплывается, так что за некоторым порогом по Δ эволюция η представляется плавной и не имеющей особенностей.

Расчеты, приведенные на рис. 1, выполнены А. В. Чехловым при $\mu = 0,1$, $A_1(0) = 0,1$, $A_n(0) = s_n(0) = 0$ методом искусственной сжимаемости [19]. Интегрировалась система (1.1). Отметим, что для оценки степени надежности результатов были произведены точные расчеты большого количества вариантов. Они отличались значениями скоростей ($A_1(0) = 0,01; 0,025; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$), плотностей ($1/\mu = 2; 10; 20; 40$), величиной шага по времени и значениями $N_{gr} = \lambda/\Delta x$ (20; 40; 60...200; 220). Кроме того, было рассчитано несколько вариантов, в которых в начальный момент возмущение задавалось двумя гармониками: A_1 и A_2 . Продолжительность обсчета одного шага по времени процессором Пентиум РС АТ-586 с тактовой частотой 90 МГц на типичной сетке 100×200 методом [20] составляет ~ 1 с. На вариант тратится $\sim 50 \div 100$ ч.

4. Подтверждение теории расчетами. Изучим влияние вариации начальных данных на результаты. Рассмотрим вариацию начальной амплитуды $A_1(0)$. Соответствующие варианты представлены на рис. 2 и 3. На рис. 2 показан процесс формирования особенности в вершине пузыря при малой начальной амплитуде возмущения, а на рис. 3 — формирование особенности в вершине при относительно больших начальных амплитудах. Первые два кадра в нижнем ряду показывают ранние стадии развития дуги B_1C . На данных стадиях ее образование еще слабо выражено. С этим связана погрешность определения величины t_c . Расчеты выполнены методом крупных частиц [20] на сетке с $\Delta = \lambda/140$ при $\mu = 0,1$. При этом интегрируется система газодинамических уравнений (1.2). В расчетах варьировались граничные условия на верхней и нижней границе расчетной области. Использовались различные варианты жестких и свободных граничных условий, перебор которых показал, что на наблюдаемое нарушение гладкости они не влияют. Например, рис. 1, а и б относятся к случаю, когда сверху и снизу поставлены свободные граничные условия, а рис. 2 и 3 — к случаю, когда сверху поставлено свободное условие, а снизу —

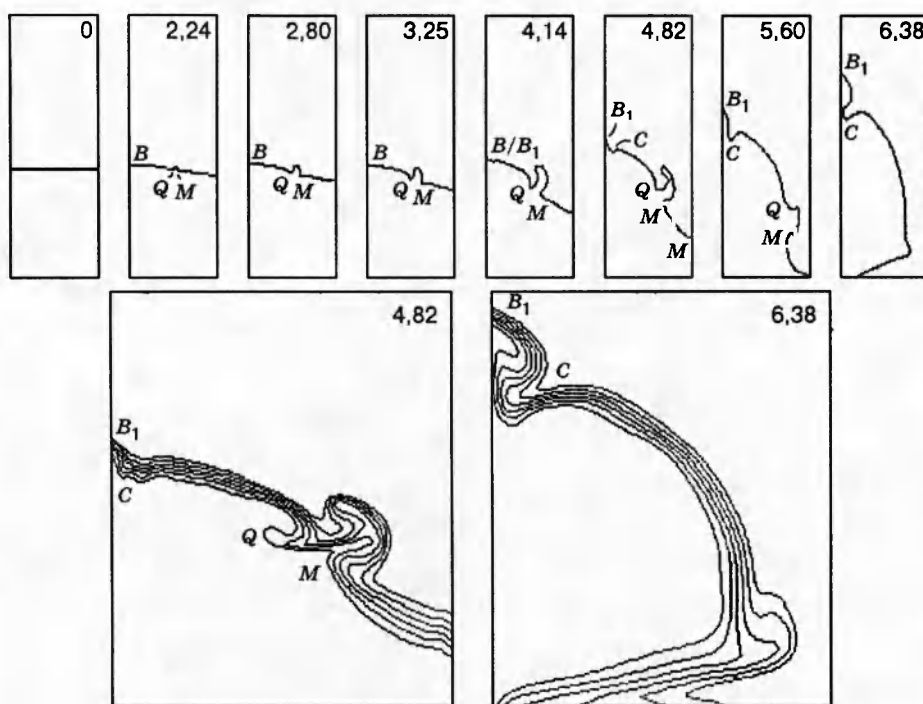


Рис. 2

условие, при котором поток массы обращается в нуль. На левых и правых границах ставились условия симметрии.

С одной стороны, для получения высокого разрешения необходимо иметь возможно большее значение параметра λ/Δ , а с другой — объем оперативной памяти использованных ЭВМ ограничивает размер максимальной сетки значениями ~ 5000 ячеек в методе [19] и ~ 20000 ячеек в методе [20]. Кроме того, время, которое затрачивается процессором на выполнение одного шага по t , довольно быстро растет с числом ячеек (несколько быстрее прямой пропорциональной зависимости по числу ячеек), а величина самого шага Δt сокращается пропорционально $1/N_{gr}$ из-за критерия Куранта. Все это приводит к тому, что из-за ограниченного быстродействия процессора расчеты на густых сетках оказываются весьма продолжительными. В этих условиях пришлось осмотрительно подходить к выбору протяженности расчетного поля по вертикали. Основное внимание было обращено на исследование динамики пузыря. Многочисленные проверки, в которых варьировалась начальная глубина малоплотной нижней жидкости, показали, что то, что происходит с пузырем, обладает высокой степенью автономности по отношению к тому, что происходит со струей. Например, струя может уходить через свободную нижнюю границу или же сталкиваться с ней в случае жесткой границы, поворачивать вдоль нее и затем, после столкновения встречных струй, подниматься вверх внутри пузыря (ср., например, рис. 1, а и 2); и это не оказывает сколько-нибудь существенного влияния на судьбу пузыря. Указанная автономность позволяет сокращать вертикальную протяженность поля за счет глубины нижней жидкости. В расчетах, результаты которых представлены на рис. 2 и 3, в начальный момент высоты плотной и малоплотной жидкости относятся как 7 : 5 (первый кадр в верхней последовательности на рис. 2).

Расчеты, показанные на рис. 2 и 3, относятся к малым и относительно большим ам-

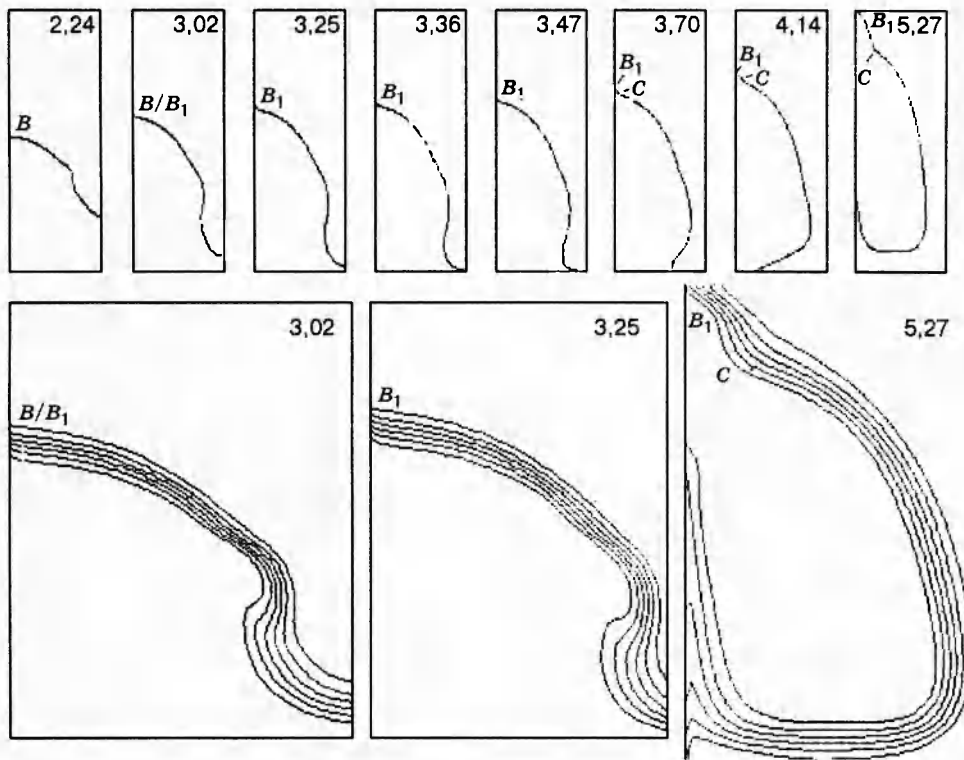


Рис. 3

плитудам возмущений соответственно. Во всем диапазоне значений амплитуд происходит формирование особенности в вершине пузыря. При $t < t_c$ форма границы удовлетворительно согласуется с формой, найденной теоретически. Зависимость величины t_c от начальных данных и ее значение также неплохо согласуются с полученными теоретически. Формы η при $t < t_c$ и значения моментов t_c в расчетах, выполненных двумя совершенно разными методами [19 и 20], удовлетворительно согласуются.

На рис. 2 и 3 $A_1(0) = 0,025$ и $0,22$ соответственно, начальные скорости отличаются на порядок. Поэтому в одинаковые моменты времени амплитуды возмущений формы η существенно отличаются. В частности, на рис. 3 струя раньше достигает нижней границы, а вершина пузыря — верхней, чем на рис. 2. Особенно это отличие заметно на ранних стадиях (ср. кадры, относящиеся к $t = 2,24$). С увеличением $A_1(0)$ размер неровностей M и Q постепенно уменьшается. На рис. 3 они становятся незаметными. Возможно, как было предположено в п. 3, что они имеют отношение к грибовидному образованию, формирующемуся с течением времени на концах струй. Поскольку нас интересовали явления в окрестности вершины пузыря, то толщина слоя малоплотной жидкости, а значит, и путь струи были сокращены и оказались небольшими. Это не позволяет исследовать формирование грибовидного образования на должном уровне. В связи с затронутым вопросом о динамике концевой области струй отметим, что в [21, 22] для случая $\mu = 0$ прогнозировалось появление неаналитической точки в этой области. Пока остается неясным, подтвердится ли этот прогноз, основанный на слабонелинейном приближении, в соответствующих численных расчетах. Кроме того, неясно, существенно ли условие $\mu = 0$ в этой задаче.

На рис. 2 и 3 в верхней последовательности кадров, как и на рис. 1, показана эволюция средней изохоры $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$. Чтобы охарактеризовать степень размытия профиля плот-

$A_1(0)$	t_c	
	Теория	Расчет
0,01	$5 \pm 0,5$	$4,5 \pm 0,5$
0,025	$4,3 \pm 0,5$	$4,3 \pm 0,5$
0,05	$3,6 \pm 0,5$	$3,2 \pm 0,5$
0,1	$2,9 \pm 0,5$	$2,7 \pm 0,5$
0,22	$2,3 \pm 0,5$	$3,0 \pm 0,2$
0,34	$1,7 \pm 0,5$	$2,9 \pm 0,5$
0,70	$1,4 \pm 0,5$	$2,7 \pm 0,5$

ности из-за численной диффузии при использовании эйлеровой методики, в нижнем ряду представлена эволюция шести соседних изохор, делящих промежутки плотностей между ρ_2 и ρ_1 на шесть равных отрезков. В правом верхнем углу приводится текущее значение времени. Отметим, что выдачи производятся неравномерно по времени. Эта неравномерность обусловлена необходимостью внимательнее просматривать наиболее существенные стадии эволюции. На рис. 3 выдачи сгущались около момента t_c . Прямоугольники соответствуют расчетной области. Приведенные на рис. 2 и 3 верхние прямоугольники растянуты по вертикали в 1,68 раза, а нижние — по горизонтали в 1,19 раза. На рис. 2 в нижнем ряду для сокращения площади выпущено 20% размера поля по вертикали в верхней части прямоугольника. На рис. 3 внизу показана наиболее существенная часть расчетного поля.

Расчеты охватывают довольно широкий, покрывающий около двух порядков, диапазон начальных амплитуд $A_1(0)$. Теоретические и численные зависимости $t_c(A_1(0))$ представлены в таблице. Как видим, если опустить несколько превышающее погрешность расхождение при относительно больших значениях амплитуд, то можно заключить, что эти зависимости удовлетворительно согласуются. Теоретическое значение t_c определялось двумя способами. В первом из них за t_c принимался такой момент времени, в который $\det \Gamma$ уменьшается в 1000 раз по сравнению с начальным значением, погрешность при этом определяется разбросом значений t_c при варьировании N ; во втором вводилась норма, определяющая расстояние между траекториями. За t_c принимался момент, в который эта норма превосходит некоторое заданное значение. Погрешность определялась разумным варьированием данного значения и варьированием N . В таблице приведена суммарная погрешность этих способов. Происхождение численной погрешности обусловлено трудностью определения t_c . Дело в том, что в окрестности t_c пузырек B_1C слабо выражен. Это хорошо видно на верхней последовательности кадров на рис. 3 в диапазоне времен $3,02 < t < 3,7$ (см. также увеличенные кадры на нижней последовательности, относящиеся к моментам $t = 3,02$ и $3,25$).

Отметим некоторые трудности, возникающие при расчете крайних вариантов с малыми или большими начальными скоростями. Оказывается, происходит рост числа шагов интегрирования N_{st} на краях приведенного в таблице диапазона скоростей, что затрудняет расчеты вне этого диапазона скоростей. Поясним, чем обусловлен рост N_{st} . Малые значения $A_1(0)$ рассчитывались при $g = 1$. Шаг Δt , выбранный как некоторая доля от обратного инкремента $1/\gamma$ ($\gamma = \sqrt{gk}$) или по критерию Куранта, фиксирован. Его фиксация по Куранту обусловлена тем, что скорость звука больше гидродинамической скорости и не варьируется. Время же интегрирования T при уменьшении $A_1(0)$ увеличивается. Это объясняет причину роста N_{st} при малых скоростях. При больших скоростях N_{st} возрастает

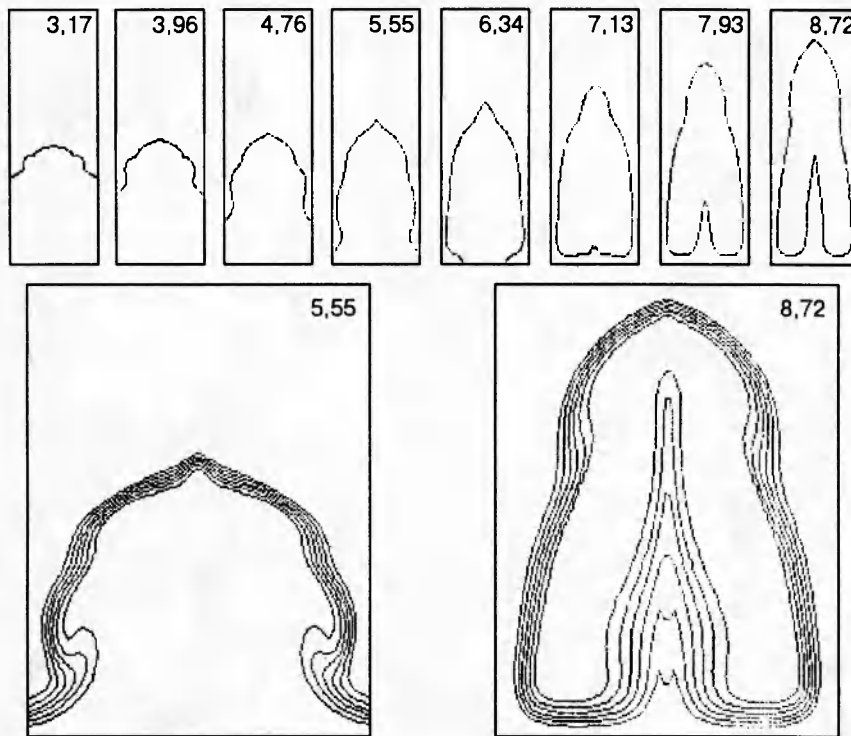


Рис. 4

ет вследствие того, что при численных расчетах $A_1(0)$ фиксировалось, а g уменьшалось. Окончательные данные, входящие во все рисунки и в таблицу, приводятся в единицах $g = k = 1$. Если Δt и $A_1(0)$ фиксированы, а g убывает, то N_{st} растет, поскольку уменьшение g ведет к замедлению процесса развития. Отметим также, что при очень малых $A_1(0)$ ($< 0,01$) на всем протяжении границы η на временах $t < t_c$ появляются мелкомасштабные возмущения, генерация которых, по-видимому, обусловлена возмущениями, связанными с сеткой. Это делает невозможным численное определение t_c .

5. Эволюция решения после прикосновения сингулярности. Выше проанализирована ситуация при $0 < t < t_c$ и $t \approx t_c$. Чтобы как можно более детально изучить эту ситуацию, использовались сетки с максимально возможными значениями N_{gr} . Из-за ограничения на память это приводило к тому, что высота расчетного поля была невелика. Например, в расчетах, представленных на рис. 2 и 3, отношение пути \bar{D}_b , который могла бы пройти вершина пузыря, к периоду λ равнялось 0,5. Величина D_b равна толщине слоя плотной жидкости. Чтобы минимизировать влияние границы, обычно сверху ставились свободные граничные условия. Вследствие сравнительно небольшой величины отношения D_b/λ уже вскоре после момента t_c пузырек V_1C приближается к верхней границе. При этом он остается еще небольшим, а это означает, что после прикосновения сингулярности прошло немного времени.

Рассмотрим решение задачи на таких временах, на которых касп C удаляется от вершины V_1 на большие расстояния ($\sim \lambda/2$ и более). Чтобы изучить это, требуется увеличить отношение D_b/λ . Поскольку полное число ячеек ограничено памятью, то надо уменьшить N_{gr} , что, к счастью, оказалось возможным. Можно вдвое уменьшить длину волны по отношению к горизонтальному размеру сетки и соответственно вдвое увеличить путь вершины пузыря. И при этом параметр Δ/λ еще остается достаточно малым для

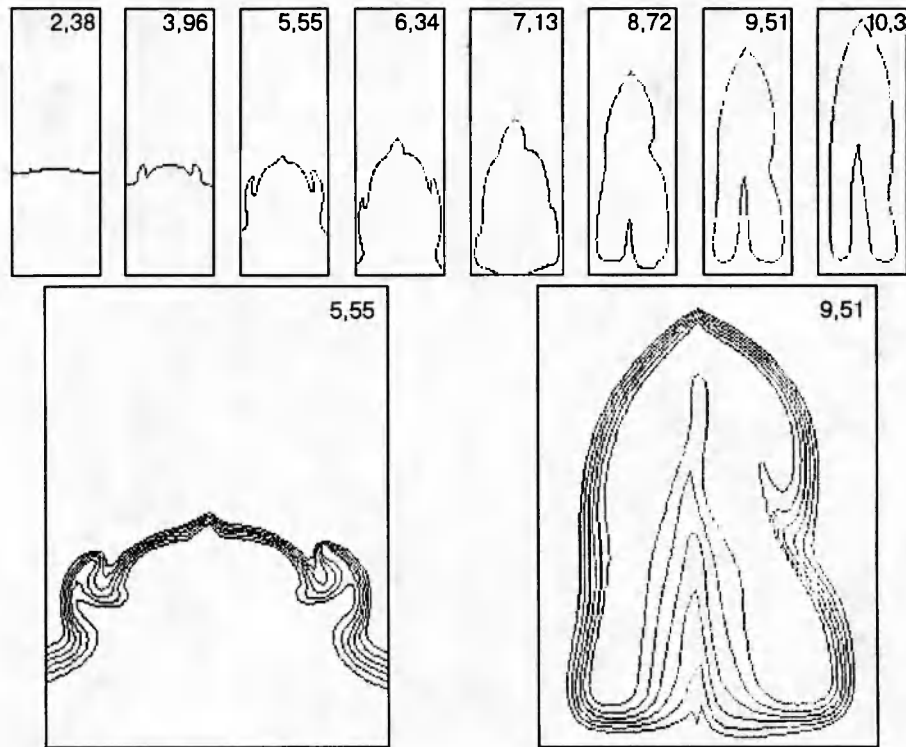


Рис. 5

того, чтобы разрешить появление особенности.

Примеры таких расчетов показаны на рис. 4 и 5, где сетка 70×120 , $\Delta = \lambda/70$ (этот шаг достаточен для выявления прикосновения сингулярности), $D_b/\lambda = 1$. Шаг по времени в единицах $g = k = 1$ был $\approx 7 \cdot 10^{-5}$. Рис. 4 и 5 представляют относительно быстрый и относительно медленный варианты развития возмущений, здесь начальная амплитуда $A_1(0) = 0,079$ и $0,023$ соответственно. В варианте рис. 4 касание сингулярности происходит при $t_c = 4,1 \pm 0,3$. Это значение несколько больше того, которое получается при интегрировании при вдвое большей величине N_{gr} . Чтобы посмотреть, как повлияет нарушение симметрии на процесс образования особенности, на основное возмущение скорости было наложено небольшое субгармоническое возмущение с вдвое большей длиной волны и с начальной амплитудой скорости $A_{0,5} = 0,0039$, $A_{0,5}/A_1 = 1/6$. Как видим, при меньшей амплитуде $A_1(0)$ прикосновение происходит позже, при $t_c = 4,6 \pm 0,3$, как это и должно быть. Из-за начальной асимметрии и все решение оказывается несимметричным.

Посмотрим на устройство решения, когда длина дуги $B_1C \sim \lambda/2$. Это условие выполняется на заключительных кадрах разверток, представленных на рис. 4 и 5. Наиболее яркой, бросающейся в глаза особенностью является образование клиновидных вершин на поверхности η . Измерения угла клина дают значения, близкие к 120° . Читателю при проверке этих измерений следует учитывать коэффициент искажения отношения вертикальных и горизонтальных размеров (см. п. 4).

Образование клиновидной вершины в несимметричной ситуации, когда основное решение возмущено малой субгармоникой, показано на рис. 5. Измерения угла опять, как и в симметричном случае, дают значения, близкие к 120° . В верхних и нижних рядах на рис. 4 и 5 показано полное расчетное поле. Вершина должна образовываться сразу после

момента t_c . Определенные указания на такие вершины имеются и на рис. 2 и 3. Угол раствора клина α при вершине на ранних стадиях около момента t_c , видимо, меняется со временем (немного возрастает). После значительных промежутков времени от момента t_c величина α , видимо, выходит на асимптотическое значение. Измерения на ранних стадиях затруднительны, поскольку дуга B_1C мала. Измерения угла α как функции $(t - t_c)$ при $(t - t_c) \ll t_c$ требуют очень точных расчетов на подробных сетках. Измерения на более поздних стадиях дают $\alpha = 115^\circ \pm 10^\circ$, т. е. угол, примерно равный 120° .

На дальних стадиях, т. е. при $t \gg t_c$, должно происходить постепенное установление стационарного решения. Стационарным это решение является в подвижной системе координат, связанной с границей η . Точное стационарное решение существует в несжимаемом случае, когда число Маха $M = 0$, и при условиях $\mu = 0$ и $g = 1$. При $M \ll 1, \mu \ll 1$ вместо точного стационарного состояния возникает квазистационарная стадия, существующая довольно продолжительное время в меру малости M и μ . Вопрос об асимптотических решениях при $g = 0$ требует отдельного рассмотрения. Отметим, что повторные прикосновения сингулярностей в окрестности вершины пузыря отсутствуют.

Приведем два вида простого точного стационарного решения, удовлетворяющего граничным условиям (1.3):

$$f_1 = 2\sqrt{(1-\mu)g} \exp(i\pi/4) z^{3/2}/3, \quad f_2 = 2\sqrt{(1-\mu)g} \exp(-i3\pi/4) z^{3/2}/3. \quad (5.1)$$

Здесь $f = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал; $z = x + iy$. Можно показать, что решение f_1 соответствует уединенному пузырю, заполненному покоящейся жидкостью с отношением плотностей μ , свободная поверхность которого η образует клин с углом $\alpha = 120^\circ$, а решение f_2 — уединенной волне бесконечной амплитуды на границе между движущейся и покоящейся жидкостями с отношением плотностей μ . Хорошо известно, что решение f_2 описывает асимптотику течения в окрестности клинообразной вершины гребня с углом 120° предельной стоксовской волны. По-видимому, решение f_1 относится к асимптотике в окрестности вершины пузыря, постепенно устанавливающейся при $t > t_c$. Представляется, что именно эта асимптотика наблюдается на рис. 2–5. Для детального изучения стационарного решения необходимо достичь больших значений параметра D_b/λ , следовательно, потребуются большие сетки и продолжительные расчеты.

Отметим, что в расчетах, проведенных методом [19], при $t > t_c$ получаются пузыри со скругленной вершиной (рис. 1, а). Тем не менее, по-видимому, надо со всей серьезностью отнестись к решениям с клинообразными вершинами, полученным при расчетах по распространенному методу крупных частиц [20]. Дело в том, что легко представить, каким образом вследствие влияния искусственной вязкости или недостаточной разрешающей способности численный алгоритм мог бы «замазать» и сгладить клиновидную вершину. Но трудно представить, как численный метод мог бы «искусственно» привести сначала к образованию, а затем к постоянному существованию такой вершины.

6. Заключение. В работе проанализированы решения уравнений механики сплошной среды, описывающие движения несжимаемой жидкости или слабосжимаемого газа, разделенных контактной границей на области с разной плотностью. Высказана гипотеза о приближении и прикреплении сингулярности к этой границе. Прикосновение сингулярности делит эволюционный процесс на две стадии. На первой из них происходит приближение и прикосновение этой сингулярности, а на второй эволюционирует система с прикрепленной особенностью. Проведено довольно продолжительное по времени исследование решения на второй стадии. Обнаружено, что при периодических вдоль границы краевых условиях по-

вторных прикосновений сингулярностей не происходит. Кроме того, в связи с тем, что в гидродинамике тяжелой жидкости имеется точное решение, соответствующее уединенному пузырю в виде клина с углом раствора 120° , и на основе численных результатов выдвинута гипотеза о том, что после момента t_c решение имеет клиновидную вершину на контактной границе. На некотором удалении от момента t_c угол раствора в этой вершине примерно равен 120° .

Авторы выражают благодарность С. И. Анисимову и А. М. Жилиеву за полезное обсуждение и А. В. Чехлову за помощь в расчетах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-02-06381-а). Один из авторов (Иногамов Н. А.) благодарит также INTAS-94-1105, МНФ и правительство Российской Федерации (J6U100).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретгиздат, 1947.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
4. Овсянников Л. В. Об асимптотическом представлении уединенных волн // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, вып. 3. С. 556–559.
5. Richtmyer R. D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 297–319.
6. Мешков Е. Е. Неустойчивость границы между двумя газами, ускоряемыми ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. Вып. 5. С. 151–155.
7. Розанов В. В., Лебо И. Г., Зайцев С. Г. и др. Экспериментальное исследование гравитационной неустойчивости и турбулентного перемешивания стратифицированных потоков в поле ускорения в связи с задачами инерциального термоядерного синтеза. М., 1990. (Препр. / ФИАН).
8. Benjamin R., Besnard D., Haas J.-F. Richtmyer — Meshkov instability of shocked-gaseous interfaces // Shock Waves. Proceedings of the 18th ISSWST, Sendai, Japan, 1991. Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1992.
9. Youngs D. L. Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh — Taylor instability // Physica D. (Nonlinear Phenomena). 1984. V. 12D. P. 32–44.
10. Кучеренко Ю. А., Томашев Г. Г., Шибаршов Л. И. Экспериментальное исследование гравитационного турбулентного перемешивания в автомодельном режиме // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теорет. и прикл. физика. Науч.-техн. сб. 1988. Вып. 1. С. 13–19.
11. Анучина Н. Н., Анучин М. Г., Волков В. И. и др. Численное исследование влияния сжимаемости среды на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. Науч.-техн. сб. 1990. Вып. 2. С. 10–16.
12. Никифоров В. В. Турбулентное перемешивание на контактной границе разноплотных сред // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теорет. и прикл. физика. Науч.-техн. сб. 1985. Вып. 1. С. 3–12.
13. Gamaly E. G., Favorsky A. P., Fedyanin A. O., et al. Nonlinear stage in the development of hydrodynamic instability in laser targets // Laser and Particle Beams. 1990. V. 8. P. 399–407.

14. **Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.** Модель и метод численного расчета турбулентного перемешивания границы раздела, движущейся ускоренно // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. Науч.-техн. сб. 1984. Вып. 2. С. 16–20.
15. **Haan S. W.** Weakly nonlinear hydrodynamic instabilities in inertial fusion // Phys. Fluids B. 1990. V. 3. P. 1992–2000.
16. **Garabedian P. R.** On steady-state bubbles generated by Taylor instability // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 241. P. 423–431.
17. **Иногамов Н. А.** Сингулярное перемешивание в звездах // Письма в Астрон. журн. 1994. Т. 20, вып. 10. С. 754–761.
18. **Anisimov S. I., Chekhlov A. V., Dem'yanov A. Yu., Inogamov N. A.** The theory of Rayleigh — Taylor instability: modulatory perturbations and mushroom-flow dynamics // Russian J. Comp. Mech. 1993. V. 1, N 2. P. 5–32.
19. **Inogamov N. A., Chekhlov A. V.** Existence, uniqueness and physical selection of asymptotically steady-states solutions in the theory of the Rayleigh — Taylor instability // Proc. of the 4th Int. Workshop on the Phys. of Compressible Turbulent Mixing / Ed. by P. F. Linden, D. L. Youngs, S. B. Dalziel. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 50–56.
20. **Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
21. **Kuznetsov E. A., Spector M. D., Zakharov V. E.** Surface singularities of ideal fluid // Phys. Lett. A. 1993. V. 182. P. 387–393.
22. **Kuznetsov E. A., Spector M. D., Zakharov V. E.** Formation of singularities on the free surface of an ideal fluid // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 1283–1290.

*Поступила в редакцию 10/V 1995 г.,
в окончательном варианте — 26/VI 1995 г.*
