ПМТФ, № 3, 1960

О ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА С ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ [1]

С. Л. Соболев

(Новосибирск)

I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

§ 1. Уравнение движения и граничные условия. 1°. Рассмотрим тяжелый волчок, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Пусть ножка волчка неподвижна. Поместим начало координат в этой неподвижной точке, и пусть ось z^* направлена вертикально вверх, а оси x^* и y^* неподвижной координатной системы лежат в горизонтальной плоскости. Внутри волчка пусть имеется полость, наполненная жидкостью.

Будем предполагать, что форма полости симметрична относительно оси волчка. Как для самого тела волчка, так и для полости ось служит осью симметрии порядка k, где $k > 2$; иными словами, если волчок повернуть вокруг оси на угол $2\pi/k$, то он совместится с самим собою.

Обозначим через M_1 массу оболочки волчка, через M_2 — массу жидкости, через ρ — плотность жидкости. Пусть x_2, y_2, z_2 — координатные оси, связанные с волчком, причем ось z_2 совпадает с осью симметрии волчка и начало координат расположено в неподвижной точке. Пусть A_1 — момент инерции оболочки относительно осей x_2 и y_2, а A_2 — момент инерции жидкости относительно тех же осей.

Аналогично через C_1 и C_2 обозначим моменты инерции оболочки и жидкости относительно оси z_2. Расстояния от точки опоры до центров тяжести оболочки и жидкости — l_1 и l_2.

Координаты единичного вектора, направленного из точки опоры по оси волчка, обозначим через X^*, Y^*, $\sqrt{1 - X^{*2} - Y^{*2}}$; $\mathbf{u}^*$ — вектор скорости жидкости, которую предположим идеальной, а p^* — давление в ней. Будем обозначать через S поверхность полости, наполненной жидкостью, а через V — весь объем, занятый ею.

Будем рассматривать лишь движения, близкие к равномерному вращению волчка вокруг вертикальной прямой. Поясним, что это значит. Пусть

$$\mathbf{u}^{(0)} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r} \tag{1.1}$$

$$p^{(0)} = \rho \frac{\omega^2 (r^2 - z^{*2})}{2} - gz^* + p_0 = \rho \frac{\omega^2 (x^{*2} + y^{*2})}{2} - gz^* + p_0$$

$$X^{(0)} = Y^{(0)} = 0$$

где $\mathbf{r}$ — координатный вектор, а $\mathbf{k}$ — единичный вектор по оси z^*. Величины $\mathbf{u}^{(0)}$, $p^{(0)}$, $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ описывают это равномерное вращение. Нас будут

[1] Данная работа закончена автором в 1943 г. и не была своевременно опубликована. За истекшее время вопросы аналогичного характера вызвали к жизни ряд исследований. В работе автора [1] и ряде работ других авторов изучались спектральные задачи для систем уравнений аналогичного вида, краевые задачи и т. п. Однако эта область механики по-прежнему привлекает внимание и, вероятно, публикация одной из первоначальных работ по этим вопросам представляет интерес.

интересовать лишь разности

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(0)}, \qquad p^* - p^{(0)}, \qquad X^*,\ Y^* \tag{1.2}$$

Будем в дальнейшем отыскивать именно величины (1.2).

Задача, поставленная таким образом, будет представлять собою линейную задачу теории уравнений в частных производных.

Наша цель — выяснить условия, при которых движение (1.1) такого волчка будет устойчиво.

2°. Настоящая работа распадается на три главы: в первой главе мы рассматриваем общую теорию движения волчка с симметричной полостью, наполненной жидкостью, в той постановке, как это указано выше. Во второй главе разбирается теория движения волчка с полостью в форме эллипсоида вращения. Третья глава посвящена волчку с цилиндрической полостью. Изложим вкратце содержание каждой главы.

Общее решение задачи о колебаниях наполненного волчка, как и решение всякой линейной задачи о колебаниях с бесконечным числом степеней свободы, может быть представлено различным образом в виде суммы конечного или бесконечного множества слагаемых, каждое из которых есть, в свою очередь, решение задачи.

В отдельных случаях изучение этих слагаемых может оказаться проще, чем изучение общего решения.

В первой главе для любого симметричного волчка мы разбиваем любое решение задачи, которое естественно предполагать вещественным, на сумму k различных комплексных решений, которые оказываются проще для изучения. Эти решения различаются по тому признаку, какое преобразование испытывают они при повороте волчка на угол $2\pi/k$.

Из этих k решений — только два таких, в которых вместе с жидкостью колеблется и оболочка, причем эти два являются комплексно сопряженными, в силу чего достаточно изучать одно из них; остальные $k - 1$ решений нет нужды рассматривать.

Таким образом, решение, которое изучается далее, по свойствам проще общего решения.

Если полость, занятая жидкостью, есть тело вращения, то задача еще более упрощается, так как при этом удается выделить решение, в котором в полярных координатах r, θ, z зависимость от угла θ носит особо простой характер.

Величины, описывающие движение волчка с полостью, можно рассматривать в некотором фазовом пространстве $\{R\}$, которое является в данном случае бесконечномерным из-за наличия бесконечного числа степеней свободы. Уравнения движения жидкости с оболочкой записываются при этом в виде

$$\frac{dR}{dt} = iBR + R_0 \tag{1.3}$$

где B — линейный оператор, R — искомый элемент или вектор фазового пространства. Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $R = R^{(0)}$ при $t = 0$, символически выражается так:

$$R = e^{iBt} R^{(0)} + \int_0^t e^{iB(t-t_1)} R_0(t_1)\, dt_1 \tag{1.4}$$

Спектральная теория операторов позволяет представить это решение через резольвенту оператора B:

$$\Gamma_\lambda = (\lambda E - B)^{-1} \tag{1.5}$$

Доказывается, что оператор B ограничен и, следовательно, его резольвента регулярна вблизи $\lambda = \infty$. При этом

$$e^{iBt} R_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{i\lambda t} \Gamma_\lambda R_0 \, d\lambda \tag{1.6}$$

где C — произвольный достаточно большой контур.

Остальная часть первой главы посвящена исследованию оператора B и его резольвенты.

В фазовом пространстве $\{R\}$ строится эрмитова форма $Q(R_1, R_2)$, поведение которой определяется величиной

$$L = C_1 + C_2 - A_1 - A_2 - \frac{K}{\omega^2} \qquad (K = g(l_1 M_1 + l_2 M_2)) \tag{1.7}$$

Здесь K — величина опрокидывающего момента силы тяжести, отнесенного к углу отклонения оси z_2 от вертикали.

Если L — положительно, то эрмитова форма Q — положительно определенная, если L — отрицательно, то она распадается на разность положительной формы и одного отрицательного члена комплексной размерности единица в дополнительном пространстве. Справедливо соотношение

$$Q(BR_1, R_2) = Q(R_1, BR_2) \tag{1.8}$$

Оператор B является самосопряженным по отношению к форме Q. Если $L>0$, то оператор Q является так называемым эрмитовым оператором и весь спектр его сосредоточен на вещественной оси. При этом оператор $\exp(iBt)$ ограничен.

Если $L<0$, а нас будет интересовать главным образом этот случай, то удается установить существование не более чем одной пары комплексных собственных значений B. Этот случай является существенно новым в теории операторов.

Наличие или отсутствие этих комплексных собственных значений связано с наличием или отсутствием решений рассматриваемой задачи, содержащей множителем $\exp(\pm \sigma t \pm i\tau t)$, т. е. с вопросом о том, будет ли решение задачи устойчиво. Детальное исследование этого вопроса производится в следующих главах.

3°. Мы уже отметили, что в случае, когда полость — тело вращения, в задаче происходит некоторое упрощение. Оказывается, что фазовое пространство $\{R\}$ может быть при этом разбито на сумму трех взаимно дополнительных подпространств

$$\{R\} = \{R\}_1 + \{\overline{R}\}_1 + \{R\}_2$$

где к пространству $\{R\}_1$ и $\{\overline{R}\}_1$ относятся те движения жидкости, где давление p имеет вид $e^{\mp i\theta} p(r, z)$, а к $\{R\}_2$ — те, у которых давление ортогонально к $e^{\mp i\theta}$. Оператор B оставляет все эти пространства инвариантными. Все движения жидкости разлагаются также в сумму движений в $\{R\}_1$, $\{\overline{R}\}_1$ и в $\{R\}_2$. При этом движения в $\{R\}_2$ таковы, что оболочка волчка в них не участвует.

Еще большее упрощение происходит тогда, когда полость есть эллипсоид вращения. В этом случае в свою очередь фазовое пространство $\{R\}_1$ распадается на некоторое трехмерное пространство $\{R\}_3$ и дополнительное бесконечномерное $\{R\}^3$

$$\{R\}_1 = \{R\}_3 \oplus \{R\}^3$$

Оболочка участвует при этом только в движениях $\{R\}_3$.

Поэтому вопрос об устойчивости движений волчка с эллипсоидальной полостью приводится к изучению поведения корней некоторого уравнения третьей степени в зависимости от параметров. В частном случае, когда оболочка волчка невесома и сам волчок закреплен в центре тяжести, этот вопрос разбирался уже в литературе.

Качественный анализ показывает, что характер движения волчка с эллипсоидальной полостью определяется четырьмя безразмерными параметрами, а именно отношениями чисел

$$A,\ A_2^{(0)},\ C_1,\ C_2,\ \frac{K}{\omega^2}=\nu \tag{1.9}$$

где $A = A_1 + A_2$, $A_2^{(0)}$ — главный экваториальный момент инерции жидкости.

Будем считать A, $A_2^{(0)}$, C_1 и C_2 фиксированными и менять угловую скорость ω (или, что то же, опрокидывающий момент K). Область изменения ν можно при этом разбить на четыре части

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & -\infty<\nu<\nu_1, & \text{(III)} & \nu_2<\nu<\nu_3 \\ \text{(II)} & \nu_1<\nu<\nu_2, & \text{(IV)} & \nu_3<\nu<+\infty \end{array} \tag{1.10}$$

где ν_1, ν_2 и ν_3 — корни некоторого кубического уравнения. В первой и третьей областях движение будет устойчиво, а во второй и четвертой — неустойчиво. Если упомянутое кубическое уравнение имеет только один корень, то область изменения ν разбивается только на две части. Если считать $A = A_2^0$, $C_1 = 0$, т. е. рассматривать волчок с невесомой оболочкой, вращающейся вокруг центра тяжести, то устойчивость его движения будет иметь место тогда, если $c < a$, или если $c > 3a$, где c — полуось эллипсоида, расположенная по оси вращения, а a — другая полуось.

Этот результат известен в литературе.

4°. В случае, когда полость есть цилиндр, задача решается при помощи разложения искомого решения и резольвенты в ряды специального вида. Оказывается возможным построить функцию D, обладающую тем свойством, что корни ее служат собственными значениями оператора. Функция эта имеет существенно особой линией отрезок вещественной оси $-2\omega<\lambda<2\omega$ и регулярна в остальной части плоскости.

Исследование показывает следующее. В отличие от волчка с эллипсоидальной полостью при изменении параметра ν, будет существовать бесконечное множество промежутков, где он будет терять устойчивость, причем величины мнимых частей корней будут то больше, то меньше. Если запустить такой волчок и постепенно убавлять в нем число оборотов, то мы будем много раз попадать в область беспокойных движений.

На основании этого делается тот вывод, что если желать придать движению волчка более спокойный характер, нужно придавать полости форму эллипсоида вращения. Рассчитывается конкретный пример волчка с эллипсоидальной полостью. В случае, если моменты инерции оболочки заметно превышают момент инерции жидкости и полость достаточно удлиненная ($c>3a$), дается приближенная формула для нахождения необходимой величины угловой скорости

$$q > 2\sqrt{KA^{(0)}} \qquad \left(A^{(0)} = A - A_2^{(0)}\frac{2a^2}{c^2-a^2}\right) \tag{1.11}$$

где q — момент количества движения волчка около оси.

§ 2. Математическая формулировка задачи. 1°. Уравнения движения оболочки, рассматриваемой как твердое тело, имеющее неподвижную точку, если считать малыми отклонения от равномерного вращения, будут иметь вид

$$A_1\ddot{X}^* + C_1\omega\dot{Y}^* - M_{y^*} = 0 \qquad A_1\ddot{Y}^* - C_1\omega\dot{X}^* + M_{x^*} = 0 \tag{2.1}$$

где M_{x^*} и M_{y^*} — составляющие моменты всех сил, действующих на оболочку.

Силы эти могут быть трех родов: вес оболочки, давление жидкости и внешние силы. Сила тяжести приложена в точке с координатами

$$l_1X^*,\quad l_1Y^*,\quad l_1\sqrt{1-X^{*2}-Y^{*2}}$$

и направлена в направлении отрицательных z, поэтому моменты ее будут

$$-gl_1M_1Y^*,\qquad gl_1M_1X^* \tag{2.2}$$

Если подсчитать моменты сил давления жидкости на оболочку, то для них получим соответственно выражения

$$\begin{aligned} M_{x^*}(p^*) &= \iint\limits_S p^*\,[y^*\cos nz^* - z^*\cos ny^*]\,dS \\ M_{y^*}(p^*) &= \iint\limits_S p^*\,[z^*\cos nx^* - x^*\cos nz^*]\,dS \end{aligned} \tag{2.3}$$

Полагая моменты внешних сил равными соответственно $M_{x^*}^{(0)}$ и $M_{y^*}^{(0)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} A_1\ddot{X}^* + C_1\omega\dot{Y}^* - gM_1l_1X^* - M_{y^*}(p^*) - M_{y^*}^{(0)} &= 0 \\ A_1\ddot{Y}^* - C_1\omega\dot{X}^* - gM_1l_1Y^* + M_{x^*}(p^*) + M_{x^*}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Выражение для силы давления получим из уравнений гидродинамики. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p^* = \mathbf{F} - gk \tag{2.5}$$

где $\mathbf{F}$ — вектор внешних массовых сил, g — ускорение силы тяжести.

2°. Введем подвижную координатную систему x, y, z, движущуюся так, что ее начало все время совпадает с неподвижной точкой, ось z остается параллельной оси z^*, а оси x, y вращаются вокруг z с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Абсолютное ускорение частицы жидкости составится из относительного в этой системе, переносного и Кориолисова. Будем иметь

$$\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} = \frac{d\mathbf{u}'}{dt} + (\mathbf{u}'\,\triangle)\,\mathbf{u}' + (-\omega^2 x\mathbf{i} - \omega^2 y\mathbf{j}) - 2\boldsymbol{\omega}\,(\mathbf{u}'\times\mathbf{k}) \tag{2.6}$$

где $\mathbf{u}'$ — вектор относительного движения в координатах x, y, z.

Положим еще

$$p^* = -g\rho z + \frac{\omega^2\rho^2(x^2+y^2)}{2} + p' \tag{2.7}$$

Тогда уравнение (2.6) после отбрасывания малых членов можно будет написать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_x'}{\partial t} - 2\omega u_y' + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = F_x, \qquad \frac{\partial u_z'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} = F_z \\ &\frac{\partial u_y'}{\partial t} + 2\omega u_x' + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} = F_y, \qquad \frac{\partial u_x'}{\partial x} + \frac{\partial u_y'}{\partial y} + \frac{\partial u_z'}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставив (2.7) в (2.3) и (2.4), будем иметь с точностью до малых высшего порядка

$$\begin{aligned} M_{x^*}(p^* - p') &= \iiint\limits_V [-g\rho y^* - \omega^2\rho y^* z^*]\,dv \\ M_{y^*}(p^* - p') &= \iiint\limits_V [g\rho x^* + \omega^2\rho x^* z^*]\,dv \end{aligned} \tag{2.9}$$

но

$$
\iiint\limits_V \rho y^* dv = l_2 M_2 Y^*, \qquad \iiint\limits_V \rho x^* dv = l_2 M_2 X^*
$$

$$
\iiint\limits_V z^* dv = l_2, \qquad \iiint\limits_V y^* z^* dv = A^*_{2y,\, z}, \qquad \iiint\limits_V x^* z^* dv = A^*_{2x,\, z} \tag{2.10}
$$

где $A^*_{2y,\, z}$ и $A^*_{2x,\, z}$ — составляющие тензора моментов инерции объема V относительно осей x^*, y^*, z^*. Эти составляющие представимы в виде

$$
A^*_{2x,\, z} = \frac{C_2}{2}(\cos x_2 x^* \cos x_2 z^* + \cos y_2 x^* \cos y_2 z^*) +
$$

$$
+ \left(A_2 - \frac{C_2}{2}\right) \cos z_2 x^* \cos z_2 z^* = (A_2 - C_2) \cos z_2 x^* \cos z_2 z^*
$$

$$
A^*_{2y,\, z} = (A_2 - C_2) Y^* \tag{2.11}
$$

Таким образом, получится

$$
A_1 \ddot{X}^* + C_1 \omega \dot{Y}^* - K_2 X^* - M_{y^*}(p') - M_{y^*}^{(0)} = 0
$$

$$
A_1 \ddot{Y}^* - C_1 \omega \dot{X}^* - K_2 Y^* + M_{x^*}(p') - M_{x^*}^{(0)} = 0 \tag{2.12}
$$

где

$$
K_2 = g(l_1 M_1 + l_2 M_2) + \omega^2 (A_2 - C_2)
$$

Для того чтобы удобнее записать граничные условия, перейдем от координат X^* и Y^* к другим. Пусть

$$
X^* + iY^* = Z^* \tag{2.13}
$$

Умножая второе уравнение (2.12) на i и складывая, получим

$$
A_1 \ddot{Z}^* - C_1 \omega i \dot{Z}^* - K_2 Z^* + 2iN^*(p') + 2iN_*^{(0)} = 0 \tag{2.14}
$$

где

$$
2N^*(p') = M_{x^*}(p') + iM_{y^*}(p'), \qquad 2N_*^{(0)} = M_{x^*}^{(0)} + iM_{y^*}^{(0)} \tag{2.15}
$$

Введем обозначение $\mu^* = z^*(\cos nx^* + i \cos ny^*) - (x^* + iy^*) \cos nz^*$; тогда

$$
2N^*(p') = i \iint\limits_S \mu^* p' dS
$$

Пусть еще $Z^* = e^{i\omega t} Z$. Очевидно, вещественная и мнимая части комплексного числа $Z = X + iY$ дают величину отклонения единичного вектора оси волчка в координатах x, y, z. Уравнение (2.14) запишется

$$
A_1 \ddot{Z} - (C_1 - 2A_1) \omega i \dot{Z} + L\omega^2 Z + ie^{-i\omega t} 2[N^*(p') + N_*^{(0)}] = 0 \tag{2.16}
$$

где, как указано выше, $L = C_1 + C_2 - A_1 - A_* - \dfrac{K}{\omega^2}$. Очевидно,

$$
e^{-i\omega t} N^*(p') = N(p'), \qquad e^{-i\omega t} N_*^{(0)} = N^{(0)}
$$

Здесь

$$
2N(p') = i \iint\limits_S \mu p' dS, \qquad \mu = z(\cos nx + i \cos ny) - (x + iy) \cos nz
$$

3°. Нормальная составляющая скорости $\mathbf{u}'$ на поверхности S должна, очевидно, совпадать с нормальной составляющей скорости, соответствующей точки поверхности S в системе x^*, y^*, z^*.

Обозначая через $\mathbf{w}$ вектор переносной скорости S в неподвижной системе, мы получим

$$
w_x = \dot{X} z, \qquad w_y = \dot{Y} z, \qquad w_z = \dot{X} x - \dot{Y} y \tag{2.17}
$$

Откуда

$$u_n'|_S = \dot{X}(z\cos nx - x\cos nz) + \dot{Y}(z\cos ny - y\cos nz) \qquad (2.18)$$

Условие (2.18) даст возможность решать поставленную задачу. Для удобства выразим условие (2.18) через $\dot{Z}$; получим

$$u_n'|_S = \frac{1}{2}(\dot{Z}\bar{\mu} + \dot{\bar{Z}}\mu) \qquad (2.19)$$

4°. Симметрия полости, занятой жидкостью, позволяет расщепить общее решение задачи на несколько частных, подобно тому как в области с осевой симметрией бесконечного порядка можно разложить решение в ряд Фурье по циклической координате. Однако в случае, когда есть лишь симметрия конечного порядка, это разложение неосуществимо и мы используем другой прием.

Пусть φ — некоторая функция, определенная в области V вещественных переменных x, y, z. Обозначим комплексную координату

$$x + iy = \zeta, \qquad x - iy = \bar{\zeta} \qquad (2.20)$$

и будем считать ζ и $\bar{\zeta}$ независимыми переменными, меняющимися вдоль соответственного двумерного многообразия.

В соответствие данной функции $\varphi(x, y)$ введем k новых функций $\varphi_s(\zeta_1\bar{\zeta})$ $(s = 1, \ldots, k-1)$

$$\varphi_{(s)}(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} e^{s2\pi il/k}\varphi(\zeta e^{2\pi il/k}, \bar{\zeta}e^{-2\pi il/k}) \qquad (2.21)$$

Отметим некоторые простые свойства символа $\varphi_{(s)}$. Так, будем иметь

$$\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_{(s)}(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\varphi(\zeta e^{2\pi il/k}, \bar{\zeta}e^{-2\pi il/k})\left(\sum_{s=0}^{k-1}e^{s2\pi il/k}\right)$$

Но

$$\sum_{s=0}^{k-1}(e^{2\pi il/k})^s = \frac{(e^{2\pi il/k})^k - 1}{e^{2\pi il/k} - 1} = \begin{cases} 0, & l \not\equiv 0 \pmod{k} \\ k, & l = 0 \pmod{k} \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_{(s)}(\zeta, \bar{\zeta}) = \varphi(\zeta, \bar{\zeta}) \qquad (2.22)$$

Функция φ_s обладает своеобразной периодичностью

$$\varphi_{(s)}(\zeta e^{2\pi i/k}, \bar{\zeta}e^{-2\pi i/k}) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}e^{s2\pi il/k}\varphi(\zeta e^{2\pi i(l+1)/k}, \quad \bar{\zeta}e^{-2\pi i(l+1)/k}) =$$

$$= e^{-s2\pi i/k}\varphi_{(s)}(\zeta, \bar{\zeta}) \qquad (2.23)$$

Очевидно,

$$\varphi_{(s_1)} = \varphi_{(s_2)} \quad \text{при } s_1 \equiv s_2 \pmod{k}$$

Если φ — вещественная функция, то

$$\varphi_{(s_1)} = \varphi_{(s_2)} \quad \text{при } s_2 \equiv k - s_1 \pmod{k} \qquad (2.24)$$

Формула (2.22) дает искомое расщепление решения на конечное число слагаемых $k = 0, \ldots, k-1$. Строго говоря, дифференцирование φ по ζ или $\bar{\zeta}$ не имеет смысла, однако если положить

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \qquad (2.25)$$

то все обычные формулы дифференцирования сохраняют смысл.

Пользуясь этим и дифференцируя (2.21), получим

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\varphi_{(s)}(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} e^{(s+1)2\pi il/k}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(\zeta e^{2\pi il/k}, \bar{\zeta}e^{-2\pi il/k}) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)_{(s+1)}$$

и далее

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\varphi_{(s)}(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} e^{(s-1)2\pi il/k}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta e^{2\pi il/k}, \bar{\zeta}e^{-2\pi il/k}) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}\right)_{(s-1)} \tag{2.26}$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\varphi_{(s)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)_{(s+1)}, \qquad \frac{\partial \varphi_{(s)}}{\partial \bar{\zeta}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}\right)_{(s-1)}$$

Отметим еще формулу

$$\sum_{s=0}^{k-1} e^{s2\pi il/k}\varphi_{(s)} = \sum_{s=0}^{k-1}\varphi(\zeta e^{-2\pi il/k}, \bar{\zeta}e^{2\pi il/k}) \tag{2.27}$$

которая следует из преобразования

$$\sum_{s=0}^{k-1} e^{s2\pi il/k}\varphi_{(s)} = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\varphi(\zeta e^{2\pi il/k}, \bar{\zeta}e^{-2\pi il/k})\left(\sum_{s=0}^{k-1} e^{s2\pi i(t+l)/k}\right)$$

5°. Вводим в уравнение (2.8) переменные ζ и $\bar{\zeta}$. Мы имеем

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial \zeta} + \frac{\partial p'}{\partial \bar{\zeta}'}, \qquad \frac{\partial p'}{\partial y} = i\left(\frac{\partial p'}{\partial \zeta} - \frac{\partial p'}{\partial \bar{\zeta}}\right) \tag{2.28}$$

Полагая

$$u_x' + iu_y' = u_\zeta', \quad u_x' - iu_y' = u_{\bar{\zeta}}', \quad F_x + iF_y = F_\zeta, \quad F_x - iF_y = F_{\bar{\zeta}}$$

умножая второе уравнение из левой группы (2.8) на i, прибавляя и вычитая из первого, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_\zeta'}{\partial t} + 2\omega i u_\zeta' + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial \bar{\zeta}} = F_\zeta, \qquad \frac{\partial u_z'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} = F_z \\ &\frac{\partial u_{\bar{\zeta}}'}{\partial t} - 2\omega i u_{\bar{\zeta}}' + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial \zeta} = F_{\bar{\zeta}}, \qquad \frac{\partial u_\zeta'}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_{\bar{\zeta}}'}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Применим к уравнениям (2.29) операцию (s). Получим

$$\frac{\partial u'_{\zeta,(s-1)}}{\partial t} + 2\omega i u'_{\zeta,(s-1)} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p'_{(s)}}{\partial \bar{\zeta}} = F_{\zeta,(s-1)} \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial u'_{\bar{\zeta}(s+1)}}{\partial t} - 2\omega i u'_{\bar{\zeta},(s+1)} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p'_{(s)}}{\partial \zeta} - F_{\bar{\zeta},(s+1)}$$

$$\frac{\partial u'_{z(s)}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'_{(s)}}{\partial z} = F(z), \quad \frac{\partial u'_{\zeta,(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial u'_{\bar{\zeta},(s+1)}}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial u'_{z,(s)}}{\partial y} = 0$$

$$(s = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Система уравнений таким образом также расщепляется; вместо одной системы (2.8) мы получили k различных систем, связывающих $u_{\zeta,(s-1)}$, $u_{\bar{\zeta},(s+1)}$, $p_{(s)}'$, $u_{z,(s)}$.

Займемся теперь исследованием граничных условий, а также оператора $N(p')$. Заменяя в условиях (2.19) u_x и u_y их выражениями, получим

$$\begin{aligned} u_n' &= u_x'\cos nx + u_y'\cos ny + u_z'\cos nz = \\ &= \tfrac{1}{2}u_\zeta'(\cos nx - i\cos ny) + \tfrac{1}{2}u_{\bar{\zeta}}'(\cos nx + i\cos ny) + u_z'\cos nz = \\ &= \tfrac{1}{2}u_\zeta'\bar{\lambda}_1 + \tfrac{1}{2}u_{\bar{\zeta}}'\lambda_1 + u_z'\cos nz = \tfrac{1}{2}\dot{\bar{Z}}\mu + \tfrac{1}{2}\dot{Z}\mu \end{aligned} \tag{2.31}$$

где

$$\lambda_1 = \cos nx + i\cos ny \tag{2.32}$$

Очевидно, будем иметь

$$
\begin{gathered}
\lambda_1(\zeta e^{2\pi i/k},\ \bar{\zeta} e^{-2\pi i/k}) = e^{2\pi i/k}\,\lambda_1(\zeta,\ \bar{\zeta}) \\
\bar{\lambda}_1(\zeta e^{2\pi i/k},\ \bar{\zeta} e^{-2\pi i/k}) = e^{-2\pi i/k}\bar{\lambda}_1(\zeta,\ \bar{\zeta}) \\
\mu(\zeta e^{2\pi i/k},\ \bar{\zeta} e^{-2\pi i/k}) = e^{2\pi i/k}\mu\ (\zeta,\ \bar{\zeta}) \\
\bar{\mu}(\zeta e^{2\pi i/k},\ \bar{\zeta} e^{-2\pi i/k}) = e^{-2\pi i/k}\bar{\mu}(\zeta,\ \bar{\zeta})
\end{gathered}
\tag{2.33}
$$

Отсюда

$$
\lambda_1 = \lambda_{1,(-1)}, \qquad \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_{1,(1)}, \qquad \mu = \mu_{(-1)}, \qquad \bar{\mu} = \bar{\mu}_{(1)} \tag{2.34}
$$

Применяя операцию (s) к обеим частям (2.31), получим

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}u'_{\zeta,\,s-1}\bar{\lambda}_1 + \frac{1}{2}u'_{\bar{\zeta},\,(s+1)}\lambda_1 + u'_{z,\,(s)}\cos nz = \\
= \frac{1}{2}\dot{Z}\bar{\mu}_{(s)} + \frac{1}{2}\dot{\bar{Z}}\mu_{(s)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\dot{Z}\bar{\mu}, & s \equiv +1 \pmod{k} \\ \frac{1}{2}\dot{\bar{Z}}\mu, & s \equiv -1 \pmod{k} \\ 0, & s \not\equiv \pm 1 \pmod{k} \end{cases}
\end{gathered}
\tag{2.35}
$$

Подставляя в $N(p')$ вместо p' его выражение, получим еще

$$
2N(p') = i\sum_{s=0}^{k-1}\iint_S p_{(s)}'\,\mu dS \tag{2.36}
$$

Но

$$
\iint_S p_{(s)}\,\mu dS = e^{2\pi i(1-s)/k}\iint_S p_{(s)}'\,\mu dS \tag{2.37}
$$

В этом легко убедиться поворотом координатных осей. Следовательно, все интегралы (2.36) равны нулю, кроме того, в котором $s = 1$, и, значит,

$$
2N(p') = i\iint_S p'_{(1)}\,\mu dS, \qquad 2\bar{N}(\bar{p}') = -i\iint_S \bar{p}'_{(-1)}\,\bar{\mu} dS \tag{2.38}
$$

Граничные условия для систем (2.30) оказались, таким образом, также распавшимися и не зависимыми одно от другого.

Системы (2.30) при $s \equiv \pm 1 \pmod{k}$ имеют граничные условия для u_ζ', $u_{\bar{\zeta}}'$, u_z неоднородные того же типа, что и (2.31); для $s \not\equiv \pm 1 \pmod{k}$ уравнения будут однородными.

В граничные условия для (2.30) при $s = 1$ входит $\dot{Z}$, которое связано таким образом с величинами

$$
u'_{\zeta,(0)}, \quad u'_{\bar{\zeta},(2)}, \quad u_{z',(1)}, \quad p'_{(1)} \tag{2.39}
$$

С другой стороны, величина Z удовлетворяет уравнению

$$
A_1\ddot{Z} - B_1\omega i\dot{Z} + L\omega^2 Z + 2iN(p_{(1)}') + 2iN^{(0)} = 0 \quad (B_1 = C_1 - 2A_1) \tag{2.40}
$$

в котором участвует также $p_{(1)}'$. Переменные (2.39) и Z связаны, таким образом, системой уравнений. Аналогично в системе (2.30) при $s = -1$ граничные условия связаны с $\bar{Z}$. Уравнение

$$
A_1\ddot{\bar{Z}} + B_1\omega i\dot{\bar{Z}} + L\omega^2\bar{Z} - 2i\bar{N}(p'_{,(-1)}) - 2i\bar{N}^{(0)} = 0 \tag{2.41}
$$

дает другую связь между $\bar{Z}$ и функциями

$$
u'_{\zeta,(-2)}, \quad u'_{\bar{\zeta},(0)}, \quad u'_{z,(-1)}, \quad p'_{(-1)}
$$

6°. Если полость, занятая жидкостью, имеет форму тела вращения, то величины $p'_{(1)}$ и $p'_{(-1)}$ будут иметь особо простой вид. При этом, очевидно, условия (2.23) выполняются при любом k. Допустим, что $p_{(1)}'$ разлагается в ряд

$$p_{(1)}' = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{il\theta} p_{l,(1)}$$

Подставляя это выражение в формулу (2.23), получим

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{li(\theta+2\pi/k)} p_{l,(1)} = e^{-2\pi i/k} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{li\theta} p_{l,(1)}$$

Отсюда

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} (e^{2\pi il/k} - e^{-2\pi i/k}) p_{l,(1)} e^{li\theta} = 0$$

и, значит, или

$$e^{2\pi il/k} = e^{-2\pi i/k}, \quad \text{или} \quad p_{l,(1)} = 0$$

Следовательно, $l \equiv -1 \pmod{k}$.

Таким образом, в разложение $p_{(1)}$ могут входить вообще лишь члены, содержащие $e^{-i\theta}$, $e^{(k-1)i\theta}$, $e^{(2k-1)i\theta}$ и т. д. Если это имеет место при всех k, то, очевидно, $p_{(1)}$ содержит множителем $e^{-i\theta}$.

Аналогично $p_{(-1)}$ содержит лишь члены $e^{i\theta}$, $e^{(k+1)i\theta}$, $e^{(k+1)i\theta}$ и т. д., и, если это имеет место для всех k, то $p_{(-1)}$ делится на $e^{i\theta}$.

7°. В следующих параграфах мы займемся исследованием решений (2.30), а сейчас дадим еще формулы для некоторых выражений, имеющих определенный физический смысл. Обозначим

$$\begin{gathered}
u'_{\bar\zeta,(s+1)} + u'_{\zeta,(s-1)} = v_{x,[s]}, \qquad u'_{\bar\zeta,(s+1)} - u'_{\zeta,(s-1)} = -iv_{y,[s]} \\
2u'_{z,(s)} = v_{z,[s]}, \qquad 2p'_{(s)} = p_{[s]}, \qquad F_{\bar\zeta,(s+1)} + F_{\zeta,(s-1)} = F_{x,[s]} \\
F_{\bar\zeta,(s+1)} - F_{\zeta,(s-1)} = iF_{y,[s]}, \qquad 2F_{z,(s)} = F_{z,[s]}
\end{gathered} \tag{2.42}$$

Очевидно

$$\begin{aligned}
u_x' &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \qquad v_{x,[s]} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{k-1} (v_{x,[s]} + \bar v_{x,[s]}) \\
u_y' &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \qquad v_{y,[s]} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{k-1} (v_{y,[s]} + \bar v_{y,[s]}) \\
u_z' &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \qquad v_{z,[s]} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{k-1} (v_{z,[s]} + \bar v_{z,[s]}) \\
F_x &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \qquad F_{x,[s]} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{k-1} (F_{x,[s]} + \bar F_{x,[s]}) \\
F_y &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \qquad F_{y,[s]} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{k-1} (F_{y,[s]} + \bar F_{y,[s]}) \\
F_z &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \qquad F_{z,[s]} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{k-1} (F_{z,[s]} + \bar F_{z,[s]}) \\
p' &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \qquad p_{[s]} = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{k=1} (p'_{[s]} + \bar p'_{[s]})
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Уравнения, которым удовлетворяют $v_{[s]}$, получаются из уравнений (2.30) сложением и вычитанием.

Мы получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_{x,[s]}}{\partial t} - 2\omega v_{y,[s]} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{[s]}}{\partial x} = F_{x,[s]}, \qquad \frac{\partial v_{z,[s]}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{[s]}}{\partial z} = F_{z,[s]} \\ &\frac{\partial v_{y,[s]}}{\partial t} + 2\omega v_{x,[s]} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{[s]}}{\partial y} = F_{y,[s]}, \qquad \frac{\partial v_{x,[s]}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y,[s]}}{\partial y} + \frac{\partial v_{z,[s]}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

и далее,

$$v_{x,[s]}\cos nx + v_{y,[s]}\cos ny + v_{z,[s]}\cos nz = \begin{cases} \dot{Z}\bar{\mu}, & s \equiv 1 \pmod{k} \\ \dot{\bar{Z}}\mu, & s \equiv -1 \pmod{k} \\ 0, & s \not\equiv \pm 1 \pmod{k} \end{cases} \tag{2.45}$$

Эти уравнения совпадают с (2.8), но связаны с другими граничными условиями. Вместе с (2.40) и (2.41) они дают полную систему соотношений.

Мы рассматривали вначале лишь вещественные значения $\mathbf{u}'$, X, Y и p, поэтому все функции, отвечающие значениям $s \equiv -1 \pmod{k}$, будут просто сопряженными с теми, которые отвечают значениям $s \equiv +1 \pmod{k}$.

Решения, отвечающие значениям $s \not\equiv \pm 1 \pmod{k}$, не представляют интереса, так как в этих движениях оболочка не участвует. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь тот случай, когда $s = 1$.

8°. Если считать вектор $\mathbf{F}_{[s]}$, стоящий в правой части (2.44), таким, что его компоненты непрерывны вплоть до границы области и имеют непрерывные производные внутри, то этот вектор можно разбить на сумму двух слагаемых, так что

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi} \tag{2.46}$$

где

$$\operatorname{div}\mathbf{\Psi} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{\Phi} = 0, \qquad \Psi_n|_S = 0 \tag{2.47}$$

Далее можно положить

$$\mathbf{\Phi} = \operatorname{grad}\Xi + i\varphi\omega\operatorname{grad}\chi, \qquad \iint\limits_S \Xi\mu\, dS = 0 \tag{2.48}$$

а функция χ определяется из условий

$$\Delta\chi = 0, \qquad \left.\frac{\partial\chi}{\partial n}\right|_S = \mu \tag{2.49}$$

которые, очевидно, совместны в силу равенства

$$\iint\limits_S \mu\, dS = 0 \tag{2.50}$$

Соответственно (2.46) и (2.48), общее решение задачи можно разбить на два решения, отвечающих двум случаям

$$\text{(I)} \quad \Xi = 0, \qquad \text{(II)} \quad \varphi = 0, \quad N^{(0)} = 0, \quad \mathbf{\Psi} = 0 \tag{2.51}$$

Для случая (II) частное решение задачи, как легко проверить непосредственно, будет иметь вид

$$\mathbf{v}_{[1]} = 0, \qquad Z = 0, \qquad p_{[1]} = \rho\Xi \tag{2.52}$$

При этом, очевидно, можно ограничиться в дальнейшем случаем (I).

§ 3. Векторное пространство и оператор для производной. 1°. Предположим, что функция χ имеет производные, интегрируемые с квадратом модуля по области v и пусть

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right) d \;= \iint\limits_S \chi\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial n}\, dS = \iint\limits_S \bar{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial n}\, dS = 2\varkappa^2 \tag{3.1}$$

Положим

$$\dot{Z} = i\omega W \tag{3.2}$$

Уравнение (2.40) перепишется при этом в виде

$$A_1\dot{W} - B\omega iW - L\omega iZ + \frac{1}{\omega} N(p_{[1]}) + \frac{2}{\omega} N^{(0)} = 0 \tag{3.3}$$

Умножим уравнения (2.44) на $\partial\chi / \partial x$, $\partial\chi / \partial y$, $\partial\chi / \partial z$ соответственно, затем сложим и проинтегрируем по V. Получим

$$\iiint\limits_V \Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(v_{x,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial x} + v_{y,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial y} + v_{z,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial z}\Big) - 2\omega v_{y,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial x} +$$

$$+ 2\omega v_{x,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial p_{[1]}}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial p_{[1]}}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial p_{[1]}}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial z}\Big)\Big] dv =$$

$$= \iiint\limits_V \Big(F_{x,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial x} + F_{y,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial y} + F_{z,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial z}\Big) dv \equiv$$

$$\equiv \iint\limits_S \Big[\chi\frac{\partial}{\partial t}(v_{x,[1]}\cos nx + v_{y,[1]}\cos ny + v_{z,[1]}\cos nz) + \frac{1}{\rho}\, p\,\frac{\partial\chi}{\partial n}\Big] dv -$$

$$- 2\omega\iiint\limits_V v_{y,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial x} - v_{x,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial y}\Big) dV \tag{3.4}$$

или, в силу условия (2.47),

$$2iv\dot{W}\varkappa^2 - \frac{2i}{\rho} N(p_{[1]}) = 2\omega\iiint\limits_V \Big(v_{y,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial x} - v_{x,[1]}\frac{\partial\chi}{\partial y}\Big) dv + 2i\omega\varphi\varkappa^2 \tag{3.5}$$

Пусть теперь

$$\mathbf{v}_{[1]} = i\omega W \operatorname{grad}\bar{\chi} + \mathbf{v}, \qquad p_{[1]} = i\omega(\varphi - \dot{W})\bar{\chi} + p \tag{3.6}$$

$$\iiint\limits_V \Big(\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}\Big) dV = iE \tag{3.7}$$

Тогда

$$\rho\varkappa^2 W - \frac{1}{\omega} N(p) = i\rho\omega WE - i\rho\iiint\limits_V \Big(v_y\frac{\partial\chi}{\partial x} - v_x\frac{\partial\chi}{\partial y}\Big) dV \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) совместно с (3.3) дает

$$(A_1 + \rho\varkappa^2)\dot{W} - (B_1 + \rho E)\omega iW - L\omega iZ -$$

$$- \rho i\iiint\limits_V \Big(v_x\frac{\partial\chi}{\partial y} - v_y\frac{\partial\chi}{\partial x}\Big) dV - \varphi\varkappa^2 + \frac{2}{\omega} N^{(0)} = 0 \tag{3.9}$$

Возвращаясь к рассматриваемой системе, получим

$$v_n|_S = 0, \qquad \operatorname{div}\bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\omega v_y + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - 2i\omega^2 W\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y} = \Psi_x$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\omega v_x + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + 2i\omega^2 W\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x} = \Psi_y \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \Psi_z$$

Систему уравнений (3.9), (3.10) и (3.2) будем называть системой D. Вместе с нею иногда будем рассматривать систему $\bar{D}$.

Взяв оператор div от левой части уравнений (3.10), получим

$$2\omega\Big(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\Big) + \frac{1}{\rho}\triangle p = 0 \tag{3.11}$$

Те же уравнения (3.10) дают

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_S = -2\rho\omega(v_x \cos ny - v_y \cos nx) - 2i\omega^2\rho\left(\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}\cos ny - \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}\cos nx\right) w \qquad (3.12)$$

Условие (3.12) непротиворечиво с (3.11). Как видим, функция p вполне определяется (с точностью до постоянного слагаемого) заданием $\mathbf{v}$ и w. Положим

$$\Delta p_0 = 2\omega\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial p_0}{\partial n} = 2\rho\omega(v_y \cos nx - v_x \cos ny) \qquad (3.13)$$

$$\frac{\partial\bar{\chi}_1}{\partial n} = -2\omega\left(\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}\cos nx - \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}\cos ny\right)$$

$$\Delta\bar{\chi}_1 = 0$$

будем иметь

$$p = p_0 - i\omega\rho W\bar{\chi}_1 \qquad (3.14)$$

Отсюда видно, что, зная значения $\mathbf{v}$, Z, W, Ψ, $N^{(0)}$ и φ в какой-либо момент времени, можем вычислить $d\mathbf{v}/dt$, dZ/dt и dW/dt.

2°. Введем новые обозначения; будем называть систему Z, W, $\mathbf{v}$, где Z, W — комплексные числа, а $\mathbf{v}$ — векторная функция в области V, подчиненная некоторым добавочным условиям, элементом векторного пространства $\{R\}$ и обозначать знаком R.

Относительно $\mathbf{v}$ сделаем два предположения:

(а) интеграл

$$\iiint\limits_V (v_x\bar{v}_x + v_y\bar{v}_y + v_z\bar{v}_z)\, dV = \|\mathbf{v}\|^2 < \infty$$

(б) какова бы ни была функция ψ, имеющая в области V непрерывные производные, справедливо тождество

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}v_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}v_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}v_z\right) dV = 0 \qquad (3.15)$$

Множество векторов $\mathbf{v}$, удовлетворяющих условиям (а) и (б), образуют гильбертово пространство H. Докажем лемму.

Лемма 3.1. Для любого элемента $\mathbf{v}$ из H найдется другой такой элемент $\mathbf{v}_\varepsilon$, который обладает такими свойствами, что

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}\| < \varepsilon$$

Функция $\mathbf{v}_\varepsilon$ имеет непрерывные производные любого порядка внутри V и равна тождественно нулю в некоторой области V_η, где V_η — внутренняя по отношению к V область, расстояние каждой точки которой до границы V превосходит η.

Для доказательства этой леммы за $\mathbf{v}_\varepsilon$ достаточно взять функцию

$$\mathbf{v}_\varepsilon(p) = \frac{1}{C}\iiint\limits_{V_{2\eta}} \exp\frac{r^2}{r^2-\eta^2}\,\mathbf{v}(P')dV_{P'} \qquad (r(P,P') < \eta) \qquad (3.16)$$

где P' — переменная точка $r(P, P')$ — расстояние от P' до P, C — некоторая постоянная. Функция (3.16) является так называемой средней функцией для $\mathbf{v}$, и ее свойства подробно рассмотрены автором в работе [2].

3°. Уравнения системы D могут быть записаны в виде

$$\dot{R} - R_0 = iBR \qquad (3.17)$$

где через R_0 обозначен элемент $\{R\}$ с составляющими

$$\left(0, \frac{\varphi\varkappa^2 - (2/\omega) N^{(0)}}{A + \varkappa^2\rho}, \Psi\right) \tag{3.18}$$

а B — линейный оператор, определенный для всех элементов этого пространства, у которых $\mathbf{v}$ имеет непрерывные производные.

Для удобства выпишем еще раз формулы, определяющие этот оператор. Если положить $BR = R_1$, где $R_1\{Z_1, w_1, \mathbf{v}_1\}$, то

$$\begin{aligned} v_{1x} &= -2\omega i v_y + \frac{i}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega^2 w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial y}, \\ v_{1y} &= \quad 2\omega i v_x + \frac{i}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega^2 w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial x}, \end{aligned} \qquad v_{1z} = \frac{i}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{3.19}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \qquad v_n|_S = 0 \tag{3.20}$$

$$(A_1 + \rho\varkappa^2) w_1 = (B_1 + \rho E)\,\omega w + L\omega Z + \rho \iiint\limits_V \left(v_x \frac{\partial \chi}{\partial y} - v_y \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) dV \tag{3.21}$$

$$Z_1 = \omega w \tag{3.22}$$

Кроме уравнения (3.17), будем рассматривать соответствующее однородное уравнение

$$\dot{R} = iBR \tag{3.23}$$

Докажем, что оператор B ограничен и, следовательно, его можно распространить на все пространство. Из уравнений (3.19) вытекает

$$\begin{aligned} &4\omega^2 (v_x\bar{v}_x + v_y\bar{v}_y) - 4i\omega^3\bar{w}\left(v_x\frac{\partial\chi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\chi}{\partial y}\right) + 4i\omega^3 w\left(\bar{v}_x\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}\right) + \\ &+ 4\omega^4 w\bar{w}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}\right) = (v_{1x}\bar{v}_{1x} + v_{1y}\bar{v}_{1y} + v_{1z}\bar{v}_{1z}) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right) + \frac{2}{\rho}\left[\left(v_{1x}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + v_{1y}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + v_{1z}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right) + \left(\bar{v}_{1x}\frac{\partial p}{\partial x} + \bar{v}_{1y}\frac{\partial p}{\partial y} + \bar{v}_{1z}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right] \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по V,

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 + \frac{1}{\rho^2}\iiint\limits_V (\operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad}\bar{p})\, dV = 4\omega^2 \iiint\limits_V (v_x\bar{v}_x + v_y\bar{v}_y)\, dV - \\ - 4i\omega^3\bar{w}\iiint\limits_V \left(v_x\frac{\partial\chi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\chi}{\partial y}\right) dV + 4i\omega^3 w \iiint\limits_V \left(\bar{v}_x\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}\right) dV + \\ + 4\omega^4 w\bar{w}\iiint\limits_V \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}\right) dV \end{aligned} \tag{3.24}$$

Если считать $w\bar{w} = \|w\|^2$, $Z\bar{Z} = \|Z\|^2$, то, применяя неравенство Шварца — Буняковского, из (3.24) имеем

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 \leqslant 4\omega^2 [\|\mathbf{v}\|^2 + 2\varkappa\omega\|\mathbf{v}\| \cdot \|w\| + \varkappa^2\omega^2\|w\|^2]$$

или

$$\|\mathbf{v}_1\| \leqslant 2\omega [\|\mathbf{v}\| + \varkappa\|w\|] \tag{3.25}$$

Если теперь приближаться к данному вектору R при помощи такого R_ε, для которого $\mathbf{v}_\varepsilon$ имеет непрерывные производные, то для R_ε можно будет вычислить $iBR_\varepsilon = R_{\varepsilon_1}$.

Устремляя ε к нулю, можно видеть, что $\|\mathbf{v}_{1,\varepsilon_1} - \mathbf{v}_{1,\varepsilon_2}\| \to 0$ и, следовательно, существует предел $\mathbf{v}_\varepsilon$, принадлежащий H, т. е.

$$\lim iBR_\varepsilon \in \{R\}$$

что и требовалось доказать.

4°. Составим комплексную билинейную форму от двух элементов $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ пространства $\{R\}$

$$Q(R^{(1)}, R^{(2)}) = (A_1 + \rho\varkappa^2)\, w^{(1)}\overline{w}^{(2)} + $$
$$+ LZ^{(1)}\overline{Z}^{(2)} + \frac{\rho}{2\omega^2}\iiint\limits_V [v_x{}^{(1)}\overline{v}_x{}^{(2)} + v_y{}^{(1)}\overline{v}_y{}^{(2)} + v_z{}^{(1)}\overline{v}_z{}^{(2)}]\, dv \qquad (3.26)$$

Очевидно,

$$Q(R^{(1)}, R^{(2)}) = Q(\overline{R}_2{}^{(2)}\, \overline{R}^{(1)}), \qquad Q(\lambda R^{(1)}, R^{(2)}) = \lambda Q(R^{(1)}, R^{(2)}) \qquad (3.27)$$

Форму $Q(R^{(1)}, R^{(2)})$ будем называть скалярным произведением $R^{(1)}$ на $R^{(2)}$. Докажем формулу

$$Q(BR^{(1)}, R^{(2)}) = Q(R^{(1)}, BR^{(2)}) \qquad (3.28)$$

Удобно говорить, что оператор B является обобщенным эрмитовым в том смысле, что он определен на всем пространстве $\{R\}$ и удовлетворяет условию (3.28). По условию имеем

$$Q(BR^{(1)}, R^{(2)}) = L\omega w^{(1)}\overline{Z}^{(2)} + L\omega Z^{(1)}\overline{w}^{(2)} + (B_1 + \rho E)\, w^{(1)}\overline{w}^{(2)} +$$
$$+ \rho\overline{w}^{(2)}\iiint\limits_V \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}v_x{}^{(1)} - \frac{\partial\chi}{\partial x}v_y{}^{(1)}\right) dV + \rho w^{(1)}\iiint\limits_V \left(\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial y}\overline{v}_x{}^{(2)} - \frac{\partial\overline{\chi}}{\partial x}\overline{v}_y{}^{(2)}\right) dV +$$
$$+ \frac{\rho}{2\omega^2}\iiint\limits_V \left\{\left[\overline{v}_x{}^{(2)}\left(2\omega v_y{}^{(1)} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}\right) + \overline{v}_y{}^{(2)}\left(-2\omega v_x{}^{(1)} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}\right) -\right.\right.$$
$$\left. - \overline{v}_z{}^{(2)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}\right] + \left[v_x{}^{(1)}\left(2\omega\overline{v}_y{}^{(2)} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}^{(2)}}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left.\left. + v_y{}^{(1)}\left(-2\omega\overline{v}_x{}^{(2)} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}^{(2)}}{\partial y}\right) - v_z{}^{(1)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}^{(2)}}{\partial z}\right]\right\} dV \qquad (3.29)$$

и в силу (3.15)

$$Q(BR^{(1)}, R^{(2)}) = L\omega(w^{(1)}\overline{Z}^2 + \overline{w}^{(2)}Z^{(1)}) + (B + \rho E)\,\omega w^{(1)}\overline{w}^{(2)} +$$
$$+ \rho\left[\overline{w}^{(2)}\iiint\limits_V\left(v_x{}^{(1)}\frac{\partial\chi}{\partial y} - v_y{}^{(1)}\frac{\partial\chi}{\partial x}\right) dV + w^{(1)}\iiint\limits_V\left(\overline{v}_x{}^{(2)}\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial y} - \overline{v}_y{}^{(2)}\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial x}\right) dV\right] \qquad (3.30)$$

и, следовательно, $Q(BR_1, R_2) = Q(\overline{B}\,\overline{R}_2, \overline{R}_1)$, т. е. формула (3.28) доказана.

5°. Доказанные формулы (3.28) и (3.25) влекут за собою ряд важных следствий. Прежде всего отсюда следует сходимость ряда

$$e^{iBt}R^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Bi)^k t^k}{k!}R^{(0)} \qquad (3.31)$$

В самом деле, условимся называть нормой R и обозначать символом $\|R\|$ величину

$$\|R\| = \max\{\|w\|, \|Z\|, \|\overline{v}\|\} \qquad (3.32)$$

Каждый член ряда (3.31) определен для любого элемента $R^{(0)}$. Из неравенства (3.25) следует, что можно указать такое число M, что $\|BR\| \leqslant M\|R\|$; оператор, удовлетворяющий этому условию, называется, как известно, ограниченным.

Из ограниченности оператора B следует, что

$$\|(Bi)^k R\| \leqslant M^k \|R\| \qquad (3.33)$$

и, следовательно, сходимость ряда (3.31).

Сумма ряда (3.31) есть аналитическая функция переменного t, удовлетворяющая уравнению (3.23) и начальным условиям $R = R^{(0)}$ при $t = 0$.

Заметим, что из (3.30) следует

$$\frac{d}{dt} Q(e^{iBt} R_1, e^{iBt} R_2) = 0 \text{ или } Q(e^{iBt} R_1, e^{iBt} R_2) = \text{const} \tag{3.34}$$

Поведение искомого решения существенно зависит от знака постоянной L. Рассмотрим отдельно случаи $L > 0$ и $L < 0$.

В случае $L = 0$ система распадается, так как w, $\vec{v}$ в этом случае вообще не связаны с Z.

В первом случае пространство $\{R\}$ образует комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $Q(R_1, R_2)$, так как из равенства $Q(R_1, R_1) = 0$ следует $R = 0$.

Оператор B при этом является эрмитовым. Для этого случая существующая, хорошо разработанная спектральная теория операторов в гильбертовом пространстве дает полный ответ на все вопросы, которые мы можем поставить. Не приводя этой теории подробно, отметим лишь тот главный факт, что движение в этом случае будет устойчиво; действительно, в силу (3.34) величина $Q(R_1 \exp i\beta t, R_2 \exp i\beta t)$ остается ограниченной и, значит, при любых начальных условиях величины $\|w\|$, $\|z\|$, $\|\mathbf{v}\|$ для функции (3.31) не могут расти неограниченно, а если начальное значение $Q(R_1, R_2)$ достаточно мало, то и эти величины будут сколь угодно малы.

§ 4. Исследование резольвенты для негильбертова случая. 1°. Остается рассмотреть случай $L < 0$. Для нахождения решения нашей задачи в явном виде снова воспользуемся спектральной теорией операторов.

Рассмотрим операторное уравнение

$$(\lambda E - B) R = R_0 \tag{4.1}$$

где R_0 — произвольный элемент $\{R\}$, а λ — комплексное число.

Докажем, что это уравнение имеет решение в плоскости комплексного переменного λ везде, кроме отрезка $-2\omega < \lambda < 2\omega$ вещественной оси и, может быть, еще некоторых других изолированных значений, т. е. что

$$R = \Gamma_\lambda R_0 \tag{4.2}$$

где правая часть мероморфна везде в плоскости λ вне отрезка $|\lambda| < 2\omega$ вещественной оси.

Оператор Γ_λ ограничен и $\|\Gamma_\lambda\|$ имеет конечную оценку для любой области, не содержащей упомянутых значений.

Будем называть скалярным произведением двух элементов R_1 и R_2 квадратичную форму

$$J(R_1, R_2) = Q(R_1, \overline{R}_2) \tag{4.3}$$

симметрическую относительно аргументов $Q(R_1, \overline{R}_2) = Q(R_2, \overline{R}_1)$.

Назовем два элемента R_1 и R_2 ортогональными в смысле Фредгольма, если

$$J(R_1, R_2) = 0.$$

Оператор A^* назовем союзным по отношению к A, если

$$J(AR_1, R_2) = J(R_1, A^* R_2)$$

Будем говорить, что по отношению к уравнению (4.1) справедлива теория Фредгольма в некоторой области O плоскости λ, если:

I. Для любого λ из O справедлива альтернатива: либо (а) уравнение (4.1) однозначно разрешимо при любом λ, либо (б) соответствующее однородное уравнение имеет решение. Случай (б) может иметь место лишь для изолированных значений λ.

II. Для любого λ число линейно независимых решений уравнений

$$(\lambda E - B) R = 0 \qquad (4.4)$$

$$(\lambda E - B^*) R = 0 \qquad (4.5)$$

конечно и совпадает с (3.34).

III. Решения уравнения (4.4), соответствующие какому-нибудь λ из O, ортогональны в смысле Фредгольма ко всем решениям союзного однородного уравнения, отвечающим другому λ из O.

IV. Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.34) заключается в том, чтобы R_0 было ортогонально в смысле Фредгольма ко всем решениям однородного союзного уравнения (4.5) с тем же λ.

Справедлива следующая теорема, принадлежащая Радону (приводится в несколько видоизмененной формулировке).

Теорема (*4.1*).Если данный оператор B может быть представлен в виде $B = B_1 + B_2$, где резольвента B_1 регулярна в некоторой области O плоскости λ, а оператор B_2 вполне непрерывен, то по отношению к B в области O справедлива теория Фредгольма.

Замечание 4.1. Условие III и первая часть условия IV (необходимость условия ортогональности) справедливы для любых значений вне зависимости от того, будет ли λ принадлежать области O или нет.

Замечание 4.2. Из доказательства Радона следует также, что если оператор B_1 имеет ограниченную резольвенту в смысле какой-нибудь нормы, то и оператор B во всякой подобласти O, не содержащий изолированных особых значений, будет также иметь ограниченную резольвенту.

Введем в рассмотрение оператор P_1 проектирования вектора R в подпространство H. Компоненты P_1R будут $(0, 0, \mathbf{v})$. Представим оператор B в виде

$$B = P_1BP_1 + [(E - P_1) B + P_1B (E - P_1)] = B_1 + B_2 \qquad (4.6)$$

Оператор $B_1 = P_1BP_1$ будет ограниченным, причем $\|B_1\| < 2\omega$, и эрмитовым, как это сразу видно из формулы (3.28). Следовательно, его резольвента регулярна (а значит, ограничена) при $|\lambda| > 2\omega$ и везде вне вещественной оси.

Оператор $B_2 = B - B_1$ вполне непрерывен, так как множество его значений конечномерно: если результат его действия на некоторый вектор будет $(Z', w', \mathbf{v}')$, то

$$\mathbf{v}' = \alpha \operatorname{grad} \overline{\chi}_1 + \beta \operatorname{grad} \overline{\chi}$$

По теореме Радона вне отрезка $\lambda < 2\omega$ вещественной оси для B справедлива теория Фредгольма, что и требовалось доказать. Вне этого отрезка и особых значений резольвента ограниченна.

Полезно еще отметить, что ряд для резольвенты

$$\Gamma_\lambda = \frac{E}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^3} + \dots \qquad (4.7)$$

в силу неравенства $\|BR\| \leqslant M\|R\|$ будет сходиться при $|\lambda| > \mu$ и, следовательно, в окрестности бесконечно далекой точки Γ_λ есть регулярная функция, принимающая значение нуль при $\lambda = \infty$.

2°. Применим к исследованию уравнения (4.1) теорию Фредгольма. Посмотрим прежде всего, как можно выразить оператор, союзный с B. По определению

$$J(BR_1, R_2) = J(R_1, B^*R_2) \qquad (4.8)$$

Пользуясь выражением (3.34) для J через Q, получим

$$Q(BR_1, \bar{R}_2) = Q(R_1, \overline{B^*R_2})$$

С другой стороны, $Q(BR_1, \overline{R}_2) = Q(R_1, B\overline{R}_2)$; отсюда

$$B\overline{R}_2 = \overline{B^* R_2}, \quad \text{или} \quad B^* R_2 = \overline{B\overline{R}_2} \tag{4.9}$$

Допустим, что для некоторого λ_0 справедливо равенство $BR_0 = \lambda_0 R_0$, т. е. λ_0 — собственное значение оператора B, а R_0 — соответствующий собственный вектор. По доказанному λ_0 будет собственным значением и для союзного уравнения, т. е. существует вектор R_1 такой, что

$$B^* R_1 = \lambda_0 R_1 \tag{4.10}$$

По определению оператора B^* имеем $\overline{B\overline{R}_1} = \lambda_0 R_1$; отсюда, взяв сопряженные к обеим частям, имеем

$$B\overline{R}_1 = \overline{\lambda}_0 \overline{R_1} \tag{4.11}$$

Следовательно, вектор R_1 будет при этом также собственным вектором оператора B, отвечающим собственному значению $\overline{\lambda}_0$, что и требовалось доказать.

Совершенно также доказывается и обратное утверждение. $\overline{R}_0$ служит собственным вектором оператора B^*, отвечающим числу $\overline{\lambda}_0$. В самом деле,

$$\overline{BR_0} = \lambda_0 \overline{R_0} = \overline{B^* R_0}$$

что и требовалось доказать. Но отсюда следует ортогональность $\overline{R}_0$ ко всем собственным векторам оператора B, кроме тех, которые отвечают собственному значению $\overline{\lambda}_0$, т. е.

$$J(R_i, \overline{R}_0) = Q(R_i, R_0) = 0 \qquad \text{при } \lambda_i \neq \overline{\lambda}_0 \tag{4.12}$$

Если λ_0 не является вещественным числом, то

$$Q(R_0, R_0) = 0 \tag{4.13}$$

3°. *Лемма 4.1.* Не может существовать двух линейно независимых векторов R_1 и R_2 таких, что

$$Q(R_1, R_1) = 0, \qquad Q(R_2, R_2) = 0, \qquad Q(R_1, R_2) = 0 \tag{4.14}$$

Для доказательства составим выражение

$$\alpha\overline{\alpha} Q(R_1, R_1) + (\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha}) Q(R_1, R_2) + \beta\overline{\beta} Q(R_2, R_2) = 0$$

Левая часть этого выражения преобразуется в

$$Q(\alpha_1 R_1 + \beta R_2, \ \alpha R_1 + \beta R_2) \tag{4.15}$$

и, следовательно, форма (4.15) тождественно равна нулю при любых α и β. Очевидно, что $Z_1 \neq 0$ и $Z_2 \neq 0$, иначе из (4.14) следовало бы, что один из векторов R_1 и R_2 тождественно равен нулю. Пусть $\alpha = Z_2$, $\beta = -Z_1$, тогда $\alpha_1 R_1 + \beta R_2$ имеет компоненту $Z = 0$. При этом из (4.15) следует тождественное обращение в нуль $\alpha R_1 + \beta R_2$. Следовательно, Z_1 и Z_2 линейно зависимы. Из этой леммы сразу следует теорема.

4°. *Теорема 4.2.* Оператор B не может иметь более двух комплексных сопряженных собственных значений.

В самом деле, если два таких значения λ_1 и λ_2 существуют, причем R_1 и R_2 — собственные векторы и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$Q(R_1, R_2) = 0, \ Q(R_1, R_1) = 0, \ Q(R_2, R_2) = 0$$

Следовательно, R_1 и R_2 линейно зависимы. Но при этом λ_1 не может отличаться от λ_2.

Займемся теперь вопросом о кратных характеристических числах. Рассмотрим уравнения

$$(\lambda E - B) R = 0, \ (\lambda E - B)^2 R = 0, \ldots (\lambda E - B)^k = 0 \tag{4.16}$$

Кратностью собственного значения называется число линейно независимых решений всех уравнений (4.16).

Теорема 4.3. Кратность комплексного собственного значения оператора B не может быть больше единицы.

В самом деле, если кратность комплексного характеристического числа равна двум, то либо должны существовать два линейно независимых вектора, либо уравнение $(\lambda E - B)^2 R = 0$ имеет решение R_1, отличное от решения R_0.

Первое невозможно. Если же справедливо второе, то, очевидно, $(\lambda E - B)R_1$ есть решение уравнения $(\lambda E - B)R = 0$ и, следовательно,

$$(\lambda E - B)R_1 = \alpha R_0$$

Пусть R_2 — решение союзного уравнения. Тогда по условию (4.12) разрешимости Фредгольма

$$J(R_0, R_2) = Q(R_0, \overline{R}_2) = 0 \tag{4.17}$$

Далее, R_0 и $\overline{R}_2$ удовлетворяют условиям $Q(R_0, \overline{R}_2) = 0$, $Q(\overline{R}_2, \overline{R}_2) = 0$ на основании (4.17). Приходим к противоречию, которое и доказывает наше утверждение.

Теорема 4.4. Оператор B не может иметь более одного непростого собственного значения.

Пусть

$$(\lambda E - B) R_1 = \alpha R_0, \quad (\lambda E - B) R_0 = 0 \tag{4.18}$$

причем λ вещественно. По доказанному $\overline{R}_0$ будет также решением союзного уравнения. Необходимое условие разрешимости первого из уравнений (4.18), справедливое, как указывалось, и для вещественных λ дает

$$J(R_0, \overline{R}_0) = Q(R_0, R_0) = 0$$

Если соединить это с условием $Q(R_0', R_0) = 0$, где R_0' — собственный вектор, отвечающий другому собственному значению, то ясно, что $Q(R_0', R_0')$ не может равняться нулю.

Теорема доказана.

Теорема 4.5. Уравнение $(\lambda E - B)^4 R = 0$ не может иметь решений, отличных от решений $(\lambda E - B)^3 R = 0$.

В самом деле, допустим, что

$$\begin{aligned} (\lambda E - B) R_3 &= R_2, \qquad & (\lambda E - B) R_2 &= R_1 \\ (\lambda E - B) R_1 &= R_0, \qquad & (\lambda E - B) R_0 &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Тогда имеет место равенство

$$(\lambda E - B)^2 R_3 = R_1 \tag{4.20}$$

Вектор $\overline{R}_1$ будет решением уравнения, союзного с $(\lambda E - B)^2 R = 0$. Условия ортогональности Фредгольма дают

$$J(R_0, \overline{R}_0) = J(R_1, \overline{R}_0) = J(R_1, \overline{R}_1) = 0$$

или

$$Q(R_0, R_0) = Q(R_1, R_0) = Q(R_1, R_1) = 0$$

что невозможно. Теорема доказана.

5°. Из доказанных теорем вытекают следствия о невозможности существования некоторых специальных решений уравнения

$$\dot{R} = iBR$$

В самом деле, каждому собственному значению λ_0 и собственному вектору R_0 отвечает, как легко видеть, частное решение этого уравнения, имеющее вид

$$R = R_0 e^{i\lambda_0 t} \tag{4.21}$$

а каждой системе уравнений

$$(\lambda E - B) R_k = R_{k-1}, \qquad (\lambda E - B) R_{k-1} = R_{k-2}, \ldots (\lambda E - B) R_0 = 0 \tag{4.22}$$

отвечает частное решение, имеющее вид

$$R = \left(\frac{R_0 t^k}{k!} - \frac{R_1 t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + (-1)^k R_k\right) e^{i\lambda_0 t} \tag{4.23}$$

Таким образом, доказано следующее:

I. Решения вида (4.21) могут существовать не более чем для двух комплексных сопряженных значений λ_0 по одному для каждого.

II. Решения вида (4.23) не могут существовать для комплексных λ_0.

III. Решения вида (4.23) не могут существовать более чем при одном вещественном λ_0.

IV. Решения вида (4.23) не могут иметь $k > 2$.

§ 5. **Выражение решения через резольвенту.** Оператор e^{iBt}, построенный в виде ряда (3.31), может быть представлен контурным интегралом

$$e^{iBt} R^{(0)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-i\lambda t} \Gamma_\lambda R^{(0)} \, d\lambda \qquad (\Gamma_\lambda = (\lambda E - B)^{-1}) \tag{5.1}$$

где C — достаточно большой контур, вне которого нет ни одной особенности Γ_λ.

Докажем, что искомое решение уравнения (3.23), удовлетворяющее условию $R = R^{(0)}$ при $t = 0$, может быть представлено в виде

$$R(t) = e^{iBt} R^{(0)} + \int_0^t e^{iB(t-t_1)} R_0(t_1) \, dt_1 \tag{5.2}$$

Докажем прежде всего лемму.

Лемма 5.1. Оператор

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma_\lambda \, d\lambda \tag{5.3}$$

есть тождественный оператор.

По доказанному выше

$$(\lambda E - B) \Gamma_\lambda R = R \quad \text{или} \quad \lambda \Gamma_\lambda R - B \Gamma_\lambda R = R \tag{5.4}$$

Интегрируя последнее равенство по контуру C, будем иметь

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma_\lambda R d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{B\Gamma_\lambda}{\lambda} R d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\lambda}{\lambda} R = R \tag{5.5}$$

Для того чтобы лемма была установлена, достаточно показать, что

$$\int_C \frac{\Gamma_\lambda}{\lambda} R d\lambda = 0 \tag{5.6}$$

Однако это предложение есть непосредственное следствие того, что Γ_λ вблизи $\lambda = \infty$ — регулярная функция, стремящаяся к нулю.

Из леммы 5.1 непосредственно следует представление (5.2).

В самом деле, полагая $t = 0$, имеем $R(0) = R^{(0)}$.

Заметим еще, что

$$\frac{d}{dt} e^{iBt} = \frac{-1}{2\pi i} \int_C i\lambda \Gamma_\lambda e^{i\lambda t} \, d\lambda \tag{5.7}$$

Поэтому

$$\frac{dR}{dt} - iBR = -\frac{1}{2\pi}\int_C (\lambda E - B)\,\Gamma_\lambda R e^{i\lambda t}\,dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C\int_0^t (\lambda E - B)\,e^{i\lambda(t-t_1)}\,\Gamma_\lambda R(t_1)\,d\lambda dt_1 + R_0(t)$$

но $(\lambda E - B)\,\Gamma_\lambda = E$ и, следовательно,

$$\frac{dR}{dt} - iBR = R^\circ\frac{(-1)}{2\pi}\int_C e^{i\lambda t}\,d\lambda + \int_0^t R_0(t)\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_C e^{i\lambda(t-t_1)}\,d\lambda\right\}dt_1 + R_0(t) = R_0(t)$$

что и требовалось доказать.

Переходим к исследованию вопроса об устойчивости движения.

Напомним известный факт из теории Фредгольма.

В точке λ_0, являющейся собственным значением оператора B кратности единицы, разложение функции $\Gamma_\lambda R$ по степеням $\lambda - \lambda_0$ имеет вид

$$\Gamma_\lambda R_0 = \frac{R_* J(R_0,\, R_1)}{\lambda_0 - \lambda} + \ldots \tag{5.8}$$

где R_* — собственный вектор, а R_1 — собственный вектор союзного оператора и притом такой, что

$$J(R_*,\, R_1) = 1 \tag{5.9}$$

Невыписанные члены в формуле (5.8) содержат неотрицательные степени $(\lambda_0 - \lambda)$.

Будем называть решение задачи о колебаниях волчка с полостью грубо неустойчивым с показателем ε_0, если в нем величина Z растет как $e^{\varepsilon_0 t}$ или быстрее. Если, наоборот, Z растет медленнее, чем $e^{\varepsilon_0 t}$, то будем говорить, что движение до показателя ε_0 грубо устойчиво. Докажем теперь теорему.

Теорема 5.1. Если резольвента Γ_λ имеет пару комплексных сопряженных полюсов в точках

$$\lambda = \sigma \pm i\tau \tag{5.10}$$

и $R_0(t)$ растет медленнее, чем $e^{\varepsilon_0 t}$, то решение задачи грубо устойчиво до любого показателя $\varepsilon_0 > \tau$ и грубо неустойчиво с показателем $\varepsilon_0 \leqslant \tau$.

Для доказательства вернемся к нашей формуле (5.2).

Интеграл по контуру C мы можем в этом случае преобразовать в интеграл по контуру C_1, расположенному сколь угодно близко к вещественной оси, прибавив два вычета в полюсах резольвенты.

Таким образом, получим

$$e^{iBt}R^{(0)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{i\lambda t}\Gamma_\lambda R^{(0)}\,d\lambda + e^{i\lambda_0 t}R_* J(R^{(0)},\, R_1) + e^{i\bar{\lambda}_0 t}\bar{R}_1 J(R^{(0)},\, \bar{R}_*)$$

Оценивая каждое слагаемое, будем иметь

$$\left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{i\lambda t}\Gamma_\lambda R^{(0)}\,d\lambda\right\| \leqslant e^{\tau t}\,\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\|\Gamma_\lambda R^{(0)}\|\,d\lambda$$

но

$$\|\Gamma_\lambda R^{(0)}\| \leqslant K_{C_1}\|R^{(0)}\|$$

где постоянная K_{C_1} зависит, быть может, от контура C_1. Аналогично оценивается и второе слагаемое формулы (5.2). Теорема доказана.

II. Волчок с полостью в форме эллипсоида вращения

§ 6. Вывод основных соотношений. 1°. Вернемся теперь к системе D и рассмотрим ее свойства в том частном случае, когда область, занятая жидкостью, есть эллипсоид вращения с осями a, a и c.

В этом случае будем иметь параметрическое уравнение поверхности S

$$z = c\sin\varphi + l_2, \qquad x + iy = a\cos\varphi e^{i\theta} \tag{6.1}$$

Здесь l_2 — координата z центра тяжести эллипсоида. Вычислим еще $\cos nx$ и $\cos ny$. Мы получим

$$\cos nx + i\cos ny = \frac{c\cos\varphi e^{i\theta}}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}} \tag{6.2}$$

$$\cos nz = \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}} \tag{6.3}$$

и, следовательно,

$$\mu = (c^2 - a^2)\, e^{i\theta} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} + l_2 c e^{i\theta} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} \tag{6.4}$$

Можем вычислить функцию χ в конечном виде. Действительно положим

$$\chi = re^{i\theta}\{l_2 + m(z - l_2)\} = (x + iy)\,[(m(z - l_2) + l_2)]$$

$$\bar{\chi} = (x - iy)\left(mz + \frac{2a^2}{c^2 + a^2} l_2\right) \qquad \left(m = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}\right) \tag{6.5}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\left.\frac{d\chi}{dn}\right|_S = \mu \tag{6.6}$$

В самом деле,

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = (z - l_2)\, m + l_2, \quad \frac{\partial\chi}{\partial y} = i\,[(z - l_2)\, m + l_2], \quad \frac{\partial\chi}{\partial z} = (x + iy)\, m$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = (z - l_2)\, m\,(\cos nx + i\cos ny) + (x + iy)\, m\cos nz + {}$$
$$+ l_2(\cos nx + i\cos ny) = \mu$$

Будем вычислять значения

$$(Bi)^k (Z, w, 0) \tag{6.7}$$

В силу того обстоятельства, что $\partial^2\chi/\partial z^2 = 0$, результат вычисления будет элементом некоторого трехмерного подпространства $\{R\}^3$ не зависимо от A, C_1, K и ω. Установим это предложение в более общем виде. Рассмотрим вектор $\mathbf{v}^*$

$$v_x^* = (z - l_2)\, a^2 m\xi, \;\; v_y^* = -i\,(z - l_2)\, a^2 m\xi, \;\; v_z^* = -(x - iy)\, c^2 m\xi \tag{6.8}$$

где m согласно (6.5). Легко проверить, что

$$\operatorname{div}\mathbf{v}^* = 0, \qquad v_n|_S = 0 \tag{6.9}$$

Соотношения (6.9) проверяются элементарно, например,

$$v_n|_S = m\,[a^2(z - l_2)(\cos nx - i\cos ny) - c^2(x - iy)\cos nz]\,\xi = 0$$

Подпространство $\{R\}^3$ определим как подпространство, состоящее из элементов вида $(Z, w, i\omega\xi\,\mathbf{v}^*)$.

Пусть v_1 — элемент этого подпространства. Вычислим iBv_1.

Подставляя его в уравнение (3.10), получим

$$i\omega (z - l_2)\, a^2 m (\dot\xi + 2\omega i \xi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - 2\omega^2 w\, [(z - l_2)\, m + l_2] = 0$$

$$\omega (z - l_2)\, a^2 m (\dot\xi + 2\omega i \xi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + 2 i \omega^2 w\, [(z - l_2)\, m + l_2] = 0$$

$$- i\omega (x - iy)\, c^2 m \dot\xi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Отсюда p должно иметь вид

$$p = - i (x - iy)\, (z - l_2)\, \omega \rho m (a^2 \dot\xi + 2\omega i a^2 \xi + 2\omega i w) + 2\omega^2 \rho w l_2 (x - iy) =$$

$$= i (x - iy)(z - l_2)\, \omega c^2 \rho m \dot\xi + 2\omega^2 \rho w l_2\, (x - iy) \tag{6.10}$$

Это возможно, если

$$(c^2 + a^2)\, \dot\xi + 2\omega i a^2 \xi + 2\omega i w = 0 \tag{6.11}$$

Сосчитаем теперь величины

$$\varkappa^2,\ E \text{ и } \iiint\limits_V \left(v_x^* \frac{\partial \chi}{\partial y} - v_y^* \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) dV$$

Получим прежде всего

$$\iiint\limits_V (z - l_2)^2\, r dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int\limits_0^c z^2 a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi \int\limits_0^c \left(a^2 z^2 - \frac{a^2 z^4}{c^2}\right) dz = \frac{4}{15}\, \pi a^2 c^3$$

$$\iiint\limits_V r^2 r dr d\theta\, dz = \pi \int\limits_0^c a^4 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2 dz = \frac{8\pi}{15}\, a^4 c$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{8}{15} \pi a^4 c \rho \tag{6.12}$$

В силу того, что $\iiint\limits_V (z - l_2)\, dV = 0$, получим

$$\iiint\limits_V z^2\, r dr d\theta z d = \iiint\limits_V [(z - l_2)^2 + 2 l_2 (z - l_2) + l_2^2]\, dV = \frac{4}{15} \pi a^2 c^3 + l_2^2 V \tag{6.13}$$

$$A_2 = l_2^2 M_2 + \frac{4}{15} \pi a^2 c\, (a^2 + c^2) = l_2^2 M_2 + A_2^{(0)} \tag{6.14}$$

$$A_2 - C_2 = l_2^2 M_2 + \frac{4}{15} \pi \rho a^2 c\, (c^2 - a^2)$$

Далее

$$2\varkappa^2 = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \bar\chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{\partial \bar\chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial \bar\chi}{\partial z}\right) dV = m^2 \iiint\limits_V [2\, (z - l_2)^2 + r^2]\, dV +$$

$$+ 2 l_2^2 \iiint\limits_V dV + 4 l_2 m \iiint\limits_V (z - l_2)\, dV = 2 l_2^2 V + \frac{8}{15} \pi \rho a^2 c\, \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^2 + a^2}$$

т. е.

$$\varkappa^2 \rho = l_2^2 M_2 + \frac{4}{15} \pi \rho a^2 c\, \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^2 + a^2} \tag{6.15}$$

$$E = - i \iiint\limits_V \left(\frac{\partial \bar\chi}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \bar\chi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial y}\right) dV = - 2 \iiint\limits_V m^2 (z - l_2)^2\, r dz\, d\theta\, dr -$$

$$- 2 l_2^2 \iiint\limits_V dV = - \frac{8}{15} \pi m^2 a^2 c^3 - 2 l_2^2 V$$

или

$$\rho E = - \frac{8}{15} \pi \rho a^2 c^3 m^2 - 2 l_2^2 M_2 \tag{6.16}$$

Наконец,

$$\iiint\limits_V \left(v_x^* \frac{\partial \chi}{\partial y} - v_y^* \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) dV = i \iiint\limits_V a^2 m^2\, 2\,(z - l_2)^2\, dV = i\,\tfrac{8}{15}\,\pi a^4 c^3 m^2 \qquad (6.17)$$

Подставляя эти данные в (3.10), будем иметь

$$\left(A_1 + l_2^2\, M_2 + \frac{4\pi\rho}{15}\, a^2 c\, \frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2}\right)\dot{w} - \left(B_1 - 2l_2^2\, M_2 - \frac{8\pi\rho}{15}\,\omega^2 c^3 m^2\right)\omega i w +$$

$$+ \left(\frac{g}{\omega^2}(l_1 M_1 + l_2 M_2) + A_1 + A_2 - C_1 - C_2\right)\omega i Z + \frac{8\pi\rho}{15}\, a^4 c^3 m^2\, \omega i \xi = 0$$

или, полагая

$$A_1 + l_2^2\, M_2 = A^*, \qquad B_1 - 2l_2^2\, M_2 = C_1 - 2A^* = B$$

$$A_1 + A_2 = A, \qquad C_1 + C_2 = C$$

получим

$$\left[A^* + \frac{4\pi\rho}{15}\, a^2 c\, \frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2}\right]\dot{w} - \left(B - \frac{8\pi\rho}{15}\, a^2 c^3 m^2\right)\omega i w -$$

$$- L\omega i Z + \frac{8}{15}\,\pi\rho a^4 c^3 m^2\, \omega i \xi = 0 \qquad (6.18)$$

Уравнения (6.11), (6.18) и

$$\dot{Z} - i\omega w = 0 \qquad (6.19)$$

определяют движение нашего эллипсоидального волчка. Характер устойчивости движения определяется наличием или отсутствием комплексных корней у векового определителя этой системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & -L\omega & a_{13} \\ -\omega & \lambda & 0 \\ 2\omega & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = A^* + \frac{4\pi\rho}{15}\, a^2 c\, \frac{(c^2-a^2)}{(c^2+a^2)}\,\lambda - \left(B - \frac{8\pi\rho}{15}\, a^2 c^3 m^2 \omega\right)$$

$$a_{13} = \frac{8\pi\rho}{15}\, a^4 c^3 m^2, \qquad a_{33} = (c^2 + a^2)\,\lambda + 2a^2\omega$$

или

$$\Delta(\lambda) = ((c^2+a^2)\,\lambda + 2a^2\omega)\left[\left(A^* + \tfrac{4}{15}\,\pi\rho a^2 c\, \frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2}\right)\lambda^2 -\right.$$

$$\left. - \left(B - \tfrac{8}{15}\,\pi\rho a^2 c^3 m^2\right)\omega\lambda - L\omega^2\right] - \tfrac{16}{15}\,\pi\rho a^4 c^3 m^2 \lambda \omega^2$$

Если все три корня $\Delta(\lambda)$ — вещественны и не кратны, то движение устойчиво; если вещественных корней лишь один — то неустойчиво, Положим

$$L = L^* + C_2 - A_2^{(0)} = L^* - \tfrac{4}{15}\,\pi\rho a^2 c\,(c^2 - a^2)$$

Тогда

$$L^* = C_1 - A_1 - l_2^2\, M_2 - (g/\omega^2)(l_1 M_1 + l_2 M_2)$$

Величину $\Delta(\lambda)$ можно при этом переписать так:

$$\Delta(\lambda) = [(c^2+a^2)\,\lambda + 2a^2\,\omega]\,[A^*\lambda^2 - B\omega\lambda - L^*\omega^2] + \qquad (6.20)$$

$$+ \tfrac{4}{15}\,\pi\rho a^2 c m\,[(c^2+a^2)\,\lambda + 2a^2\omega]\ \ [(c^2-a^2)\,\lambda^2 + 2c^2 m\omega\lambda + (c^2+a^2)\,\omega^2] -$$

$$- \tfrac{16}{15}\pi\rho\, a^4 c^3 m^2 \lambda\omega^2 = [(c^2+a^2)\ \lambda + 2a^2\omega]\ [A^*\lambda^2 - B\omega\lambda - L^*\omega^2] +$$

$$+ \tfrac{4}{15}\,\pi\rho a^2 c m\,[(c^2+a^2)(c^2-a^2)\,\lambda^3 + 2\,(c^2+a^2)(c^2-a^2)\,\lambda^2\omega + (c^2+a^2)^2\,\lambda^2\omega +$$

$$+ 2a^2(c^2+a^2)\omega^3] = [(c^2+a^2)\lambda + 2a^2\omega][A^*\lambda^2 - B\omega\lambda - L^*\omega^2] +$$

$$+ \tfrac{4}{15}\pi\rho a^2 c(c^2-a^2)(\lambda+\omega)[(c^2-a^2)\lambda^2 + (c^2-a^2)\lambda\omega^2 + 2a^2\omega^2] \qquad (6.20)$$

В некоторых случаях удобно заметить, что

$$A^*\lambda^2 - B\omega\lambda - L^*\omega^2 = A^*\lambda^2 - (C_1 - 2A^*)\lambda\omega - (C_1 - A^*)\omega^2 + K =$$

$$= A^*(\lambda+\omega)^2 - C_1\omega(\lambda+\omega) + K$$

Таким образом,

$$\Delta(\lambda) = [(c^2+a^2)\lambda + 2a^2\omega][A^*(\lambda+\omega)^2 - C_1\omega(\lambda+\omega) + K] + \qquad (6.21)$$

$$+ \tfrac{4}{15}\pi\rho a^2 c(c^2-a^2)(\lambda+\omega)[(c^2-a^2)\lambda^2 + (c^2-a^2)\lambda\omega + 2a^2\omega^2]$$

2^0. Остановимся отдельно на частном случае $K=0$, т. е. будем считать, что волчок движется вокруг центра тяжести. Тогда для нахождения λ получим два уравнения

$$(\lambda+\omega) = 0$$

$$[(c^2+a^2)\lambda + 2a^2\omega][A^*(\lambda+\omega) - C_1\omega] + \tfrac{4}{15}\pi\rho a^2 c(c^2 - a^2)[(c^2-a^2)\lambda^2 +$$

$$+ (c^2-a^2)\lambda\omega + 2a^2\omega^2] = 0 \qquad (6.22)$$

Корень первого из этих уравнений $\lambda = -\omega$ дает собственный вектор $(Z, 0, 0)$, что соответствует $Z^* = \mathrm{const}$, т. е. спокойному положению отклоненного волчка. Корни второго уравнения (6.22) дают колебания вокруг нового положения равновесия.

Если считать $A^* = C_1 = 0$, т. е. считать оболочку невесомой, то для λ получим уравнение

$$(c^2-a^2)\lambda^2 + (c^2-a^2)\lambda\omega + 2a^2\omega^2 = 0 \qquad (6.23)$$

Корнями его будут

$$\lambda = \frac{-(c^2-a^2) \pm \sqrt{(c^2-a^2)(c^2-9a^2)}}{2(c^2-a^2)}\omega = -\frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2-9a^2}{c^2-a^2}}\frac{\omega}{2} \qquad (6.24)$$

Движение будет устойчиво при $c > 3a$ или при $c < a$. Если же $a < c < 3a$, то движение неустойчиво.

Если плотность жидкости $\rho = 0$, то для определения λ имеем опять два уравнения

$$(c^2+a^2)\lambda + 2a^2\omega = 0, \qquad A^*(\lambda+\omega)^2 - C\omega(\lambda+\omega) + K = 0 \qquad (6.25)$$

Корень первого уравнения дает собственный вектор $(0, 0, \mathbf{v}^*)$. Корни второго уравнения дадут обычное прецессионно-нутационное движение оболочки.

3^0. В общем виде уравнение $\Delta\lambda = 0$, где $\Delta\lambda$, согласно (6.21), можно исследовать графически. С этой целью перепишем его в виде

$$\frac{A^*}{\gamma}\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)^2 - \frac{C_1}{\gamma}\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right) + \frac{\nu}{\gamma} +$$

$$+ \frac{(\lambda/\omega+1)[(c^2-a^2)(\lambda/\omega)^2 + (c^2-a^2)\lambda/\omega + 2a^2]}{(c^2+a^2)\lambda/\omega + 2a^2}\,\frac{c^2-a^2}{c^2} = 0 \qquad (6.26)$$

Здесь

$$v = \frac{K}{\omega^2}, \qquad \gamma = A_2^{(0)} - \frac{1}{2} C_2 = \frac{4}{15} \pi \rho a^2 c^3 \tag{6.27}$$

Функция, стоящая в правой части, легко строится, если задать отношение c/a, или, что то же, величину m, определенную (6.5). Пусть

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{\omega}\right) = -\frac{(\lambda/\omega + 1)(m\lambda^2/\omega^2 + m\lambda/\omega + 1 - m)}{\lambda/\omega + 1 - m} \frac{2m}{m+1} \tag{6.28}$$

Построим кривые $\varphi = \varphi(\lambda/\omega)$ для различных значений m и отдельно начертим на кальке параболу

$$y = \frac{A^*}{\gamma}\left(\frac{\lambda}{\omega} + 1\right)^2 - \frac{C_1}{\gamma}\left(\frac{\lambda}{\omega} + 1\right) \tag{6.29}$$

наложим эту кальку на график $\varphi = \varphi(\lambda/\omega)$. Тогда движение будет устойчиво, если парабола пересечется с кривой в трех точках; если парабола пересечется с кривой в одной точке, движение будет неустойчиво.

Передвигая параболу параллельно самой себе, можно задавать различные значения величине ν / γ, которая изобразится отрезком, отсекаемым параболой на прямой, параллельной оси y, проходящей через точку $\lambda / \omega = -1$.

4°. Вместо того чтобы исследовать уравнение (6.21) графически, можно сделать это аналитически, воспользовавшись теорией алгебраических уравнений. Известно, что необходимое и достаточное условие вещественности всех трех корней уравнения

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \tag{6.30}$$

имеет вид (D — дискриминант уравнения)

$$D = a_1^2 a_2^2 + 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3 - 27 a_0^2 a_3^2 \geqslant 0$$

Подстановка

$$\frac{\lambda}{\omega} + 1 - m = t \tag{6.31}$$

приводит уравнение (6.26) к виду

$$a_0 t^3 + a_1 t^2 + (a_2 + \nu) t + a_3 = 0 \tag{6.32}$$

Приравнивая нулю дискриминант этого уравнения, получим

$$\begin{gathered} 4a_0 \nu^3 + (12 a_0 a_2 - a_1^2) \nu^2 + (12 a_0 a_2^2 - 2 a_1^2 a_2 - 18 a_0 a_1 a_3) \nu + \\ + (4 a_0 a_2^3 - a_1^2 a_2^2 - 18 a_0 a_1 a_2 a_3 + 27 a_0^2 a_3^2 + 4 a_1^3 a_3) = 0 \end{gathered} \tag{6.33}$$

Это уравнение может иметь либо три вещественных корня: ν_1; ν_2; ν_3; либо только один. В первом случае промежуток изменения ν разбивается на четыре части

$$-\infty < \nu < \nu_1, \qquad \nu_1 < \nu < \nu_2, \qquad \nu_2 < \nu < \nu_3, \qquad \nu_3 < \nu < +\infty \tag{6.34}$$

В первом и третьем промежутке движение волчка устойчиво, во втором и четвертом — неустойчиво.

Если (6.30) имеет один корень, то промежутков будет всегда два

$$-\infty < \nu < \nu_1, \qquad \nu_1 < \nu < +\infty$$

В первом промежутке движение устойчиво, во втором неустойчиво.

5^0. Для вычисления значения ν_3 в случае, когда произведение $A^* C_1$ велико по сравнению с γ, и, кроме того, m не очень мало, можно заменить $\varphi(\lambda/\omega)$ ее разложением по степеням $(\lambda/\omega+1)$. При этом, отбрасывая члены $(\lambda/\omega+1)^3$ и более высокие, получим уравнение

$$\left(\frac{A^*}{\gamma}+\frac{2m-1}{m^2}\right)\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)^2-\left(\frac{C_1}{\gamma}+\frac{1-m}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)+\frac{\nu}{\gamma}=0 \qquad (6.35)$$

или

$$\left[A^*+4\pi\rho a^2 c\,(c^2+a^2)\frac{c^2-3a^2}{c^2-a^2}\right]\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)^2-(C_1+8\pi\rho a^4 c)\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)+\nu=0$$

или $\qquad (6.36)$

$$\left[A^*+A_2^{(0)}\left(1-\frac{2a^2}{c^2-a^2}\right)\right]\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)^2-(C_1+C_2)\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)+\nu=0$$

т. е.

$$\left[A-A_2^{(0)}\frac{2a^2}{c^2-a^2}\right]\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)^2-C\left(\frac{\lambda}{\omega}+1\right)+\nu=0$$

При этом условие вещественности корней будет

$$\frac{K}{\omega^2}<\frac{G^2}{4A^{(0)}}, \text{ где } A^{(0)}=A-A_2^{(0)}\frac{2a^2}{c^2-a^2} \qquad (6.37)$$

Отсюда

$$\omega>2\frac{\sqrt{A^{(0)}K}}{C} \qquad (6.38)$$

Это условие очень похоже на то, которое употребляется обычно в расчетах.

Допустим теперь, что оболочка волчка вначале двигалась с угловой скоростью $\omega^{(0)}$, а жидкость была неподвижна. По закону сохранения момента количества движения $C_1\omega^{(0)}=C\omega$, отсюда для начальной угловой скорости получаем приближенное условие

$$\omega^{(0)}>\frac{2\sqrt{A^{(0)}K}}{C_1} \qquad (6.39)$$

III. Волчок с цилиндрической полостью

§ 7. Вычисление резольвенты. 1°. В том случае, когда полость представляет собой тело вращения, удобно ввести другие переменные. За независимые переменные вместо x и y возьмем координаты r и θ, где

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta \qquad (7.1)$$

Неизвестными будут служить

$$Z, w, v_r, v_\theta, v_z \qquad (7.2)$$

где

$$v_z=2iu_{z,\,(1)}e^{i\theta} \qquad (7.3)$$

$$v_r=iu_{\zeta,\,(0)}+ie^{2i\theta}u_{\bar\zeta,\,(2)},\qquad v_\theta=i\bar u_{\zeta,\,(0)}-ie^{2i\theta}u_{\bar\zeta,\,(2)}$$

Здесь операции, указанные индексами в скобках, определены (2.21) — (2.26). Величины

$$-\frac{i}{2}v_r e^{-i\theta},\qquad \frac{1}{2}v_\theta e^{-i\theta},\qquad -\frac{i}{2}v_z e^{-i\theta},$$

будут составляющими на оси r,θ,z вектора скорости, если составляющие этого вектора в декартовых координатах суть v_x, v_y, v_z.

Выпишем уравнения для новых неизвестных. Удобно воспользоваться для этого формулами (2.30). Новые неизвестные зависят в этом случае лишь от t и $r=\sqrt{\zeta\bar\zeta}$.

Считая для простоты $F_\zeta = F_{\bar\zeta} = 0$ и проделывая необходимые выкладки, получим однородную систему

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + 2\omega i\, v_\theta - \frac{i}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + 2\omega i\, v_r - \frac{i}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{i}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \qquad (7.4)$$

$$\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} - v_\theta + r\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (7.5)$$

Рассмотрим граничные условия и уравнения для Z. Пусть

$$\mu = e^{-i\theta}\mu^*$$

Тогда

$$[v_r \cos nr + v_z \cos nz]_S = i\dot{Z}\bar{\mu}^{**} = -\omega w \bar{\mu}^{**} \qquad (7.6)$$

$$N^{**}(p) = \frac{i}{2}\iint\limits_S p\mu^{**}\, dS \qquad (7.7)$$

$$Z - i\omega w = 0, \quad A_1\dot{w} - B_1\omega i w - L\omega i Z - \frac{1}{\omega} N^{**}(p) = 0 \qquad (7.8)$$

2°. В случае, когда область V представляет собою цилиндр радиуса b с высотою $2h$ и центром в точке $z = l_2$, функция

$$\mu^{**} = \bar{\mu}^{**} = \begin{cases} z & \text{при } r = b \\ +r & \text{при } z - l_2 = \pm h \end{cases} \qquad (7.9)$$

Уравнения для определения резольвенты в явном виде будут

$$\begin{aligned} &\lambda v_r + 2\omega v_\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = v_{r0}, \\ &\lambda v_\theta + 2\omega v_r - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = v_{\theta 0}, \end{aligned} \qquad \lambda v_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = v_{z0} \qquad (7.10)$$

$$\lambda Z - \omega w = Z_0, \quad (A_1\lambda - B_1\omega)\, w - L\omega Z + \frac{iN^{**}}{\omega}(p) = A w_0 \qquad (7.11)$$

$$v_r = -\omega Z w \quad \text{при } r = b, \qquad v_z = \omega r w \quad \text{при } z = \pm h \qquad (7.12)$$

Сюда надо присоединить уравнение (7.5). Из уравнения (7.5), (7.12) и (7.10) можно найти выражение для $N^{**}(p)$ через w, v_0 и w_0. Подставляя полученное выражение в (7.11), получим систему уравнений для определения Z и w. Зная W, в свою очередь, легко найти $\mathbf{v}$.

Равенство нулю определителя системы, полученной для нахождения Z и w, дает нам формальное условие существования собственных частот или собственных значений оператора B. Пусть

$$\begin{aligned} v_{r0} &= -\omega w_0 z + \omega \Sigma c_{l,0}(r) \sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} \\ v_{\theta 0} &= -\omega w_0 z + \omega \Sigma g_{l,0}(r) \sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} \qquad (z' = z - l_2) \\ v_{z0} &= \omega w_0 r + \omega \Sigma b_{l,0}(r) \cos\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} \end{aligned} \qquad (7.13)$$

Решение ищем в виде

$$\begin{aligned} v_r &= -\omega w z + \omega \Sigma c_l(r) \sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} \\ v_\theta &= -\omega w z + \omega \Sigma g_l(r) \sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} \\ v_z &= \omega w z + \omega \Sigma b_l(r) \cos\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} \end{aligned} \qquad (7.14)$$

$$\frac{p}{\rho} = (\omega\lambda w - \omega w_0)\, rz + \omega \Sigma a_l(r) \sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} - 2\omega\,[(\lambda + \omega)\, w - w_0]\, l_2 r \qquad (7.15)$$

Условие несжимаемости (7.5) при этом примет вид

$$[r, c_{l0}(r)]' - g_{l0}(r) - r\,\frac{(2l+1)\pi}{2h}\,b_{l0}(r) = 0 \tag{7.16}$$

$$[r, c_l(r)]' - g_l(r) - r\,\frac{(2l+1)\pi}{2h}\,b_l(r) = 0 \tag{7.17}$$

Подставим (7.14) и (7.15) в уравнение (7.10). Пользуясь тем, что

$$z = z' + l_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{8h(-1)^l}{\pi^2(2l+1)^2} \sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} + l_2 \tag{7.18}$$

получим

$$\Sigma\omega\left\{\lambda c_l + 2\omega g_l - a_l' + \frac{8h(-1)^l}{\pi^2(2l+1)^2}\,(2w_0 - 2(\lambda+\omega)w) - c_{l,0}\right\}\times$$
$$\times\sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} = 0$$

$$\Sigma\omega\left\{2\omega\lambda c_l + \lambda g_l - \frac{a_l}{r} + \frac{8h(-1)^l}{\pi^2(2l+1)^2}\,(2w_0 - 2(\lambda+\omega)w) - g_{l,0}\right\}\times$$
$$\times\sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h} = 0$$

$$\lambda b_l - \frac{(2l+1)\pi}{2h}\,a_l - b_{l,0} = 0 \tag{7.19}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\sin[(2l+1)\pi z/2h]$ и решая полученную систему относительно c_l и g_l, будем иметь

$$[\lambda^2 - 4\omega^2]\,c_l - \lambda a_l' + 2\omega\,\frac{a_l}{r} - \frac{16h(-1)^l}{\pi^2(2l+1)^2}\,(\lambda - 2\omega)\,[(\lambda+\omega)w - w_0] -$$
$$- \lambda c_{l,0} + 2\omega g_{l,0} = 0$$

$$[\lambda^2 - 4\omega^2]\,g_l + 2\omega a_l' - \lambda\,\frac{a_l}{r} - \frac{16h(-1)^l}{\pi^2(2l+1)^2}\,(\lambda - 2\omega)\,[(\lambda+\omega)w - w_0] +$$
$$+ 2\omega c_{l,0} - \lambda g_{l,0} = 0$$

$$\lambda b_l - \frac{(2l+1)\pi}{2h}\,a_l - b_{l,0} = 0 \tag{7.20}$$

Пользуясь уравнением неразрывности, получим отсюда

$$-\lambda(ra_l')' + \frac{\lambda a_l}{r} + \frac{(2l+1)^2\pi^2}{4h^2}\,\frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{\lambda}\,ra_l - \lambda(rc_{l0})' - 2\omega c_{l0} + 2\omega(r, g_{l0})' +$$
$$+ \lambda g_{l0} + \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{\lambda}\,\frac{(2l+1)\pi}{2h}\,b_{l0} = 0 \tag{7.21}$$

или

$$(ra_l')' + \left\{\frac{4\omega^2 - \lambda^2}{\lambda^2}\,\frac{(2l+1)\pi^2}{4h^2}\,r - \frac{1}{r}\right\} a_l = f_l \tag{7.22}$$

где

$$f_l = -(rc_{l0})' - \frac{2\omega}{\lambda}\,c_{l0} + \frac{2\omega}{\lambda}\,(rg_{l_0})' + g_{l0} - \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{\lambda^2}\,\frac{(2l+1)\pi}{2h}\,b_{l0} \tag{7.23}$$

Уравнение (7.22) позволяет определить a_l, а первое из уравнений (7.20) дает для этой функции граничные условия.

В самом деле, при $r = b$, очевидно, $c_{l0} = 0$, $c_l = 0$ и, значит,

$$r\lambda a_l'|_{r=b} - 2\omega a_l|_{r=b} = -\frac{16h(-1)^l}{\pi^2(2l+1)^2}\,(\lambda - 2\omega)\,r\,[(\lambda+\omega)w - w_0] \tag{7.24}$$

Полагая

$$k^2 = \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{\lambda^2}\,\frac{(2l+1)^2\pi^2}{4h^2}$$

для a_l получим выражение

$$a_l(r) = -\frac{16hb(-1)^l(\lambda-2\omega)}{\pi^2(2l+1)^2}\frac{J_1(kr)}{\lambda kbJ_1'(kb)-2\omega J_1(kb)}[(\lambda+\omega)w-w_0]+$$
$$+\int_0^b K(r,r_1)f_l(r_1)\,dr_1 \qquad (7.25)$$

Здесь

$$K(r,r_1)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}J_1(kr)\left[Y_1(kr_1)-\frac{\lambda kbY_1'(kb)-2\omega Y_1(kb)}{\lambda kbJ_1'(kb)-2\omega J_1(kb)}J_1(kr_1)\right] & (r\leqslant r_1)\\ \frac{\pi}{2}\left[Y_1(kr)-\frac{\lambda kb\,Y_1'(kb)-2\omega Y_1(kb)}{\lambda kb\,J_1'(kb)-2\omega J_1(kb)}J_1(kr)\right]J_1(kr_1) & (r\geqslant r_1)\end{cases} \qquad (7.26)$$

Полученное выражение для a_l позволяет вычислить

$$N_{(p)}^{**}=\beta w+N_1 \qquad (7.27)$$

где N_1 зависит только от w_0, $\mathbf{v}_0$, но не зависит от w.

Для поставленных целей достаточно знать величину β. Принимая во внимание, что

$$\int_{-h}^{+h} z'\sin\frac{(2l+1)\pi z'}{2h}\,dz'=\frac{8h^2(-1)^l}{\pi^2(2l+1)^2}$$

получим

$$\frac{1}{\omega}N^{**}(p)=i\rho[\lambda w-w_0]\left\{-2\pi h\int_0^b r^3dr+\pi b^2\int_{l_2-h}^{l_2+h}z^2\,dz\right\}-$$
$$-2\pi i\rho[(\lambda+\omega)w-w_0]\int_{l_2-h}^{l_2+h}b^2l_2zdz+$$
$$+i\rho\sum_{l=0}^{\infty}2\pi(-1)l\left\{\int_0^b a_l(r)r^2dr-\frac{4h^2ba_l(b)}{\pi^2(2l+1)^2}\right\}=$$
$$=iw\left\{-(C_2-A_2^{(0)})\lambda+2\pi\rho\frac{16\,bh(\lambda-2\omega)(\lambda+\omega)}{\pi^2(2l+1)^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{4h^2bJ_1(kb)}{\pi^2(2l+1)^2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_0^b J_1(kb)r^2dr\right]-l_2^2M_2(\lambda+2\omega)2\omega\right\}+\frac{1}{\omega}N_1$$

где, очевидно, через $A_2^{(0)}$ и C_2 обозначены главные моменты инерции жидкости

$$A_2^{(0)}=\tfrac{2}{3}\pi h^3b+\tfrac{1}{2}\pi hb^4, \qquad C_2=\pi hb^4, \qquad A_2=l_2^2M_2+A_2^{(0)}$$

Вычисляя величину

$$\psi=\frac{4h^2bJ_1(kb)}{\pi^2(2l+1)^2}-\int_0^b J_1(kr)r^2dr$$

Далее имеем

$$\int_0^b J_1(kr)r^2dr=\frac{1}{k^3}\int_0^{kb}J_1(x)x^2\,dx=-\frac{1}{k^3}\int_0^{kb}J_0'(x)x^2\,dx$$

$$x^2J_0'(x)=x^2J_0'(x)+2xJ_0(x)+2xJ_0''(x)+2J_0'(x)=\frac{d}{dx}[x^2J_0(x)+2xJ_0'(x)]$$

и, следовательно,

$$\int_0^b J_1(kr)\, r^2 dr = -\frac{1}{k^3}\left[k^2 b^2 J_0(kb) - 2kbJ_1(kb)\right]$$

При этом

$$\psi = \frac{b^2}{k} J_0(kb) - \frac{2b}{k^2} J_1(kb)\left[1 - \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{2\lambda^2}\right] = \frac{4h^2 b}{(2l+1)^2\pi^2}\,\frac{\lambda^2\, kb\, J_0(kb) + (4\omega^2 - 3\lambda^2) J_1(kb)}{4\omega^2 - \lambda^2}$$

Собирая вместе все вышенаписанное, получим

$$\frac{1}{\omega} N^{**}(p) = iw\Big\{-\lambda\,(C_2 - A_2^{(0)}) + \frac{128 h^3 b^2 \rho}{\pi^3}\,\frac{(\lambda - 2\omega)(\lambda + \omega)}{4\omega^2 - \lambda^2} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4}\,\frac{\lambda^2 kbJ_0(kb) + (4\omega^2 - 3\lambda^2)\, J_1(kb)}{\lambda kbJ_0(kb) - (\lambda + 2\omega)\, J_1(kb)} - l_2^2 M_2(\lambda + 2\omega)\Big\} + \frac{1}{\omega} N_1(p) \tag{7.28}$$

Подставляя это выражение в уравнения (7.11), получим систему

$$\Big[(A_1 + l_2^2 M_2 - A_2^{(0)} + C_2)\,\lambda - (B_1 - 2l_2^2 M_2)\,\omega + \frac{128 h^3 b^2 \rho}{\pi^3}\,\frac{(\lambda - 2\omega)(\lambda + \omega)}{4\omega^2 - \lambda^2} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4}\,\frac{\lambda^2 kbJ_0(kb) - (3\lambda^2 - 4\omega^2)\, J_1(kb)}{\lambda kbJ_0(kb) - (\lambda + 2\omega)\, J_1(kb)}\Big] w - L\omega Z = Aw_0 - \frac{N_1}{\omega}$$

$$\lambda Z - \omega w = Z_0 \tag{7.29}$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = (A^* - A_2^{(0)} - C_2)\,\lambda^2 - (B\omega\lambda - L\omega^2) -$$
$$- \frac{128 h^3 b^2 \rho}{\pi^3}\,\frac{\lambda(\lambda + \omega)}{\lambda + 2\omega} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4}\,\frac{\lambda^2\, kb\, J_0(kb) - (3\lambda^2 - 4\omega^2)\, J_1(kb)}{\lambda\, kb\, J_0(kb) - (\lambda + 2\omega)\, J_1(kb)} \tag{7.30}$$

Здесь

$$A^* = A_1 + l_2^2 M_2, \quad B = B_1 - 2l_2^2 M_2$$

Для тех значений λ, для которых $\Delta(\lambda) = 0$, существует решение однородной системы, соответствующей (7.29). Если найти из нее значение w, то (7.25) определяет p, а следовательно, и все остальные неизвестные.

§ 8. Исследование результатов. 1°. Задачей настоящего параграфа будет исследование функций $\Delta(\lambda)$ и условий, при которых она будет иметь комплексные корни. Обозначая $\lambda = 2\omega q$ и разделив обе части на ω^2, будем иметь

$$\Delta(\lambda) = (A^* - A_2^{(0)} + C_2)\,4q^2 - 2Bq - L - \frac{256}{\pi^3} h^3 b^2 \rho\,\frac{q(2q+1)}{q+1} D_1(q) \tag{8.1}$$

где

$$D_1(q) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4}\,\frac{q^2\, kbJ_0(kb) - (3q^2 - 4)\, J_1(kb)}{qkbJ_0(kb) - (q+1)\, J_0(kb)} \tag{8.2}$$

Перепишем уравнение (8.1) в виде

$$A^* 4q^2 - 2Bq - L = \Big((A_2^{(0)} - C_2)\,4q^2 + \frac{256}{\pi^3} h^3 b^2 \rho\,\frac{q(2q+1)}{q+1} D_1(q)\Big) = \varphi_1(q)$$

Квадратный трехчлен, стоящий слева, иногда удобно представлять в другом виде

$$4A^* q^2 - 2Bq - L = 4A^* q^2 - (C_1 - 2A^*)\,2q + (k/\omega^2 + A^* - C_1) + (A_2^{(0)} - C_2) =$$
$$= A^*(2q+1)^2 - C_1(2q+1) + k/\omega^2 + (A_2^{(0)} - C_2) \tag{8.3}$$

После чего уравнение (8.1) будет иметь вид:

$$A^*(2q+1)^2 - C_1(2q+1) + \frac{k}{\omega^2} = (A_2^{(0)} - C_2)(4q^2-1) + \\ + \frac{256}{\pi^3} h^3 b^2 \rho \frac{q(2q+1)}{q+1} D_1(q) \tag{8.4}$$

При таком обозначении видно, что отрезок, отсекаемый параболой $y = A^*(2q+1)^2 - C_1(2q+1) + k/\omega^2$ на прямой $q = -1$, равен величине опрокидывающего момента, отнесенной к углу, поделенной на квадрат собственной угловой скорости волчка.

Изучим прежде всего правую часть уравнения (8.4). Пусть

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{q^2} - 1} \tag{8.5}$$

Проведем в плоскости q разрез по вещественной оси по отрезку $-1 \leqslant q \leqslant 1$. В оставшейся части плоскости величина

$$kb = \frac{(2l+1)\pi b}{2h} \xi \tag{8.6}$$

будет регулярной функцией. Условимся всегда выбирать значения корня так, чтобы k было положительно мнимым при положительном $q > 1$. Вся плоскость q переходит при этом в дважды повторенную верхнюю полуплоскость k с критической точкой на мнимой оси. Мнимая ось q и части вещественной оси, где $|q| > 1$, будут соответствовать положительной части мнимой оси. Верхняя часть отрезка $-1 < q < 0$ перейдет в $0 < k < +\infty$, а верхняя часть отрезка $0 < q < +1$ — в отрезок $-\infty < k < 0$, причем на верхнем берегу k будет монотонно возрастающей на этих отрезках. На нижнем берегу k имеет знак, обратный знаку на верхнем. Вблизи точки $q = \infty$ будем иметь разложение

$$\xi = i\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{q^2} + \ldots\right) \tag{8.7}$$

вблизи $q = 0$ для значений из верхней полуплоскости

$$\xi = -\frac{1}{q} + \frac{q}{2} + \ldots \tag{8.8}$$

Очевидно, для q из верхней полуплоскости

$$q = -\frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\xi^2} + \ldots\right) = -\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \tag{8.9}$$

2°. Установим сходимость ряда $D_1(q)$ для любых q вне купюры $|q| < 1$. Для этого рассмотрим члены этого ряда как функции ξ. При любом q вне купюры величина ξ будет иметь комплексное значение из верхней полуплоскости. При этом величина $kb = [(2l+1)\pi b/2h]\xi$ с возрастанием l будет пробегать серию дискретных значений, расположенных на одном и том же луче, проходящем через начало координат.

Для больших по абсолютной величине kb при целых n справедлива формула [3]

$$J_n(kb) = \left(\frac{2}{\pi kb}\right)^{1/2} [\cos\left(kb - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right) U_n(kb) - \\ - \sin\left(kb - \tfrac{1}{4}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right) V_n(kb)] \tag{8.10}$$

Здесь

$$U_n(z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\ldots[4n^2-(4r-1)^2]}{2r!\,2^{6r}\,z^{2r}}$$

$$V_n(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\ldots[4n^2-(4r-3)^2]}{(2r-1)!\,2^{6r-3}\,z^{2r-1}} \tag{8.11}$$

Принимая во внимание, что для больших y

$$\cos(x+iy) \sim \frac{1}{} e^{y-ix}, \qquad \sin(x+iy) \sim \frac{1}{2i} e^{y-ix} \tag{8.12}$$

и полагая $kb = x + iy$, будем иметь для достаточно больших y

$$U_l(q) \equiv \frac{q^2 \frac{(2l+1)\pi b}{2h} \xi J_0\left(\frac{(2l+1)\pi b}{2h}\xi\right) - (3q^2-1) J_1\left(\frac{(2l+1)\pi b}{2h}\xi\right)}{q \frac{(2l+1)\pi b}{2h} \xi J_0\left(\frac{(2l+1)\pi b}{2h}\xi\right) - (q+1) J_1\left(\frac{(2l+1)\pi b}{2h}\xi\right)} \approx q \tag{8.13}$$

Из (8.13) сразу вытекает равномерная сходимость $D_1(q)$ везде в плоскости q, кроме упомянутой купюры.

Отметим одно важное следствие доказанного. Рассмотрим

$$\sum_{l=0}^{N} \frac{1}{(2l+1)^4} U_l(q) = D_1^{(N)}(q) \tag{8.14}$$

и составим уравнение

$$\frac{1}{A_2^{(0)} - C_2} \varphi(q) = (4q^2 - 1) + \frac{384}{\pi^4} \frac{1}{1 - 3b^2/4h^2} \frac{q(2q+1)}{q+1} D_1^{(N)}(q) \tag{8.15}$$

которое будем называть урезанным (предполагается, очевидно, $^3/_4 b^2 < h^2$).

Комплексные корни уравнения (8.4), если таковые существуют, будут сколь угодно мало отличаться от комплексных корней урезанного уравнения. Поэтому вместо изучения комплексных корней (8.4) будем рассматривать такие же корни уравнения (8.15).

3°. Рассмотрим один вспомогательный вопрос. Пусть дано уравнение

$$\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z = h(z) \tag{8.16}$$

где a_{-1}, a_0, a_1 — вещественные числа, $h(z)$ — аналитическая функция от z, малая при малых значениях и вещественная на вещественной оси.

Попробуем вычислить его корни. Отбрасывая член $h(z)$, получим

$$a_{-1} + a_0 z + a_1 z^2 = 0 \tag{8.17}$$

Отсюда

$$z_{1,2}^{(1)} = -\frac{a_0}{2a_1} \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{4a_1^2} - \frac{a_{-1}}{a_1}} \tag{8.18}$$

Очевидно, корни будут комплексными, если

$$a_0^2 < 4a_1 a_{-1} \quad \text{или} \quad |a_0| < 2\sqrt{a_1 a_{-1}}$$

Максимальное значение мнимой части корня при изменении параметра a_0 будет равно $\sqrt{a_{-1}/a_1}$.

Для отыскания точного решения применим метод последовательных приближений. Пусть

$$a_0^{(n)} = a_0 - \frac{z_2^{(n-1)} h(z_1^{(n-1)}) - z_1^{(n-1)} h(z_2^{(n-1)})}{z_2^{(n-1)} - z_1^{(n-1)}}$$

$$a_1^{(n)} = a_1 + \frac{h(z_2^{(n-1)}) - h(z_1^{(n-1)})}{z_2^{(n-1)} - z_1^{(n-1)}} \tag{8.19}$$

При этом

$$[a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z]_{z=z_1^{(n-1)}} = [a_0 + a_1 z - h(z)]_{z=z_1^{(n-1)}} \tag{8.20}$$

$$[a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z]_{z=z_2^{(n-1)}} = [a_0 + a_1 z - h(z)]_{z=z_2^{(n-1)}}$$

и пусть

$$\frac{a_{-1}}{z_n} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z_n = 0 \tag{8.21}$$

Сходимость последовательных приближений при достаточно малом h вытекает из обычных в таких случаях оценок.

4°. Уравнение (8.15) представляет собою уравнение, в правой части которого стоит мероморфная функция, имеющая простые полюсы в точках, где

$$q\, kb\, J_0(kb) - (q+1) J_1(kb) \tag{8.22}$$

для различных l обращается в нуль.

Вблизи каждого такого полюса можно исследовать ее комплексные корни, пользуясь рассуждениями (3°). Поставим себе целью решить следующую задачу.

Найти, для каких значений угловой скорости волчок заданного веса и формы будет терять устойчивость. Как показано выше, решение этой задачи сводится к отысканию комплексных корней (8.15), имеющих большую мнимую часть.

Определение этих корней удобно провести графически. С этой целью для заданного значения b / h построим кривую

$$y = \varphi_N(q) = \left(1 - \frac{C_2}{A_2^{(0)} - {}^1/_2 C_2}\right)(4q^2 - 1) + \frac{384}{\pi^4} \frac{q(2q+1)}{q+1} D_1^{(N)}(q) \tag{8.23}$$

Корни (8.15) найдутся в точках пересечения параболы

$$y = \frac{1}{\gamma}\left[A^*(2q+1)^2 - C_1(2q+1) + \frac{k}{\omega^2}\right] \tag{8.24}$$

с кривой, определяемой (8.23).

Рассматриваемое уравнение будет иметь мнимые корни тогда, когда парабола пройдет между двумя ветвями функции (8.23). Если начертить кривую (8.23) на бумаге, а затем параболу (8.24) начертить на кальке, то, передвигая ее так, чтобы оси кривых совпадали, можно найти все опасные промежутки изменения частоты по величине отрезка, отсекаемого параболой на прямой $q = -{}^1/_2$ и равного $K / \gamma\omega^2$.

Полюсы $D_1^{(N)}(q)$, как нетрудно видеть, суть те значения q, которые соответствуют колебаниям жидкости при неподвижном цилиндре. Уравнение

$$A_1^*(2q+1)^2 - C_1(2q+1) + \frac{k}{\omega^2} = 0$$

грубо говоря, дает частоты собственных колебаний оболочки волчка с некоторыми поправками за счет моментов инерции жидкости. Все явление поэтому носит характер своеобразного резонанса.

Области опасных значений k / ω^2 лежат приблизительно там, где собственная частота колебаний оболочки близка к одной из собственных частот колебаний жидкости в волчке с неподвижной осью.

5°. Для более удобного применения этого способа укажем, как находить полюсы функций (8.22) и величины вычетов правой части (8.4), относящиеся к этим корням. Из (8.22) получим

$$q = \frac{J_1(kb)}{kb\, J_0(kb) - J_1(kb)} \tag{8.25}$$

При этом очевидно

$$kb = \frac{(2l+1)\pi b}{2h} \frac{\sqrt{k^2b^2J_0^2(kb) - 2kbJ_1(kb)J_0(kb)}}{J_1(1<b)} \tag{8.26}$$

или

$$\frac{h}{(2l+1)b} = \pi \sqrt{\frac{[kbJ_0(kb) - 2J_1(kb)]J_0(kb)}{4[J_1(kb)]^2 kb}} \tag{8.27}$$

т. е.

$$h^* = \frac{h}{(2l+1)b} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{-J_0(kb)J_2(kb)}{[J_1(kb)]^2}} \tag{8.28}$$

Будем рассматривать kb как независимый параметр, тогда (8.27) и (8.25) дадут нам параметрическое уравнение для отыскания пар значений h^* и тех q, при которых уравнение (8.22) имеет корень. Вещественность нужных нам значений требует, чтобы $J_0(kb)J_2(kb)$ было отрицательным. Это обстоятельство будет иметь место при различных kb в разных промежутках между двумя корнями этих функций. Мы получим, таким образом, много ветвей h^* как функции от q и наоборот.

6°. Для нахождения величины вычетов в каждом корне воспользуемся теорией уравнений Рикатти. Рассмотрим уравнение

$$y' + py^2 + qy + r = 0 \tag{8.29}$$

с аналитическими коэффициентами в некотором промежутке изменения независимого переменного $a < x < b$. Пусть в окрестности некоторой точки x_0 из этого промежутка

$$p = p_0 + p_0'(x - x_0) + \frac{p_0''}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$q = q_0 + q_0'(x - x_0) + \ldots, \qquad r = r_0 + \ldots \tag{8.30}$$

Допустим, что $p \neq 0$. Если уравнение (8.29) имеет решение с полюсом в точке x_0, то полюс этот может, очевидно, быть лишь полюсом первого порядка. В окрестности x_0 в этом случае имеет место представление

$$y = \frac{a_{-1}}{x - x_0} + a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots \tag{8.31}$$

Подставляя (8.31) в (8.29), находим

$$a_{-1} = \frac{1}{p_0}, \quad a_0 = -\frac{1}{2p_0}\left(\frac{p_0'}{p_0} + q_0\right) \tag{8.32}$$

$$a_1 = -\frac{1}{3p_0^2}p_0'' + \frac{1}{12p_0}\left(\frac{p_0'}{p_0} + q_0\right)\left(\frac{3p_0'}{p_0} - 2q_0\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{q_0'}{p_0} + r_0\right)$$

Для всякой функции

$$y = \frac{\alpha x J_0(x) + \beta J_1(x)}{\gamma x J_0(x) + \delta J_1(x)} \tag{8.33}$$

легко составить уравнение Рикатти, которому она удовлетворяет. Коэффициенты этого уравнения будут

$$p = \frac{1}{\Delta}\left[\delta\left(\gamma' + \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x}\right) - \gamma\left(\delta' - \gamma x - \frac{\delta}{x}\right)\right]$$

$$r = \frac{1}{\Delta}\left[\beta\left(\alpha' + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x}\right) - \alpha\left(\beta' - \alpha x - \frac{\beta}{x}\right)\right] \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$q = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha\left(\delta' - \gamma x - \frac{\delta}{x}\right) - \delta\left(\alpha' + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x}\right) - \beta\left(\gamma' + \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \gamma\left(\beta' - \alpha x - \frac{\beta}{x}\right)\right] \tag{8.34}$$

Если воспользоваться (8.34) и (8.32), то после несложных вычислений получим, что в каждом своем полюсе функция

$$\frac{q(2q+1)}{q+1}\frac{384}{\pi^4}\frac{1}{(2l+1)^4}\frac{q^2 kb\, J_0(kb)-(3q^2-1)\, J_1(kb)}{q\, kb\, J_0(kb)-(q+1)\, J_1(kb)} \tag{8.35}$$

должна иметь вычет

$$\mathrm{res}_l(q_0)=\frac{384}{\pi^4}\frac{1}{(2l+1)^4}\frac{q_0^3(2q_0+1)^2(1-q_0)}{(q_0+1)[q_0+1+(2l+1)^2\pi^2 b^2/4h^2]}$$

7°. Как мы видим из сравнения волчка с эллипсоидальной полостью и волчка с цилиндрической полостью, поведение таких волчков существенным образом зависит от формы полости.

Эллипсоидальная форма полости является существенно особой из-за того, что при всевозможных значениях собственной угловой скорости колебания оболочки связаны лишь с основным тоном колебаний жидкости во вращающемся волчке с неподвижной осью.

Обобщенный резонанс, о котором мы говорили выше, возможен здесь лишь в одном конечном промежутке ν, а неустойчивость, кроме значений ν из этого промежутка, может иметь место лишь для очень малых значений угловой скорости.

Для цилиндра колебания оболочки связаны со всем бесконечным множеством форм колебания жидкости и поэтому областей резонанса бесконечно много.

Волчок с эллиптической полостью должен быть поэтому спокойнее при своем вращении. Запущенный волчок с эллиптической полостью по мере уменьшения своей угловой скорости либо сразу окончательно выйдет из устойчивого состояния, либо только один раз перед этим пройдет состояние неустойчивости, вернувшись вслед за этим к спокойному движению.

Волчок с цилиндрической полостью будет вести себя беспокойно. Запущенный с какой-то угловой скоростью, он будет по мере уменьшения этой скорости не один раз терять устойчивость и снова ее восстанавливать.

Поступила
25 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954, т. 18.
2. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа. Математ. сб., 1938, (46), 3, № 4.
3. Уиттекер Е. Т. и Ватсон. Курс современного анализа. Ч. II, ГТТИ, Л.—М. 1934, т. 2, стр. 182.