

О ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ СОСТОЯНИЙ ПЛАЗМЫ
С АНИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТЕЙ В
МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. М. Заславский, С. С. Мусеев

(Новосибирск)

Известно, что плазма, находящаяся в магнитном поле, может обладать анизотропным распределением по скоростям. Одним из механизмов, приводящим к такой анизотропии, является изменение магнитного поля с частотой, большей частоты соударений, но меньшей ларморовской [1]. Вопросы устойчивости анизотропных состояний в магнитном поле исследовались в [2,5]. В [4] показана возможность неустойчивости нерелятивистской плазмы типа «колебаний» с раскачкой, возникающая из-за циклотронного резонанса даже при слабой анизотропии. При этом вследствие эффекта Доплера частицы из «хвоста» распределения по скоростям могут передавать энергию низкочастотным колебаниям.

В предлагаемой работе рассматривается циклотронная неустойчивость анизотропной релятивистской плазмы (п. 1). Далее исследуется анизотропия, возникающая вследствие излучения электронов в магнитном поле, если характерное время излучения много меньше времени между столкновениями (п. 2). Обсуждается поведение найденного распределения электронов при циклотронном резонансе.

1. Релятивистское кинетическое уравнение для функции распределения электронов $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ для процессов с частотой, много большей частоты соударений, запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left\{ e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H})] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{E} , \mathbf{H} — волновые поля, \mathbf{H}_0 — постоянное магнитное поле, \mathbf{p} — импульс электрона.

Считая \mathbf{E} и \mathbf{H} малыми, будем искать решение (1.1) в виде

$$f = f_0 + f_1$$

где f_1 — малая поправка, а $f_0 = f_0(\sqrt{1 + u_\alpha^2}, (u_\alpha H_{0\alpha})^2)$ — решение уравнения¹

$$[\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.2)$$

Функцию f_0 можно записать в релятивистски инвариантной форме

$$f_0 = f_0(U_i u_i, (\varepsilon_{iklm} u_i U_k F_{lm})^2)$$

Здесь u_i и U_i — скорости соответственно частицы и усредненного движения (в рассматриваемой системе отсчета $U_\alpha = 0$), F_{lm} — тензор электромагнитного поля, связанного с \mathbf{H}_0 , ε_{iklm} — антисимметричный единичный тензор четвертого ранга.

Рассматривая волну в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ и полагая

$$f_1 = \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)] \Phi(\mathbf{p}) \quad (1.3)$$

получаем для Φ уравнение

$$i(\mathbf{kv} - \omega) \Phi + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} + eE_\alpha^0 \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{kv}}{\omega}\right) \frac{\partial f_0}{\partial p_\alpha} + \frac{v_\alpha}{\omega} \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \right\} = 0$$

¹ Греческие индексы пробегают три значения, а латинские — четыре.

Переходя к цилиндрическим координатам в пространстве импульсов (p_{\parallel} , p_{\perp} , φ) с осью z вдоль \mathbf{H}_0 и ограничиваясь случаем $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$, получаем

$$\Phi(\mathbf{p}) = -\frac{e}{\omega_H} \int_0^{\infty} e^{ia\xi} \mathbf{E}^{\circ} \mathbf{L} d\xi \quad (1.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_H &= \frac{\Omega}{\sqrt{1+u^2}}, & \Omega &= \left| \frac{eH_0}{mc} \right|, & u^2 &\equiv u_{\alpha}^2, & a &= \frac{\omega - kv_{\parallel}}{\omega_H} \\ L_x &= 2p_{\perp} \cos(\varphi - \xi) \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} + \frac{kv_{\parallel}}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} \right) \right] \\ L_y &= 2p_{\perp} \sin(\varphi - \xi) \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} + \frac{kv_{\parallel}}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} \right) \right] \\ L_z &= 2p_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2}, & \mathbf{p}_{\perp} &\perp \mathbf{H}_0, & \mathbf{p}_{\parallel} &\parallel \mathbf{H}_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

В дальнейшем величину ω_H будем называть ларморовской частотой. Учитывая (1.3) и (1.4), получаем для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, связанного с электронными колебаниями

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - i \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega\Omega} \int d\mathbf{p} p_{\alpha} \int_0^{\infty} d\xi e^{ia\xi} L_{\beta} \quad (1.6)$$

где n_0 — плотность электронов. Выражение для $\varepsilon_{\alpha\beta}$ релятивистской плазмы с начальной максвелловской функцией распределения получено в [6]. Выполняя в (1.6) интегрирование по ξ и проделывая преобразования, аналогичные [4], получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega} \int d\mathbf{p} p_{\perp}^2 \sum_{n=1, -1} \left(-i\pi F_1 \delta_+ + \frac{1}{\omega} F_2 \right), & \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xx}, \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = -\frac{i}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega} \int d\mathbf{p} p_{\perp}^2 \sum_{n=1, -1} n \left(-i\pi F_1 \delta_+ + \frac{1}{\omega} F_2 \right) \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - i \cdot 2 \frac{\omega_p^2}{\omega} \int d\mathbf{p} p_{\parallel}^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} \delta_+ (\gamma(\omega - kv_{\parallel})), & \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} + \frac{n\omega_H}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} \right), & F_2 &= \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2}, & \omega_p^2 &= \frac{4\pi e^2 n_0}{m} \\ \delta_+ &= \delta_+((\omega - kv_{\parallel})\gamma - n\Omega), & \delta_+(x) &= \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x} + \delta(x), & \gamma &= \sqrt{1+u^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Легко видеть, что полученные компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в нерелятивистском пределе совпадают с соответствующими выражениями из [4], если в последних положить $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$.

Как и в нерелятивистском случае, неустойчивость может возникнуть при перемене знака антиэрмитовой части $\varepsilon_{\alpha\beta}$, т. е. при перемене знака F_1 . Последнее возможно, если

$$\begin{aligned} \omega < \omega_H \left(1 - \frac{\partial f_0 / \partial p_{\perp}^2}{\partial f_0 / \partial p_{\parallel}^2} \right) & \quad \left(n = 1, \left| \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} \right| < \left| \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} \right| \right) \\ \omega < \omega_H \left(\frac{\partial f_0 / \partial p_{\perp}^2}{\partial f_0 / \partial p_{\parallel}^2} - 1 \right) & \quad \left(n = -1, \left| \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} \right| > \left| \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} \right| \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отметим, что в отличие от нерелятивистского случая, где условия (1.9) могут не зависеть от скоростей (как, например, для максвеллов-

ского распределения с двумя температурами), в релятивистском случае условия (1.9) не выполняются для всего интервала скоростей (хотя бы из-за зависимости ω_H от энергии). Поэтому окончательно вопрос об устойчивости может быть решен после исследования интеграла в анти-эрмитовой части $\epsilon_{\alpha\beta}$.

При выполнении первых двух уравнений (1.9) для электронных колебаний неустойчивость связана с раскачкой необыкновенной волны. Дисперсионное уравнение для необыкновенной волны имеет вид

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega} \int d\mathbf{p} p_{\perp}^2 \left\{ -i\pi\delta_{\pm}((\omega - kv_{\parallel})\gamma - \Omega) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} + \frac{\omega_H}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} \right) \right] + \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} \right) \right\} \quad (1.10)$$

В качестве f_0 возьмем

$$f_0 = A \exp \left\{ -\sigma \left(\sqrt{1 + p^2/(m^2 c^2)} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma m c} p_{\parallel} \right)^2} \right) \right\} \quad (1.11)$$

удовлетворяющую (1.2). Здесь σ, σ_1 — параметры распределения, A — нормировочный множитель. Легко убедиться, что нерелятивистским пределом (1.11) является максвелловское распределение с двумя температурами T_{\parallel} и T_{\perp} , причем

$$\sigma = \frac{mc^2}{T_{\perp}}, \quad \sigma_1 = \sigma \left(\frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right)^{1/2} \quad (T_{\perp} > T_{\parallel}) \quad (1.12)$$

Учитывая, что при слабой анизотропии неустойчивость возможна при $\omega \ll \omega_H$ и пренебрегая анизотропией при вычислении $\text{Re } N^2$, имеем

$$\text{Re } N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega} (mc)^3 A \pi \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} \left(\sqrt{1 + u_{\parallel}^2} + \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\exp(-\sigma \sqrt{1 + u_{\parallel}^2})}{\Omega - kcu_{\parallel}}$$

Ограничиваясь случаем

$$\Omega \gg kc \sqrt{u_{\parallel}^2} \quad (1.13)$$

получаем известную формулу

$$\text{Re } N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega\Omega} \quad (1.14)$$

Перейдем теперь к вычислению $\text{Im } N^2$. Для этого в аргументе δ -функции пренебрежем ω по сравнению с kv_{\parallel} . Согласно (1.14) точность такого пренебрежения определяется неравенством $\omega_p^2 \gg \omega\Omega$. С учетом сказанного получаем

$$\text{Im } N^2 = -\pi \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{m}{k} \int d\mathbf{p} p_{\perp}^2 \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} + \frac{\omega_H}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} \right) \right\} \delta \left(p_{\parallel} + \frac{m}{k} \Omega \right)$$

Выполняя простое интегрирование, находим

$$\text{Im } N^2 = -2\pi^2 A \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{(mc)^3}{k\sigma} \left\{ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^2 \left[\frac{\Omega}{\omega} \sqrt{1 + \kappa^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma \sqrt{1 + \kappa^2}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 + \kappa^2) \left(1 + \frac{3}{\sigma \sqrt{1 + \kappa^2}} + \frac{3}{\sigma^2 (1 + \kappa^2)} \right) \right] / \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1 \kappa}{\sigma} \right)^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{1 + \kappa^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma \sqrt{1 + \kappa^2}} \right) \right\} \exp \left\{ -\sigma \left(\sqrt{1 + \kappa^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1 \kappa}{\sigma} \right)^2} \right) \right\} \quad (1.15)$$

где $\kappa = \Omega/(kc)$. Выражение (1.14) в нерелятивистском пределе при $\Omega \ll kc$ совпадает с соответствующим выражением из [4]. При помощи

(1.15) можно найти область частот, при которых возможна неустойчивость. Из простых соображений следует, что неустойчивость появится, если выражение в фигурных скобках (1.15) положительно. Ввиду громоздкости вычислений ограничимся ультрарелятивистским случаем ($\sigma \rightarrow 0$). Нетрудно убедиться, что при $\sigma \rightarrow 0$ $\overline{u_{\parallel}^2} \approx 1/\sigma^2$. Сохраняя неравенство (1.13), получим

$$\kappa\sigma \gg 1 \quad (1.16)$$

Используя формулу для тензора энергии — импульса

$$T_{ik} = imc^2 \int u_i \frac{u_k}{u_4} f_0 dp$$

и вычисляя давления P_{\perp} и P_{\parallel} при слабой анизотропии ($P_{\perp} \approx P_{\parallel} \equiv P$), убеждаемся в справедливости формулы

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 = \frac{\Delta P}{P} \frac{K_2(\sigma)}{K_3(\sigma)} \quad (\Delta P = P_{\perp} - P_{\parallel}) \quad (1.17)$$

где $K_{\mu}(\sigma)$ — функция Макдональда соответствующего индекса. Из (1.17) в ультрарелятивистском случае имеем

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 \approx \sigma \frac{\Delta P}{P} \quad (1.18)$$

что совместно с (1.16) дает при фиксированном $\Delta P/P$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} \kappa \gg 1, \quad \sigma \rightarrow 0 \quad (1.19)$$

Используя (1.14), (1.16), (1.18) находим из (1.15) искомое условие неустойчивости

$$\omega < \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 \frac{\omega_p^2}{\Omega} \left/ \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 \right. \quad (1.20)$$

Отметим, что в нерелятивистском случае условие неустойчивости имеет вид

$$\omega < \Omega \frac{\Delta P}{P} \quad (1.21)$$

Таким образом, область частот, при которых наступает неустойчивость, отличается в ультрарелятивистском случае от нерелятивистского на фактор $\sigma(\omega_p/\Omega)^2$ (отметим, что в интересующем нас случае, $\omega_p \ll \Omega$). Следует помнить, однако, что область применимости (1.20) определяется предположениями, сделанными при вычислении $\text{Im } N^2$ и $\text{Re } N^2$.

2. При изучении устойчивости релятивистской плазмы роль излучения электронов в магнитном поле может оказаться существенной. Однако некоторые особенности влияния излучения на поведение функции распределения электронов можно уже представить, рассматривая нерелятивистскую плазму. Для характерных времен рассеяния и излучения, рассчитываемых соответственно по формулам

$$\tau^- = \frac{\sqrt{m} \varepsilon_e^{3/2}}{\pi \sqrt{2} (e^2 Z)^2 n_i} \frac{1}{\lambda}, \quad \tau^* = \frac{3}{2} \frac{m^3 c^5}{e^4 H_0^2} \quad (2.1)$$

имеем при плотности ионов $n_i \approx 10^{10} \text{ см}^{-3}$, энергии электронов $\varepsilon_e \approx 20 \text{ keV}$, для $H_0 \approx 10^5 \text{ Oe}$ и малых зарядах ионов

$$\tau^- \gg \tau^*$$

(при рассматриваемых температурах кулоновский логарифм $\lambda \approx 20$). Это дает возможность рассмотреть для функции распределения электронов задачу без учета столкновений.

Для функции распределения однородной плазмы в однородном магнитном поле имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{F}^* f) + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad \left(\mathbf{F}^* = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^5} [\mathbf{H}_0 [\mathbf{H}_0 \mathbf{v}]] \right) \quad (2.2)$$

При начальном максвелловском распределении электронов по скоростям с температурой T и плотностью n_0

$$f(0, \mathbf{p}) = n_0 (2\pi m T)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2T} (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) \right\} \quad (2.3)$$

учитывая, что сила торможения излучением меняет лишь величину v_{\perp} , а функция распределения будет аксиально симметричной, имеем вместо (2.2)

$$\frac{\partial f}{\partial t} - K v_{\perp}^2 \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}^2} - K f = 0 \quad \left(K = \frac{4}{3} \frac{e^4 H_0^2}{m^3 c^5} \right) \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$dt = -\frac{d(v_{\perp}^2)}{K v_{\perp}^2} = \frac{d(v_{\parallel}^2)}{0} = \frac{df}{Kf}$$

решением которой, удовлетворяющим (2.3), будет

$$f(t, p_{\perp}^2, p_{\parallel}^2) = n_0 (2\pi m T)^{-3/2} \exp \left\{ Kt - \frac{m}{2T} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 e^{Kt}) \right\} \quad (2.5)$$

Решение (2.7) означает появление анизотропного «максвелла» с

$$T_{\parallel} = T, \quad T_{\perp} = T \exp(-Kt) \quad (2.6)$$

Согласно [4] при $T_{\perp} < T_{\parallel}$ неустойчивости при электронных колебаниях не возникает. Это связано с тем, что при указанной анизотропии раскачку колебаний могла бы вызвать обыкновенная волна; однако для нее не выполняются условия циклотронного резонанса.

Рассмотрим падение волны на плазму, для которой $\omega t^* \gg 1$. Возникающую под действием волны плотность тока электронов

$$\mathbf{j}(t, t_0; \mathbf{r}) = \theta(t - t_0) e \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f^{(1)} \exp \{ i(\mathbf{kr} - \omega t) \} \quad \left(\theta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \right)$$

где $f^{(1)} = f^{(1)}(t_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — малая поправка к функции распределения (2.5), взятой в момент t_0 (t_0 равно промежутку времени от момента включения магнитного поля до момента падения волны на плазму).

Отметим, что при рассматриваемой анизотропии необыкновенная волна при $\omega < \Omega$ затухает с декрементом, равным

$$\text{Im } N^2 = \sqrt{\frac{\pi m}{2T_{\parallel}} \frac{\omega_p^2}{\omega k}} \left\{ e^{-Kt_0} + \frac{\Omega}{\omega} (1 - e^{-Kt_0}) \right\} \exp \left(-\frac{m\Omega^2}{2k^2 T_{\parallel}} \right)$$

Поступила 26 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у д к е р Г. И. Бетатронный метод разогрева плазмы до высоких температур. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 1, Изд-во АН СССР, 1958, стр. 122.
2. Р у д а к о в Л. И., С а г д е е в Р. З. О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 3, Изд-во АН СССР, 1958, стр. 268.
3. В е д е н о в А. А., С а г д е е в Р. З. О некоторых свойствах плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов в магнитном поле. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 3, Изд-во АН СССР 1958, стр. 278.
4. С а г д е е в Р. З., Ш а ф р а н о в В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле. ЖЭТФ, 1960, 39, 181.
5. К и ц е н к о А. Б., С т е п а н о в К. Н. О циклотронной неустойчивости в плазме. ЖТФ, 1961, т. 31, 176.
6. Т р у б н и к о в Б. А. Электромагнитные волны в релятивистской плазме при наличии магнитного поля. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 3, Изд-во АН СССР, 1958, 104.