

О ДИФФУЗИИ ИМПУЛЬСНЫХ СВЕРХСИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В. В. Семченко, А. В. Степанов

(Москва)

Изучаются процессы, происходящие в металлах при диффузии импульсных сверхсильных магнитных полей. Получены решения для случая диффузии постоянного сверхсильного магнитного поля в полупространство с плоской границей и для случая диффузии аксиального сосредоточенного магнитного поля. Найдены предельные значения магнитных полей, которые можно получить в различных экспериментальных устройствах. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Существующие теории разогрева скин-слоя металлов основаны на том, что проводимость либо не зависит от температуры T [1], либо определяется [2] зависимостью

$$\sigma = \sigma_0 / (1 + \beta T),$$

где β — температурный коэффициент сопротивления, σ_0 — проводимость при $T=0$.

Однако выделение джоулева тепла при диффузии магнитного поля приводит в сверхсильных полях к испарению металла. Так как чистые металлы являются элементарными (одноатомными) веществами, то в испаренном состоянии они не диссоциируют и могут обладать проводимостью, отличной от нуля, только за счет ионизации. Но известно, что при импульсном испарении металла, разогретого до температуры кипения T_* , ионизации его паров препятствует их высокая плотность. О нулевой проводимости испаренного металла высокой плотности свидетельствует, например, наличие «паузы тока» [3] при электрическом взрыве проволок.

В связи с этим возникает необходимость исследования влияния падения проводимости до нуля при разогреве металла до температуры кипения и испарении его на процессы диффузии магнитного поля.

1. Диффузия постоянного сверхсильного магнитного поля в полупространство. Рассмотрим процесс диффузии магнитного поля $H(x, t)$ в полупространство $x > 0$ при $H(x, 0) = 0$ и $H(0, t) = H_0$, где H_0 — постоянное сверхсильное магнитное поле.

Пусть проводимость металла, заполняющего полупространство, удовлетворяет следующему условию:

$$\sigma = \text{const} \quad (Q < Q_*), \quad \sigma = 0 \quad (Q = Q_*) \quad (1.1)$$

Здесь $Q(x, t)$ — количество тепла, выделившееся в единице объема в сечении x к моменту времени t , причем $Q(x, 0) = 0$ и Q_* — количество тепла, необходимое для нагревания единицы объема металла от начальной температуры до температуры его кипения и для его полного испарения. Таким образом, считаем, что при поглощении тепла Q_* происходит изменение физического состояния: из проводника металл превращается в диэлектрик.

Если магнитное поле достаточно велико, то поверхность, на которой проводимость падает до нуля (поверхность фазового перехода), проникает в глубь полупространства по закону $x = \xi(t)$. При этом на поверхности фазового перехода выполняется условие

$$Q(\xi, t) = Q_* \quad (1.2)$$

Теплопроводность расплавленных металлов при всех температурах вплоть до критической [4] подчиняется закону Видемана — Франца — Лоренца

$$\kappa = L\sigma T \quad (L = 2.44 \cdot 10^{-8} \text{ вт} \cdot \text{ом/град}^2 \text{ — константа Лоренца}) \quad (1.3)$$

В области полупространства, не претерпевшей фазового перехода, уравнение теплопроводности с учетом джоулева тепла имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \quad (1.4)$$

Для области, не разогретой до температуры кипения T_* , порядок величин, входящих в правую часть последнего уравнения, можно оценить, используя (1.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big/ \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \sim \frac{L\sigma T^2}{H^2} \ll 1$$

при $\sigma < 5 \cdot 10^7 \text{ 1/ом} \cdot \text{м}$; $T \ll T_* = 2600^\circ \text{С}$, $H > 10^8 \text{ а/м}$ (1 Мэ)

Следовательно, в этой области при диффузии сильных магнитных полей эффект теплопроводности можно не учитывать. В области, где происходит испарение, температура остается постоянной до полного испарения металла, т.е. первый член правой части формулы (1.4) равен нулю, и теплопроводность так же отсутствует.

Таким образом, во всей области, не претерпевшей фазового перехода, теплопроводностью можно пренебречь, и уравнение (1.4) имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \quad (\xi < x < \infty) \quad (1.5)$$

При диффузии магнитного поля также можно пренебречь токами смещения вне проводников, поэтому

$$H(x, t) = H_0 \quad (0 \leq x \leq \xi) \quad (1.6)$$

Согласно предположению (1.1) в области полупространства, не претерпевшей фазового перехода, проводимость постоянна, и уравнение диффузии магнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \eta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad \left(\xi < x < \infty, \eta^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon} \right) \quad (1.7)$$

Здесь η^2 — коэффициент диффузии магнитного поля, μ — магнитная проницаемость.

Таким образом, задача о диффузии постоянного сверхсильного магнитного поля H_0 в полупространство с проводимостью, удовлетворяющей (1.1), сводится к решению системы уравнений (1.5) и (1.7).

Ищем решение уравнения (1.5) в виде

$$H(x, t) = A + B\Phi\left(\frac{x}{2\eta\sqrt{t}}\right) \quad \left(\Phi(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau, A, B = \text{const} \right) \quad (1.8)$$

Из начального условия для напряженности магнитного поля и условия на границе фазового перехода (1.6) получаем

$$H_0 = A [1 - \Phi(\xi / 2\eta\sqrt{t})] \quad (1.9)$$

Так как последнее равенство справедливо при любых t , то

$$\xi / \sqrt{t} = \alpha = \text{const} \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) является законом движения границы фазового перехода. Из (1.9) и (1.10) получим

$$A = H_0 / [1 - \Phi(\alpha / 2\eta)] \quad (1.11)$$

Используя полученное решение (1.8) в (1.5), получаем после простых вычислений

$$Q(x, t) = \frac{\mu}{\pi} A^2 E_1\left(\frac{x^2}{2\eta^2 t}\right) + \Phi(x) \quad \left(E_1(z) = \int_z^\infty e^{-\tau} \tau^{-1} d\tau \right) \quad (1.12)$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция. Из начального условия $\Phi(x) = 0$, а из (1.11), (1.12) и условия на границе фазового перехода имеем

$$Q_* = \frac{\mu}{\pi} H_0^2 \frac{E_1(\alpha^2 / 2\eta^2)}{[1 - \Phi(\alpha / 2\eta)]^2} \quad (1.13)$$

Используя асимптотические приближения функций $\Phi(z)$ [5] и $E_1(z)$ [6], при $z \rightarrow \infty$ получаем предельное значение магнитного поля H_{\max}

$$H_{\max} = (2Q_* / \mu)^{1/2} \quad (\alpha / 2\eta \rightarrow \infty) \quad (1.14)$$

Если величина поля H_0 достигает значения H_{\max} , скорость его диффузии бесконечна. Это означает, что сохранение полей, больших H_{\max} , неосуществимо в любых экспериментальных устройствах с плоскими границами.

2. Диффузия постоянного сверхсильного аксиального магнитного поля. Пусть в момент времени $t = 0$ сверхсильное магнитное поле H_0 сосредоточено на прямой $r = 0$, где r — цилиндрическая координата. Рассмотрим диффузию поля в пространстве с проводимостью, удовлетворяющей условию (1.1). Будем считать также, что в процессе диффузии напряженность магнитного поля на прямой $r = 0$ поддерживается постоянной и равной H_0 при помощи какого-либо внешнего устройства.

Поскольку в этом случае имеют место такие же физические процессы, как и при диффузии в полупространство, то задача сводится к решению в цилиндрической си-

стеме координат системы уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\eta^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 \quad (\xi < r < \infty) \quad (2.1)$$

Здесь $r = \xi(t)$ — закон движения границы фазового перехода.
Начальные условия

$$Q(r, 0) = 0, \quad H(r, 0) = 0 \quad (2.2)$$

Граничные условия

$$H(r, t) = H_0 \quad (0 \leq r \leq \xi), \quad Q(\xi, t) = Q_* \quad (2.3)$$

Решение первого уравнения (2.1) ищется в виде

$$H(r, t) = A + BE_1(r^2 / 4\eta^2 t) \quad (AB = \text{const}) \quad (2.4)$$

Из второго начального условия (2.2) следует, что $A = 0$, а из граничного условия (2.3)

$$H_0 = BE_1(\xi^2 / 4\eta^2 t) \quad (2.5)$$

и закон движения границы фазового перехода имеет тот же вид, что и в случае диффузии магнитного поля в полупространство

$$\xi / \sqrt{t} = \alpha = \text{const} \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) получим

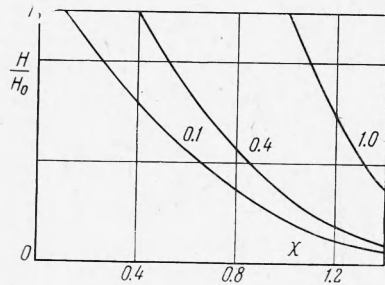
$$B = H_0 / E_1(\alpha^2 / 4\eta^2) \quad (2.7)$$

Решение второго уравнения (2.1) принимает при этом вид

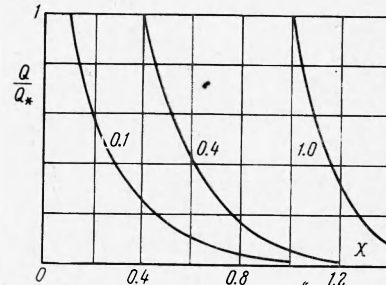
$$Q(r, t) = \frac{2\mu}{\pi} B^2 \frac{E_2(r^2 / 2\eta^2 t)}{r^2 / 2\eta^2 t} + \psi(r) \quad \left(E_2(z) = \int_1^\infty e^{-zu} u^{-2} du \right) \quad (2.8)$$

где $\psi(r)$ — произвольная функция.

Из начального условия для Q (2.2) видно, что $\psi(r) = 0$, а из (2.7), (2.8) и гранично-



Фиг. 1



Фиг. 2

го условия (2.3) получаем уравнение для определения закона движения границы фазового перехода

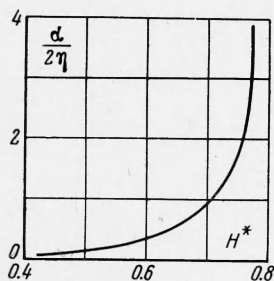
$$Q_* = \frac{2\mu}{\pi} H_0^2 \frac{E_2(\alpha^2 / 2\eta^2)}{[E_1(\alpha^2 / 4\eta^2)]^2 \alpha^2 / 2\eta^2} \quad (2.9)$$

Используя асимптотические приближения функций $E_1(z)$ и $E_2(z)$ [6], получаем предельные значения магнитного поля

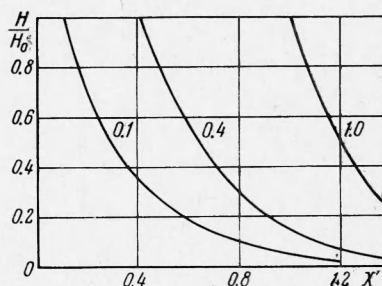
$$H_{\text{max}} = (2\pi Q_* / \mu)^{1/2} \quad (\alpha \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

Формулы (2.4) и (2.8) можно использовать для решения задачи о диффузии сверхсильного поля из отверстия конечного радиуса R . Для этого нужно при $r = R$ в начальный момент времени t_0 задавать такое распределение магнитного поля и выделенного тепла, которое дают формулы (2.4) и (2.8) при учете (2.3) и (2.9) и при условии $H(R, t_0) = H_0$. Для предельных значений H_{max} введение нового начального условия, очевидно, окажется несущественным и оценка (2.10) останется справедливой.

3. Сравнение с экспериментальными данными. На графиках фиг. 1 и фиг. 2 представлены распределения магнитного поля и выделенного количества тепла по глубине для различных скоростей $X = \frac{1}{2}x / \eta \sqrt{t}$ движения границы фазового перехода в случае диффузии магнитного поля в полупространство. Кривые соответствуют значениям $\frac{1}{2}\alpha / \eta = 0.1, 0.4, 1.0$, которые указаны на фигурах. Из приведенных графиков видно, что с увеличением α наклон кривых распределения увеличивается. Поэтому можно считать, что при достаточно большой величине α магнитное поле диффундирует в металл со скоростью движения границы фазового перехода, почти не проникая за нее.



Фиг. 3



Фиг. 4

На графике фиг. 3 представлена зависимость скорости распространения магнитного поля от величины напряженности $H^* = H_0 / \sqrt{\pi Q_* / \mu}$. Из этого графика видно, что при приближении к предельному значению напряженности магнитного поля H_{\max} , определенному по (1.14), скорость распространения магнитного поля в глубь металла резко возрастает. Это означает, что при увеличении мощности источника магнитного поля, утечка магнитного поля возрастает еще быстрее и значение H_{\max} не достигается.

Оценим предельное значение магнитного поля, которое может быть получено в устройствах с плоскими металлическими границами. Очевидно

$$Q_* \sim s(T_* - T_0) + \lambda + q \tag{3.1}$$

Здесь s — теплоемкость, q — теплота плавления, λ — скрытая теплота испарения единицы объема металла и T_0 — начальная температура.

Для меди $s \sim 6 \text{ ккал/моль} \cdot \text{град}$, $\lambda \sim 73 \text{ ккал/моль}$ и при $T_* \sim 2600^\circ \text{C}$ из (3.1) и (1.14) имеем $H_{\max} \sim 2.9 \cdot 10^8 \text{ а/м}$ (3.6 Мэ). Заметим, что на значения Q_* и H_{\max} могут повлиять давления паров на границе фазового перехода.

Магнитное давление P_n в области, претерпевшей фазовый переход равно нулю, так как оно является следствием пондеромоторных сил

$$P_n(x, t) = \mu \int_0^x H(x, t) \frac{\partial H}{\partial x} dx$$

В экспериментальных работах [7-10] в полосовых и коаксиальных МК-генераторах получены магнитные поля, достигающие величины 1.6 Мэ, независимо ни от линейных размеров, ни от величин начальных магнитных полей и токов, ни от скорости обжата контура. В работе [11] сообщается о получении магнитного поля напряженностью 2.6 Мэ.

На графиках фиг. 4 и фиг. 5 представлены распределения магнитного поля и выделенного количества тепла по глубине при различных значениях скорости движения границы фазового перехода в случае диффузии сосредоточенного аксиального постоянного сверхсильного магнитного поля. Из графиков видно, что кривые распределения имеют больший наклон, чем в случае диффузии поля в полупространство.

На графике фиг. 6 приведена зависимость скорости движения границы фазового перехода от величины магнитного поля. Используя (3.1) и (2.10) для предельного значения напряженности магнитного поля, в случае медных оболочек получаем

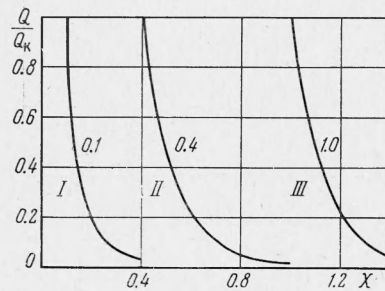
$$H_{\max} \sim 5.1 \cdot 10^8 \text{ а/м} \text{ (6.4 Мэ)}$$

В экспериментах, использующих разряд батарей конденсаторов на одновитковый соленоид из меди, бронзы, закаленной стали, удалось получить магнитные поля нап-

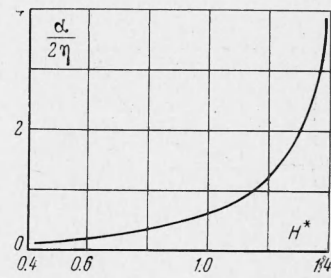
ряженностью до 1.6 Мэ [12]. Однако в этом случае соленоид снабжался плоским радиальным разрезом через который подводилось магнитное поле. По оценке (2.10) магнитное поле в разрезе, а следовательно, и в соленоиде не может превышать 3 Мэ , что близко к наблюдаемой в экспериментах величине.

Совпадение же предельных значений напряженности магнитного поля в соленоидах из различных материалов, начальные проводимости которых отличаются по меньшей мере в десять раз, объясняется тем что по полученным оценкам (1.14) и (2.10) предельное магнитное поле зависит не от проводимости, а от теплоты испарения Q_v , которая для использованных материалов примерно одинакова. В осесимметричных МК-генераторах довольно легко получают магнитные поля напряженностью $4\text{--}5 \text{ Мэ}$ [9,13-15], что близко к полученной из (2.10) оценке.

Магнитные поля напряженностью $14\text{--}25 \text{ Мэ}$ удалось получить лишь в отдельных экспериментах [7,8,16].



Фиг. 5



Фиг. 6

В отличие от рассмотренных выше систем, в осесимметрических МК-генераторах в области, претерпевшей фазовый переход и на границе фазового перехода могут возникать высокие давления за счет обжатия оболочки. Произведем оценку давлений P , возникающих в идеальной несжимаемой оболочке, плотностью ρ . Наибольший интерес представляют давления в области, претерпевшей фазовый переход, и на ее границах, где отсутствуют объемные пондеромоторные силы. В этой области гидродинамические уравнения для несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial r v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3.2)$$

где r — цилиндрическая координата.

Экспериментально установлено [9,16] что почти до полной остановки внутренняя граница оболочки движется с постоянной скоростью v_b . Тогда $r_b = r_0 - v_b t$, где r_0 и r_b — радиусы внутренней границы оболочки в начальный и текущий моменты времени, соответственно. Внутренняя граница оболочки свободна, поэтому $P(r_b, t) = 0$.

Решение системы уравнений (3.2) при этих условиях имеет вид

$$P = \rho v_b^2 [\ln r / r_b + 1/2 (1 - r_b^2 / r^2)]$$

Для меди $\rho = 8.9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, и при $v_b = 3000 \text{ м/сек}$ и $r_b / r \sim 0.5$ получаем из последней формулы $P = 800 \text{ кбар}$, что значительно превышает критические давления.

Из этого следует, что в осесимметричных МК-генераторах, достигнув глубины, на которой давление равно критическому, граница фазового перехода останавливается и если давления продолжают расти, то начинается ее движение в противоположную сторону.

На основании этого можно предполагать, что с увеличением начальной напряженности магнитного поля глубина его диффузии увеличивается, но одновременно растет и давление в области границы фазового перехода, и конечное магнитное поле может превысить оценку (2.10).

Результаты экспериментальных работ подтверждают это. Для примерно одинаковых геометрических и энергетических условий при начальных значениях магнитного поля, равных 25 , 33 и 90 кэ , получены H_{max} , соответственно равные $2 \div 3 \text{ Мэ}$ [16]; 3.7 Мэ [15] и 14.3 Мэ [16].

В работах [7,8] сообщается о получении $H_{\text{max}} \sim 25 \text{ Мэ}$ при $v_b \sim 10 \div 20 \text{ км/сек}$. Начальное магнитное поле создавалось в этом случае при помощи соленоидального МК-генератора и, по-видимому, превосходило 90 кэ .

