ЛИТЕРАТУРА

1. **Rogers H. C.** Adiabatic plastic deformation.— Ann. Rev. Mater. Sci., 1979, v. 9.
2. **Shockey D. A., Erlich D. C.** Metallurgical influences on shear band activity.— In: Shock waves and high strain rate phenomena in metals. N. Y., 1981.
3. **Moss G. L.** Shear strains, shear rates and temperature changes in adiabatic shear bands.— Ibidem.
4. **Culver R. S.** Thermal instability strain in dynamic plastic deformation.— In: Metallurgical effects at high strain rates. N. Y., 1973.

Поступила 6/V 1985 г.

УДК 539.4

УЧЕТ ВЯЗКОСТИ ПРИ ДОЗВУКОВОМ ВНЕДРЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИЗОТРОПНЫЕ ПРЕГРАДЫ

А. В. Агафонов

(*Ленинград*)

При решении задач взаимодействия твердых тел с изотропными преградами при их соударении один из главных вопросов — определение сопротивления внедрению твердого тела в преграду.

В настоящее время при расчете этого сопротивления в качестве основного феноменологического подхода используется гидродинамическая аналогия, в соответствии с которой сопротивление внедрению в пластической области принимается эквивалентным сопротивлению идеальной жидкости.

В отечественной практике при определении силы сопротивления в случае дозвукового удара наибольшее распространение получила основанная на этой аналогии так называемая двучленная формула ЛФТИ, предложенная в [1]. В соответствии с этой зависимостью сила сопротивления внедрению записывается в виде

$$R = -F\left[H_{\text{д}} + k\frac{1}{2}\rho v^2\right], \tag{1}$$

где $H_{\text{д}}$ — динамическая твердость, определяемая экспериментально при скоростях удара $v \sim 10$ м/с; v — местная скорость внедрения; ρ — плотность материала преграды; k — коэффициент формы тела, принимаемый равным 1,0 для тел со сферической головной частью; F — площадь поперечного сечения тела. Аналогичные зависимости приведены в [2]. Для сверхзвуковых скоростей удара при расчете внедрения используются различные модификации гидродинамической теории Лаврентьева — Неймана [2—4].

В то же время, как установлено экспериментально [5], большинство пластичных материалов ведут себя за пределом текучести как вязкая жидкость. В [6] на основе численного моделирования процесса внедрения деформируемого тела в преграду показано, что влияние вязкого сопротивления, несильное на начальной стадии внедрения, будет преобладающим на конечной стадии глубокого внедрения.

В связи с изложенным целесообразно иметь представление сопротивления внедряющемуся телу, учитывающее ньютоновскую вязкость материала преграды. Его можно получить, исходя из следующих основных предпосылок.

1. Процесс внедрения квазиустановившийся (переходными процессами пренебрегается).

2. Силы сопротивления внедрению распределены только на лобовой поверхности тела (за телом образуется каверна).

3. Распределение сил сопротивления на лобовой поверхности тела такое же, как при его безотрывном обтекании при движении в вязкой жидкости; отклонениями от этого распределения в окрестности линии срыва материала преграды с поверхности внедряющегося тела пренебрегается ввиду малости вклада сил сопротивления в этой области в общую величину сопротивления.

Исходя из указанных предпосылок, примем структуру выражения для суммарной силы сопротивления

$$R = R_1 + R_2(\dot{v}) + R_3(v), \tag{2}$$

где R_1 — статическая составляющая сопротивления внедрению, зависящая от формы внедряющегося тела и прочностных характеристик материала преграды (твердость); R_2 — инерционная составляющая сопротивления, зависящая от присоединенной массы тела и его ускорения; R_3 — динамическая составляющая сопротивления при квазистационарном (установившемся) движении.

Далее, по аналогии с выражением для силы сопротивления при внедрении твердого тела в грунт [4] примем, что динамическая составляющая сопротивления может быть представлена как

$$R_3(v) = bv + cv^2. \tag{3}$$

Выражение (3) соответствует удержанию первых двух членов ряда в разложении $R_3(v)$ в ряд Тейлора.

Как правило, значения коэффициентов b и c в выражениях типа (3) устанавливаются опытным путем. Между тем имеется реальная возможность определить их на основании теоретических решений. При таком подходе эксперимент необходим только для проверки предлагаемых зависимостей и может быть проведен в значительно сокращенном объеме.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением тел со сферической головной частью. В этом случае для статической составляющей сопротивления внедрению запишем

$$R_1 = -FH_{\text{М}}, \tag{4}$$

где $H_{\text{М}}$ — твердость по Мейеру [7].

Инерционную составляющую сопротивления можно получить, если воспользоваться решением Буссинеска [8, 9]. Как известно, в соответствии с решением Буссинеска сопротивление шара радиуса a, движущегося поступательно с заданной скоростью $v(t)$ в безграничной области, заполненной вязкой жидкостью, равно

$$R = -6\pi\mu av\,(t) - \frac{2}{3}\pi a^3\rho\frac{dv}{dt} - 6\sqrt{\nu\pi}\,\rho a^2\left[\frac{v}{\sqrt{t}} + \int\limits_0^t \frac{dv}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right], \tag{5}$$

где μ — динамический коэффициент вязкости; $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Так как в соответствии с исходными предпосылками процесс внедрения считается квазиустановившимся, а силы сопротивления на лобовой поверхности такие же, как при безотрывном обтекании тела, из выражения (5) для инерционной составляющей сопротивления имеем

$$R_2\left(\frac{dv}{dt}\right) = -F\frac{1}{3}\rho a\frac{dv}{dt}, \quad F = \pi a^2. \tag{6}$$

Из соотношения (5) следует также выражение для линейной составляющей динамического сопротивления. Однако, поскольку динамическая составляющая сопротивления должна быть определена с точностью до квадратичных составляющих, решение Буссинеска недостаточно. Поэтому для нахождения динамической составляющей сопротивления воспользуемся решением Озеена [8].

Известно [8], что осесимметричное обтекание тела потоком вязкой жидкости описывается, если исходить из обобщенных уравнений Стокса, потенциалом скоростей φ и функцией χ, которые удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\chi - \frac{v}{\nu}\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа; r — радиус в цилиндрической системе координат; x — координата вдоль набегающего потока; v — скорость потока. На поверхности тела должны выполняться условия «прилипания» $v_n = v_s = 0$ (v_n, v_s — нормальная и касательная составляющие скорости), а на бесконечности — условие затухания возмущений, вносимых телом в поток $v_x = v$, $v_r = 0$.

При рассмотрении обтекания потоком шара естественно перейти к безразмерным сферическим координатам

$$x = R_c a \cos\theta, \; r = R_c a \sin\theta$$

(a — радиус шара).

Оставляя в стороне детали получения решения, которые подробно изложены в [8], отметим, что с точностью до Re^2 ($\mathrm{Re} = va/\nu$ — число Рейнольдса) искомые функции φ и χ могут быть представлены (при $R_c \sim \sim 1$) в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_n(\cos\theta)}{R_c^{n+1}}; \tag{7}$$

$$\chi \approx -v + B_0\left\{\frac{P_0(\cos\theta)}{R_c} - \frac{\mathrm{Re}}{2}[P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Re}}{2}\right)^2 R_c\left[\frac{2}{3}P_2(\cos\theta) - 2P_1(\cos\theta) + \frac{4}{3}P_0(\cos\theta)\right]\right\} +$$
$$+ B_1\frac{1}{R_c}\left\{\frac{P_1(\cos\theta)}{R_c} + \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[\frac{2}{3}P_2(\cos\theta) + \frac{1}{3}P_0(\cos\theta)\right]\right\} + B_2\frac{P_2(\cos\theta)}{R_c^3} + \ldots, \tag{8}$$

где $P_n(\ldots)$ — полиномы Лежандра [10]; $P_0(\cos\theta) = 1$; $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$; $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}[3\cos^2\theta - 1]$. Постоянные A_n и B_n определяются из граничных условий (при $R_c = 1$)

$$v_{R_c} = -\chi\cos\theta + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\chi}{\partial R_c} + \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial R_c} = 0; \tag{9}$$

$$v_\theta = \chi\sin\theta + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0. \tag{10}$$

Граничные условия на бесконечности удовлетворяются автоматически.

После подстановки (7) и (8) в (9), (10) и решения системы уравнений для постоянных A_n, B_n получим следующие выражения:

$$A_0 = -\frac{3}{2}\frac{v\left[1 - \left(\frac{\mathrm{Re}}{2}\right)^2\right]}{\mathrm{Re}\left[1 - \frac{3}{8}\mathrm{Re}\right]}a \approx -\frac{3}{2}\frac{v}{\mathrm{Re}}\left[1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re}\right]a, \tag{11}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{v}{1 - \frac{3}{8}\mathrm{Re}}a \approx \frac{1}{2}va, \quad B_0 = \frac{3}{2}\frac{v}{1 - \frac{3}{8}\mathrm{Re}},$$

$$B_1 = -\frac{3}{4}\frac{v\,\mathrm{Re}}{1 - \frac{3}{8}\mathrm{Re}}, \quad \frac{A_2}{a} + \frac{1}{\mathrm{Re}}B_2 = \frac{1}{8}\frac{v\,\mathrm{Re}}{1 - \frac{3}{8}\mathrm{Re}}.$$

Постоянные A_2 и B_2 определяются только в своей линейной комбинации, однако, как будет видно из дальнейшего, это обстоятельство не сказывается на выражении для силы сопротивления при принятой степени точности.

Как показано в [8], главный вектор сил сопротивления при обтекании вязкой несжимаемой жидкостью тела со сферической головной частью может быть (с учетом знака скорости на бесконечности) представлен в виде

$$(12) \qquad R = \iint_S \left[- p_\infty \cos\theta - \rho v \frac{1}{a} \frac{\partial\varphi}{\partial R_c} \right] dS.$$

Здесь $p_\infty = \frac{1}{2}\rho v^2$—давление торможения на бесконечности; S — смачиваемая поверхность обтекаемого тела.

В случае безотрывного обтекания шара с учетом представления потенциала φ в виде (7) и условия ортогональности для полиномов Лежандра

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = 0, \quad (m \neq n)$$

для силы сопротивления из (12) имеем формулу

$$(13) \quad R = 2\pi a^2 \int_0^\pi \left[- \frac{1}{2} \rho v^2 \cos\theta + \frac{\rho v}{a} \sum_n (n+1) A_n P_n(\cos\theta) \right] \sin\theta d\theta =$$

$$= 4\pi a^2 \rho v \frac{A_0}{a} = - 6\pi\mu a v \left[1 + \frac{3}{8} \mathrm{Re} \right] = - \pi a^2 \left[6 \frac{\mu v}{a} + \frac{9}{4} \rho v^2 \right],$$

являющуюся формулой Озеена.

Когда обтекание происходит только по лобовой поверхности (вплоть до миделева сечения), сила сопротивления при принятой степени приближения

$$(14) \quad R_3(v) = 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \left[- \frac{1}{2} \rho v^2 \cos\theta + \frac{\rho v}{a} \sum_n (n+1) A_n P_n(\cos\theta) \right] \sin\theta d\theta =$$

$$= \pi a^2 \left[- \frac{1}{2} \rho v^2 + 2 \frac{\rho v}{a} (A_0 + A_1) \right] = - \pi a^2 \left[3 \frac{\mu v}{a} + \frac{5}{8} \rho v^2 \right].$$

Остановимся на пределах применимости предлагаемой зависимости для динамической составляющей сопротивления внедрению. Как известно [9], опыты, проведенные Гольдштейном, позволили установить удовлетворительное ($\sim$ 15%) соответствие расчетных и экспериментальных данных при обтекании шара до Re = 4. При больших Re отклонение расчетных данных от экспериментальных непрерывно растет. Эти отклонения объясняются тем, что при достаточно больших Re происходит срыв вихрей с тыльной поверхности шара, приводящий к явлениям типа автоколебаний [9], и картина обтекания не соответствует принятой в решении Озеена.

При внедрении твердого тела в преграду, материал которой рассматривается как вязкая жидкость, обтекания тыльной поверхности в соответствии со второй предпосылкой не происходит, и, следовательно, вихри на тыльной поверхности не образуются. Поэтому можно с большой степенью уверенности утверждать, что использование такого подхода допустимо для значительно бо́льших Re, чем при безотрывном обтекании шара.

С учетом последнего замечания из (2), (4), (6), (14) для суммарной силы сопротивления внедрению тела со сферической головной частью можно написать

$$(15) \qquad R = - \pi a^2 \left[H_\text{М} + 3 \frac{\mu v}{a} + \frac{5}{8} \rho v^2 + \frac{1}{3} a \rho \frac{dv}{dt} \right].$$

При выводе зависимости (15) использовалось предположение о полном сцеплении материала преграды с поверхностью внедряющегося тела. В действительности не исключено, что в процессе внедрения будет происходить частичное проскальзывание материала преграды по поверхности тела. Для этого случая можно предложить следующую модификацию выражения (15):

$$R = -\pi a^2\left[H_{\text{М}} + \beta\left(3\frac{\mu v}{a} + \frac{1}{8}\rho v^2\right) + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{3}a\rho\frac{dv}{dt}\right],$$

где β — коэффициент, учитывающий сцепление ($\beta = 1$ — полное сцепление, $\beta = 0$ — отсутствие его) и определяемый опытным путем.

Из сопоставления (15) и (1) видно, что основное отличие предлагаемой зависимости от формулы Витмана — Степанова в том, что при малых скоростях внедрения сопротивление пропорционально первой степени скорости, а не квадрату ее (влияние слагаемого с присоединенной массой в большинстве случаев невелико). При больших скоростях внедрения, когда определяющим является слагаемое, пропорциональное квадрату скорости, обе зависимости сближаются друг с другом.

В качестве примера применения предложенной зависимости рассмотрим расчет глубины внедрения на стадии глубокого внедрения. Пусть твердое тело со сферической головной частью радиуса a и массой m после внедрения на глубину $x_0 > a$ в момент $t_0 = 0$ движется в материале преграды со скоростью v_0.

Полагая для простоты $\beta = 1$ и пренебрегая в соответствии с первой предпосылкой нестационарной составляющей ускорения, в системе координат, связанной с преградой, имеем

$$d/dt = \partial/\partial t + v\partial/\partial x \approx v\partial/\partial x,$$

$$\left(m + \frac{1}{3}\pi a^3\rho\right)v\frac{dv}{dx} = -\pi a^2\left[H_{\text{М}} + 3\frac{\mu v}{a} + \frac{5}{8}\rho v^2\right].$$

Вводя безразмерные переменные $\mathrm{Re} = va/\nu = va\rho/\mu$, $\xi = x/a$ и безразмерный параметр $d_0 = H_{\text{М}}a^2\rho/\mu^2$, для расчета глубины внедрения получим уравнение

$$d\xi = -\frac{k_m + 1}{3}\,\frac{\mathrm{Re}\,d(\mathrm{Re})}{d_0 + 3\,\mathrm{Re} + \frac{5}{8}\mathrm{Re}^2}. \tag{16}$$

Здесь $km = m/[(1/3)\pi\rho a^3]$ — коэффициент массы внедряющегося тела.

Интегрируя (16) по Re от $\mathrm{Re}_0 = v_0a\rho/\mu$ до 0 и по ξ от $\xi_0 = x_0/a$ до ξ, с использованием табличных соотношений для пути торможения в случае $d_0 < 18/5$ находим

$$\Delta\xi = \xi - \xi_0 = \frac{4}{15}[k_m + 1]\left\{\ln\frac{d_0 + 3\,\mathrm{Re}_0 + \frac{5}{8}(\mathrm{Re}_0)^2}{d_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{5}{18}d_0}}\ln\frac{\left(\frac{5}{18}\mathrm{Re}_0 + 1 - \sqrt{1 - \frac{5}{18}d_0}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{5}{18}d_0}\right)}{\left(\frac{5}{18}\mathrm{Re}_0 + 1 + \sqrt{1 - \frac{5}{18}d_0}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{5}{18}d_0}\right)}\right\}.$$

При $d_0 > 18/5$ выражение для пути торможения определяется аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Витман Ф. Ф., Степанов В. А.** Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара $10^2 \div 10^3$ м/с.— В кн.: Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. **Тейт А.** Теория торможения длинных стержней после удара по мишени.— Сб. пер. Механика, 1968, № 5.
3. **Эйчельбергер Р., Кайнике Дж.** Высокоскоростной удар.— В кн.: Физика быстропротекающих процессов. М.: Мир, 1971.
4. **Сагомонян А. Я.** Проникание.— М.: Изд-во МГУ, 1971.
5. **Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.** Прочность при интенсивных нагрузках.— М.: ГИФМЛ, 1961.
6. **Райни Т. Д.** Глубина проникновения снарядов при ударе со сверхвысокими скоростями.— РТК, 1955, № 1.

7. **Фридман Я. Б.** Механические свойства металлов.— М.: Машиностроение, 1974, т. 2.
8. **Слезкин Н. А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М.: ГИТТЛ, 1955.
9. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.
10. **Лебедев Н. Н.** Специальные функции и их приложения.— М.: ГИТТЛ, 1953.

Поступила 22/II 1985 г.

УДК 539.3 + 534.232

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ С ИСТОЧНИКОМ КОЛЕБАНИЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

А. А. Золотарев, Г. В. Ткачев

(Ростов-на-Дону)

Настоящая работа посвящена изучению гравитационных и акустических волн, возбуждаемых заглубленным вибрационным источником в жидкости, покрытой льдом. Анализ прочностных характеристик льда, моделируемого упругим слоем либо пластиной Кирхгофа, выполнен на основе построенного методом факторизации решения интегрального уравнения, эквивалентного исходной смешанной краевой задаче.

С несмешанными краевыми условиями задачи для неограниченных ледовых полей решались в [1—3], со смешанными условиями и расположенными на границе среды источниками возмущений — в [4].

1. Рассматривается задача о возбуждении волнового поля в слое жидкости и покрывающем его упругом слое источником гармонических колебаний, расположенным на границе раздела сред. Источник моделируется скачком распределенной нагрузки, заданной в области $x, y \in \Omega$, $z = -C$. Слой идеальной тяжелой жидкости ($|x, y| \leqslant \infty$, $-H \leqslant z \leqslant -C$) лежит на абсолютно жестком основании. Поле смещений в упругом слое ($|x, y| \leqslant \infty$, $-C \leqslant z \leqslant 0$) описывается уравнениями движения Ламэ, потенциал скоростей частиц жидкости удовлетворяет волновому уравнению. Зависимость от времени всех рассматриваемых функций задается соотношением $f_0(x, y, z, t) = f(x, y, z)e^{-i\omega t}$. На границе раздела двух сред, вне области, занятой источником, выполняется условие равенства напряжений и нормальных скоростей. В области, занятой источником колебаний ($x, y \in \Omega$, $z = -C$), заданы нормальные напряжения на его берегах $\sigma^{\mathrm{I}}(x, y) = \sigma^*(x, y, -C + 0)$, $\sigma^{\mathrm{II}}(x, y) = \sigma^*(x, y, -C - 0)$, а следовательно, и их скачок $\Delta\sigma(x, y) = \sigma^{\mathrm{I}}(x, y) - \sigma^{\mathrm{II}}(x, y)$. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность.

С помощью метода интегральных преобразований краевая задача сводится к решению интегрального уравнения относительно неизвестного скачка скоростей смещений $\Delta V_z^*(x, y) = V^*(x, y, -C + 0) - V^*(x, y, -C - 0)$ берегов источника колебаний:

$$\iint_{\Omega} \Delta V_z(\xi, \eta)\, k(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta = f(x, y), \quad x, y \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$f(x, y) = \sigma(x, y) + \iint_{\Omega} \Delta\sigma(\xi, \eta)\, m(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta,$$

$$k(t, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(u)\, e^{-i(\alpha t + \beta s)} d\alpha d\beta,$$

$$m(t, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} M(u)\, e^{-i(\alpha t + \beta s)} d\alpha d\beta.$$

Входящие в (1.1) безразмерные функции и переменные имеют вид

$$K(u) = i[m\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h-c)) - \varkappa^2 \operatorname{ch}(\gamma_0(h-c))]\Delta_0(u)/\Delta(u), \tag{1.2}$$

$$M(u) = [m\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0(h-c)) - \varkappa^2 \operatorname{ch}(\gamma_0(h-c))]\Delta_1(u)/\Delta(u),$$

$$\Delta_0(u) = 4\left[(\gamma^4 + \gamma_1^2\gamma_2^2 u^4) \operatorname{sh}(\gamma_1 c) \operatorname{sh}(\gamma_2 c) - 2\gamma_1\gamma_2 u^2\gamma^2 (\operatorname{ch}(\gamma_1 c) \operatorname{ch}(\gamma_2 c) - 1)\right],$$

$$\Delta_1(u) = \varkappa^2\gamma_1 [\gamma^2 \operatorname{sh}(\gamma_2 c) \operatorname{ch}(\gamma_1 c) - u^2\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 c) \operatorname{ch}(\gamma_2 c)],$$