

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Наука, 1974.
2. Коровчинский М. В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей. — В кн.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., Наука, 1971.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
4. Проников А. С. Износ и долговечность станков. М., Машгиз, 1957.
5. Хрущев М. М., Бабичев М. А. Абразивное изнашивание. М., Наука, 1970.
6. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. — ПММ, 1974, т. 35, вып. 1.
7. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М., ГИФМЛ, 1963.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959.
10. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1976.
11. Шиллов Г. Е. Математический анализ. «Конечномерные линейные пространства». М., Наука, 1969.

УДК 539.30

### РАЗВИТИЕ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННОГО РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ

В. А. Сарайкин

(Новосибирск)

Рассматривается рост трещины при внезапно приложенном равномерно распределенном давлении на берегах. Эта плоская задача является частным случаем задачи о распространении трещины с произвольной переменной скоростью [1—4], так как закон движения трещины здесь не произволен, а определяется из критерия разрушения для динамики [5, 6].

В предположении, что удельная поверхностная энергия неизменна, в работе вычислен закон движения полубесконечной трещины, развивающейся в хрупком материале. Наряду с точным решением теории упругости, для сравнения построены зависимости, описывающие тот же самый процесс приближенно (о приближенной модели трещины см. работы [3, 4, 7, 8]). На продолжении трещины сопоставлены осциллограммы напряжений, определяемые теорией упругости и приближенной моделью.

Отметим, что развитие трещины при антиплоской деформации исследовано в [9].

Пусть положение трещины в момент времени  $t = 0$  задается в декартовой системе координат следующим образом:  $-l_0^- < x < l_0^+$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $z = 0$  ( $l_0^\pm > 0$ ). Источником возмущений является равномерное давление, внезапно приложенное к берегам трещины при  $t = 0$ . Касательное напряжение равно нулю. Вершины трещины при  $t > 0$  перемещаются: вправо по закону  $x = l^+(t)$ , влево по закону  $x = -l^-(t)$ , причем  $l^\pm(0) = l_0^\pm$ . При этом указанные выше напряжения возникают и на вновь образовавшихся поверхностях трещины. Из-за симметрии нагрузки относительно плоскости трещины на продолжении отсутствуют касательное напряжение и перемещение точек вдоль оси  $z$ . Начальные условия задачи нулевые.

Рассмотрим движение правого конца трещины до момента времени, соответствующего приходу возмущений от левого края. В этом интервале времени решение задачи при  $x > l(t)$  (индекс + опускаем) совпадает с решением для полубесконечной трещины, на берегах которой заданы нормальная и касательная составляющие тензора напряжений

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz} &= \sigma_- = -p_0 H[l(t) - x] H(t), \\ \sigma_{xz} &= 0 \quad (z = \pm 0), \end{aligned}$$

где  $H$  — функция Хевисайда;  $p_0$  — размерная постоянная.

Выпишем решение задачи (1), воспользовавшись результатами работ [3, 8]. Считая скорость движения вершины трещины не отрицательной и ограниченной сверху скоростью волн Рэлея, нормальное напряжение  $\sigma_{zz}$  на продолжении трещины после несложных преобразований можно представить следующими выражениями:

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_+ &= \frac{2}{\pi} \left[ AN(t, x, a) + \int_a^b F_3(h) N(t, x, h) dh \right] H[t - a(x - l_0^+)], \\ N(t, x, h) &= p_0 \left[ \frac{a(1-cl^*)}{c(1-hl^*)} \sqrt{\frac{t_0}{a(x-l)}} D + \sqrt{\frac{a}{h}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t-t_0}{t_0}} D - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2} \left( 1 + \int_{u_1}^b F_1(u) \sqrt{\frac{u-a}{u-h}} \frac{du}{u} \right) \right] H[t - h(x - l_0^+)], \\ A &= 1 + \int_a^b F_2(u) \frac{du}{u-a}, \quad D = 1 + \int_a^b F_1(u) \frac{du}{u}, \quad u_1 = \frac{t}{x-l+t_0/b}, \\ l &= l(t_0), \quad l^* = dl(t_0)/dt_0, \quad t - t_0 = h[x - l(t_0)], \end{aligned}$$

где  $a, b, c$  — величины, обратные скоростям волн расширения, сдвига и Рэлея; функции  $F_i$ , не зависящие от закона движения и нагрузки, имеют вид [8]

$$\begin{aligned} F_i &= (-1)^{i+1} \gamma(u) \exp [(-1)^{i+1} \kappa(u)] \quad (i = 1, 2), \\ \gamma(u) &= \frac{4}{\pi} u^2 \sqrt{b^2 - u^2} \sqrt{u^2 - a^2} [(b^2 - 2u^2)^4 + 16u^4 (b^2 - u^2)(u^2 - a^2)]^{-1/2}, \\ \kappa(u) &= \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_a^b \operatorname{arctg} [4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - a^2} \sqrt{b^2 - \alpha^2} (b^2 - 2\alpha^2)^{-2}] \frac{d\alpha}{\alpha - u}, \end{aligned}$$

$$F_3(h) = \int_h^b \frac{d}{du} \left[ \frac{F_2(u)}{\sqrt{u-a}} \right] \frac{du}{\sqrt{u-h}}.$$

Символ в. п. означает при интегрировании главное значение по Коши.

Функция  $l(t)$  в (2) пока произвольна, между тем развитие трещины связано с потребляемой у ее края энергией. Поэтому закон движения трещины следует определять из условия сохранения энергии в процессе деформирования для упругого тела с развивающейся трещиной — аналога критерия Гриффитса — Ирвина для динамики. Если обозначить через  $T$  плотность поглощенной у края трещины энергии, то из закона сохранения энергии для трещины нормального отрыва имеем следующую связь  $T$  с динамическим коэффициентом интенсивности:

$$(3) \quad 2T(l^*) = b^2 l^{*2} \sqrt{1 - \alpha^2 l^{*2}} K_I^2 / [2\mu R(l^*)],$$

$$K_I = \lim_{x \rightarrow l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l)}, \quad \sigma_+ = 2p_0 \sqrt{\frac{2at}{\pi c^2}} DK_1(l'),$$

$$K_1(l') = \frac{1-cl'}{\sqrt{1-cl'}} k(l'), \quad k(l') = 1 - l' \int_a^b F_2(u) \frac{du}{1-ul'},$$

$$R(l') = 4\sqrt{1-a^2l'^2} \sqrt{1-b^2l'^2} - (2-b^2l'^2)^2, \quad l = l(t)$$

( $\mu$  — модуль сдвига).

Графики функции  $K_1(l')$  показаны на фиг. 1, где кривым 1—3 отвечают значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0,2; 0,25; 0,3$ . Эта функция совпадает с коэффициентом динамичности  $K_1(\nu)$  работы [2] (формулы (2.11), (2.12)).

Зависимость (3) служит уравнением для определения скорости трещины. Трещина неподвижна ( $l = l_0^+, l' = 0$ ), пока  $t < t_s$ . Величине  $t_s$  соответствует время, когда динамический коэффициент интенсивности, возрастая, достигнет значения статического коэффициента интенсивности  $K_{I_s}$  для предельно равновесной трещины

$$(4) \quad K_I^2 = K_{I_s}^2 = 2ET(0)/(1-\nu^2)$$

(постоянная  $E$  — модуль Юнга). Отсюда находим время начала движения правого края трещины.

$$(5) \quad t_s = \frac{\pi c^2 ET(0)}{4p_0^2 a (1-\nu^2) D^2}$$

Закон движения трещины при  $t > t_s$  определяется, учитывая (3), (5), из уравнения

$$(6) \quad f(l')t/t_s = T(l')/T(0),$$

$$f(l') = \sqrt{\frac{1+al'}{1-al'} \frac{[bl'(1-cl')k(l')]^2}{(1-\nu)R(l')}}.$$

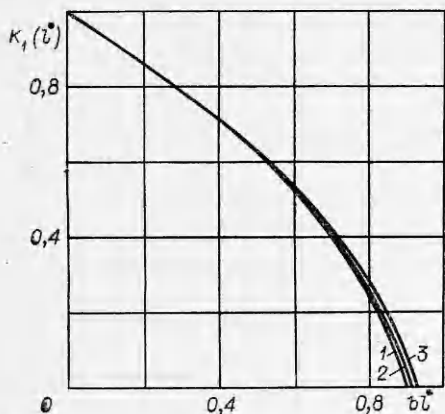
Начальным условием служит положение вершины трещины в момент времени  $t = t_s$ .

При расчетах принималось, что удельная поверхностная энергия не зависит от скорости движения трещины  $T(l) = T(0) = \text{const}$ . За единицы измерения длины и скорости были приняты  $l_0^+$  и скорость волны сдвига. Плотность среды также полагалась равной единице. Кроме этого, в решении заданы следующие величины:

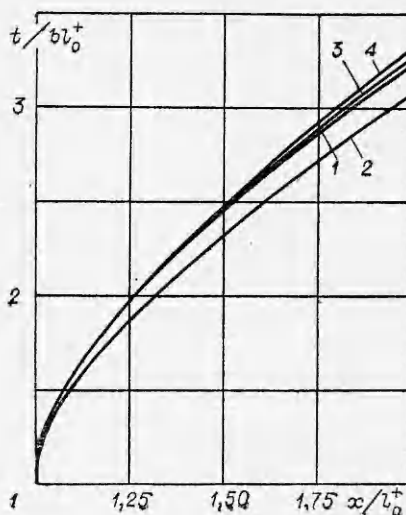
$$\nu = 0,3, \quad ET(0)/[p_0^2(1-\nu^2)l_0^+] = 1.$$

Движение трещины при таком выборе параметров начинается в момент времени  $t_s/(bl_0^+) = 1,0286$ .

На фиг. 2 кривая 1 представляет зависимость  $x = l(t)$ . На оси абсцисс отложена величина  $x/l_0^+$ , а на оси ординат —  $t/(bl_0^+)$ . Изменение скорости трещины со временем в выражении (6) показывает кривая 1 на фиг. 3. Кривая 1, приведенная на фиг. 4, дает представление об изменении со временем напряжения  $\sigma_+$  в точке  $x = 2l_0^+$ . На оси абсцисс отложена величина  $t/(bl_0^+)$ , а ось ординат — безразмерное напряжение  $\sigma_+/p_0$ . До момента времени  $t = a(x + l_0^-)$  напряжение в этой точке, вычисленное для полубесконечной трещины, совпадает с напряжением, излученным на продолжение трещиной  $-l^-(t) < x < l^+(t)$ . После в рассматриваемую точку приходят возмущения от левого края трещины и решение должно



Ф и г. 1



Ф и г. 2

быть построено с учетом отражения волн от правого края трещины.

Посмотрим, каким должно быть давление  $p_0$ , чтобы движение правого края трещины началось раньше, чем придут возмущения от ее левого края. Из условия  $t_s < a(l_0^+ + l_0^-)$  получаем, учитывая (5), неравенство

$$p_0 > (\pi c p_s) / (4aD),$$

где  $p_s$  — предельное статическое давление для трещины  $-l_0^- < x < l_0^+$ , определяемое из решения статической задачи и из (4)

$$K_{Is}^2 = \pi p_s^2 (l_0^+ + l_0^-) / 2 = 2ET(0) / (1 - \nu^2).$$

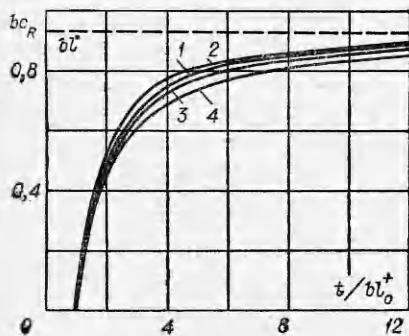
Так как при расчетах принято  $ET(0) / [p_0^2(1 - \nu^2)l_0^+] = \alpha = \text{const}$ , находим, что в этом случае

$$p_0^2 = \pi p_s^2 (1 + l_0^- / l_0^+) / (4\alpha) > [(\pi c p_s) / (4aD)]^2$$

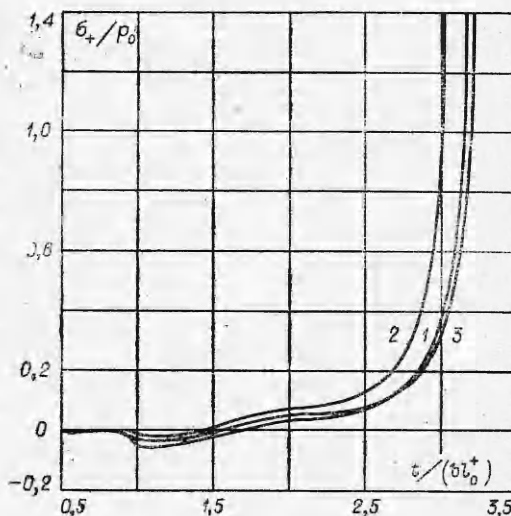
и, следовательно, должно быть

$$l_0^- / l_0^+ > [\pi c^2 \alpha / (4a^2 D^2)] - 1.$$

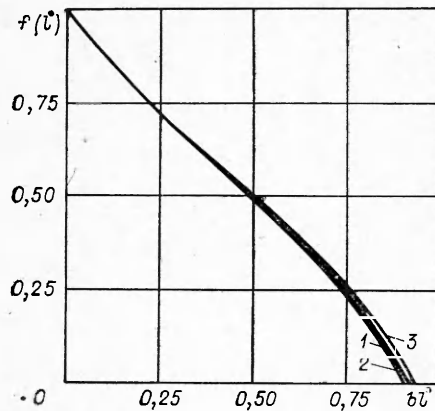
Увеличивая еще более значение  $p_0$  (за счет  $l_0^-$ ), можно добиться, что край трещины



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

придет в точку  $x = 2l_0^+$  (рассматриваемую в примере) раньше возмущений, излученных левым концом трещины.

На фиг. 2—4 изображены также решения, полученные при  $\nu = 0,3$  по приближенной модели [3]

$$\sigma_{\perp} = \frac{2p_0}{\pi} \left[ \frac{a_* (1-cl^*)}{c(1-a_*l^*)} \sqrt{\frac{t^*}{a_* (x-l)}} - \arctg \sqrt{\frac{t^*}{t-t^*}} \right] H \left( \frac{t}{x-l_0^+} - a_* \right),$$

$$t - t^* = a_* [x - l(t^*)].$$

Выбор значений параметра  $a_*$  в приближенной модели обсуждается в ра-

боте [8]. Для  $\nu = 0,3$  имеем  $a_* = a_1 = 0,9469$  [7] (кривая 2),  $a_* = a_2 = 0,8879$  [8] (кривая 3).

Закон движения трещины при расчетах по-прежнему находился из условия (3), только вместо  $K_I$  было подставлено его приближенное значение

$$K_I^* = 2p_0 \sqrt{\frac{2a_* t}{\pi c^2} \frac{1-cl^*}{\sqrt{1-a_*l^*}}}, \quad l = l(t).$$

В результате закон движения трещины определяется из уравнения

$$f^*(l^*) t/t_s^* = T(l^*)/T(0),$$

$$f^*(l^*) = \frac{\sqrt{1-a_*^2 l^{*2}} [bl^*(1-cl^*)]^2}{(1-a_*l^*)(1-\nu)R(l^*)}, \quad t_s^* = \frac{\pi c^2 E T(0)}{4p_0^2 (1-\nu^2) a_*},$$

где  $t_s^*$  — время начала движения трещины. В рассматриваемом примере при  $a_* = a_2$  оно практически совпадает с  $t_s$ , а при  $a_* = a_1$  меньше:  $t_s^*/(bl_0^+) = 0,9626$ .

Расчеты показывают, что приближенное решение при  $a_* = a_2$  лучше, чем при  $a_* = a_1$ , аппроксимирует зависимости, определяемые теорией упругости. Сравнения, проведенные в работе, позволяют сделать вывод о приемлемости приближенной модели для расчета задач о динамическом разрушении.

При определении закона движения трещины из уравнения (6) оказалось, что функция  $f(l^*)$  в интервале  $0 \leq bl^* < 0,4$  незначительно отличается от линейной. На фиг. 5 кривые 1—3 показывают ее изменение для  $\nu = 0,2; 0,25; 0,3$ .

Заменим функцию  $f(l^*)$  на этом интервале приближенным выражением

$$(7) \quad f(l^*) \sim 1 - cl^*(t).$$

Интегрируя уравнение (6), где  $f(l^*)$  заменена функцией (7), находим закон движения трещины при равномерно распределенной на берегах нагрузке

$$(8) \quad l(t) = l_0^+ + [t - t_s - t_s \ln(t/t_s)]/c.$$

Значения  $l$  и  $l^*$ , вычисленные по формуле (8) при  $\nu = 0,3$ , показаны на фиг. 3, 4 (кривые 4). Они неплохо аппроксимируют точное решение в начале процесса разрушения.

Поступила 14 VI 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. Freund L. B. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading.— *J. Mech. and Phys. Solids*, 1972, vol. 20, N 3.
2. Костров Б. В. Распространение трещины с переменной скоростью.— *ПММ*, 1974, т. 38, вып. 3.
3. Слепян Л. И. Приближенная модель динамики трещины.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 19—20. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
4. Слепян Л. И., Троянкина Л. В. Теория трещин. Основные представления и результаты. Л., Судостроение, 1976.
5. Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М. Механика хрупкого разрушения.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1969, № 3.
6. Шер Е. Н. Об энергетическом условии в носике нестационарной трещины.— *ПМТФ*, 1969, № 3.
7. Rose L. R. F. An approximate (Winer — Hopf) kernel for dynamic crack problems in linear elasticity and viscoelasticity.— *Proc. Roy. Soc., ser. A*, 1976, vol. 349, N 1659.
8. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.— *Изв. АН СССР, МТТ*, 1979, № 4.
9. Молчанов А. Е., Никитин Л. В. Динамика трещины продольного сдвига после потери усть ойчивости.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1972, № 2.