

4. Иванов М. Я., Смагин И. П. К расчету двумерных сверхзвуковых течений при наличии физико-химических процессов.— ЧММСС, 1978, т. 9, № 6.
5. Курочкин Ю. В., Смагин И. П. Численное исследование двумерного распределения инверсной населенности и показателя усиления при сверхзвуковом расширении смеси $\text{CO}_2\text{—N}_2\text{—He}$.— Квант. электроника, 1979, т. 6, № 6.
6. Колмогоров В. Ф. Численное решение обратной задачи теории сопла Лавалля применительно к двумерным неравновесным течениям совершенного газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2.
7. Бреев В. В., Минин С. Н. и др. Течение смеси газов с релаксацией колебательной энергии в плоских и осесимметричных соплах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5.
8. Дрегалли А. Ф., Жукова И. К. К расчету двумерных энергетически неравновесных течений.— В кн.: Газодинамика двигателей летательных аппаратов. Вып. 1. Казань, 1978.
9. Пинчуков В. И. Численное исследование влияния формы трансзвуковой части сопла Лавалля на течение смеси $\text{CO}_2\text{—N}_2\text{—H}_2\text{O—He}$.— ФГВ, 1981, т. 17, № 4.
10. Курочкин Ю. В., Сальников В. А., Смагин И. П. Численное исследование течений в соплах колебательно-неравновесной среды $\text{CO}_2\text{—ГДЛ}$.— Квант. электроника, 1982, т. 9, № 6.
11. Вирюков А. С., Сериков Р. И. и др. Влияние неоднородностей параметров потока на характеристики рабочих сред CO_2 - и N_2O -газодинамических лазеров.— Квант. электроника, 1977, т. 4, № 4.
12. Чефанов В. М. Течение газа в области горла сверхзвукового сопла.— В кн.: Газодинамика двигателей летательных аппаратов. Вып. 1. Казань, 1978.
13. Иванов М. Я., Сальников В. А. К расчету течения газа в сопле Лавалля при наличии неравновесных физико-химических процессов.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4.
14. Иванов М. Я., Идиятуллина Ф. П. К расчету гладких стационарных течений идеального газа методом третьего порядка точности.— ЖВММФ, 1978, т. 18, № 4.
15. Крайко А. Н. К численному интегрированию уравнений с малым параметром при старшей производной.— ЖВММФ, 1969, т. 9, № 2.
16. Крайко А. И. О расчете неравновесных течений газа в соплах Лавалля.— Тр. Ин-та мех. МГУ, 1973, № 21.

УДК 517.9 + 532

О ДЕМПФИРОВАНИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВЯЗКОГО ШАРА

О. М. Лаврентьева

(Новосибирск)

Изучению задачи о нормальных колебаниях вязкой капиллярной жидкости, частично или полностью ограниченной свободной поверхностью, посвящено значительное число работ. Результаты большинства из них изложены в [1]. Рассматривался, в частности, вопрос об асимптотике решений задачи при больших и малых значениях вязкости ν , когда все остальные параметры фиксированы. В [2] показано, что для сильновязких тяжелых жидкостей в случае устойчивости скорость затухания возмущений может быть сколько угодно мала. В [1] высказано предположение, подтверждаемое рассмотрением конкретных примеров, что в случае устойчивости скорость затухания колебаний становится сколь угодно малой и при стремлении вязкости к нулю. Если это верно, то для каждой конкретной задачи найдется значение ν^* , при котором возмущения в жидкости затухают наиболее быстро. В данной работе найдено значение ν^* для классической задачи о нормальных колебаниях вязкого шара.

Задача о линейных колебаниях невесомого жидкого шара с учетом вязких и капиллярных сил рассматривается в сферической системе координат \hat{r} , θ , φ (начало координат совпадает с центром шара).

Пусть R — радиус шара, ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Удобно ввести безразмерные переменные, выбирая в качестве характерных размера, времени, скорости и давления соответственно величины \hat{R} , $\nu^{-1}R^2$, νR^{-1} и $\rho\nu R^{-2}$ и обозначая через $\hat{u}(r, \theta, \varphi, t)$, $\hat{p}(r, \theta, \varphi, t)$, $\hat{N}(\theta, \varphi, t)$ соответственно безразмерные вектор скорости, давление и отклонение свободной поверхности от равновесной формы по нормали к ней, $r = \hat{r}R^{-1}$.

Пусть все неизвестные величины зависят от времени по закону $e^{-\lambda p t}$, т. е.

$$\begin{aligned}\widehat{N}(\theta, \varphi, t) &= N(\theta, \varphi) e^{-\lambda p t}, \quad \widehat{u}(r, \theta, \varphi, t) = u(r, \theta, \varphi) e^{-\lambda p t}, \\ \widehat{p}(r, \theta, \varphi, t) &= p(r, \theta, \varphi) e^{-\lambda p t}.\end{aligned}$$

Исходя из системы Стокса и линеаризованных условий на свободной границе, можно получить после отделения временного множителя $e^{-\lambda p t}$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}(1) \quad \Delta u + \lambda u &= \nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{при } r < 1, \\ (2) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta &= 0, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi = 0, \\ p - 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \alpha^2 (2N + \Delta_\Gamma N) &= 0, \quad u_r = -\lambda N \quad \text{при } r = 1,\end{aligned}$$

где Δ_Γ — оператор Лапласа — Бельтрами на сфере,

$$\alpha^2 = \sigma R \rho^{-1} \nu^{-2}; \quad \lambda = \lambda_p \nu^{-1} R^2.$$

Ниже кратко сформулированы некоторые из результатов исследований [3—5] задачи (1), (2).

Собственное число λ должно удовлетворять одному из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}(3) \quad F_l(\lambda) &= (l-1)\lambda^{-1}; \\ (4) \quad 2F_l(\lambda) &= \Phi_l(\lambda, \alpha) \equiv \frac{\lambda^2 - 2\beta_l \lambda + \alpha^2 \omega_l}{\lambda^2 - 2\omega_l \lambda + \alpha^2 \omega_l},\end{aligned}$$

где l — натуральное число,

$$(5) \quad \omega_l = l(l-1)(l+2), \quad \beta_l = (l-1)(2l+1),$$

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{J_{l+3/2}(\sqrt{\lambda})}{J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda})} = 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{k_{l+1/2, q}^2 - \lambda^2},$$

$k_{l+1/2, q}$ — q -й корень функции Бесселя $J_{l+1/2}(\lambda)$.

Каждому простому корню λ_l отвечает $2l+1$ форм колебаний, при которых свободная поверхность имеет форму

$$N(\varphi, \theta) = N_{l,n} Y_l^n(\theta, \varphi), \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm l,$$

где Y_l^n — сферическая функция.

Решению уравнения (4) при $l=1$ и уравнения (3) при любом l соответствуют возмущения, не деформирующие свободную границу. Ниже всюду $l \geq 2$.

Доказано [1], что при каждом $l \geq 2$ и $\alpha > 0$ уравнение (4) имеет бесконечную последовательность вещественных и не более одной пары комплексно-сопряженных корней, причем все корни имеют положительные вещественные части.

Пусть $\{\lambda_{lj}\}$, $j = 1, 2, \dots$ — последовательность корней уравнения (4), расположенных в порядке возрастания действительной части. Тогда при $t \rightarrow \infty$ наибольший вклад в движение будут вносить нормальные возмущения, соответствующие λ^1 такому, что

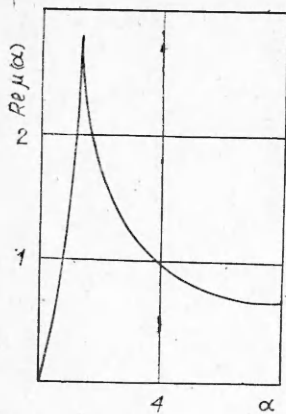
$$\operatorname{Re} \lambda^1 = \min_{l \geq 2} \operatorname{Re} \lambda_{l1}.$$

Скорость затухания возмущений определяется величиной

$$\lambda_{l1, p} = \nu R^{-2} \lambda_{l1} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\lambda_{l1}}{\alpha}}.$$

Введем обозначения

$$\mu_l = \lambda_{l1} \alpha^{-1}, \quad \mu = \lambda^1 \alpha^{-1}.$$



Величина $\sqrt{\sigma r^{-1} R^{-3}}$ считается фиксированной, а $\alpha = \sqrt{\sigma R \rho^{-1} v^{-2}}$ переменной, и $\lambda_{l,p}$, λ_p^1 оказываются, таким образом, пропорциональны безразмерным величинам μ_l и μ . Ниже исследуется зависимость $\mu_l(\alpha)$.

В [1] получены некоторые асимптотические выражения для $\mu_l(\alpha)$. Если $\alpha \rightarrow 0$ при фиксированном l , то

$$\begin{aligned} \mu_l(\alpha) = & l(2l+1)(l+2)2^{-1}(2l^2+4l+ \\ & + 3)^{-1}\alpha + 3 \cdot 2^{-3}l^2(2l+1)(l+ \\ & + 2)^2(4l^2+8l^2+6l+3)(l-1)^{-1}(2l+ \\ & + 5)^{-1}(2l^2+4l+3)^{-1}\alpha^3 + O(\alpha^5). \end{aligned}$$

Если $\alpha \rightarrow \infty$ при фиксированном l , то

$$(6) \quad \begin{aligned} \mu_l(\alpha) = & i[l(l-1)(l+2)]^{1/2} + (l-1)(2l+1)\alpha^{-1} - \\ & - \sqrt{2}(i+1)[l(l-1)(l+2)]^{-1/4}\alpha^{-3/2} + O(\alpha^{-2}). \end{aligned}$$

Если $l \rightarrow \infty$ при фиксированном α , то

$$(7) \quad \mu_l(\alpha) = (1/2)\alpha l + R(\alpha, l),$$

где $\lim_{l \rightarrow \infty} l^{-1}R(\alpha, l) = 0$ при любом $\alpha > 0$. Пользуясь асимптотической формулой для $F_l(\lambda)$, приведенной в [1], можно показать, что при $\alpha < 2$, $l > 20$

$$(8) \quad |R(\alpha, l)| \leq (1/4)\alpha l.$$

Уравнение (4) решалось численно при $0 < \alpha < 2$, $2 < l \leq 20$ и $0 < \alpha < 10$, $l = 2$. График функции $\mu(\alpha)$ показан на фигуре. Оказалось, что при этих условиях

$$(9) \quad \mu = \mu_2.$$

Справедливость равенства (9) для $l > 20$, $\alpha < 2$ следует из асимптотической формулы (7) и оценки остаточного члена (8).

Покажем теперь, что (9) верно и для $\alpha > 2$. Пусть, напротив, для некоторых $l > 2$, $\alpha > 2$ выполнено неравенство

$$(10) \quad \operatorname{Re} \mu_l(\alpha) \leq \operatorname{Re} \mu_2(\alpha).$$

Поскольку из проведенных расчетов (показавших, что при $\alpha > 4$ значение λ_{21} совпадает со значением, вычисленным по формуле (6) с точностью 10^{-3}) и асимптотической формулы (6) при $l = 2$ следует, что $\operatorname{Re} \lambda_{21}(\alpha) < 5$, неравенство (10) означает существование при некоторых $l > 2$, $\alpha > 2$ решения λ уравнения (4) такого, что $\operatorname{Re} \lambda < 5$. Из (4) следует

$$(11) \quad 2|F_l(\lambda)| = |\Phi_l(\lambda, \alpha)|.$$

Из последнего тождества (5) можно заключить, что

$$2|F_l(\lambda)| \leq 4 \sum_{q=1}^{\infty} [(k_{l+1/2,q}^2 - \operatorname{Re} \lambda)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2]^{-1/2},$$

откуда в силу выполненных при $l > 2$ неравенств $k_{l+1/2,q}^2 > 5 > \operatorname{Re} \lambda$ следует

$$(12) \quad 2|F_l(\lambda)| \leq 4 \sum_{q=1}^{\infty} (k_{l+1/2,q}^2 - 5)^{-1} = 2F_l(5).$$

С другой стороны, по принципу максимума модуля, примененного к полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 5$, выполнено

$$\begin{aligned} |\Phi_l(\lambda, \alpha)|^2 &\geq \min_{-\infty < y < \infty} \{[(y^2 - 25 + 10\beta_l - \alpha^2\omega_l)^2 + 4y^2(5 - \beta_l)^2] \times \\ &\quad \times [(y^2 - 25 + 10\omega_l - \alpha^2\omega_l)^2 + 4y^2(5 - \omega_l)^2]^{-1}\} = \\ &= \min_{0 < \tau < \infty} \{[(\tau - 25 + 10\beta_l - \alpha^2\omega_l)^2 + 4\tau(5 - \beta_l)^2][(\tau - 25 + 10\beta_l - \alpha^2\omega_l)^2 + \\ &\quad + 4\tau(25 - 5\omega_l - 5\beta_l + \omega_l^2) + 10(\beta_l - \omega_l)(25 - 5\omega_l - 5\beta_l + \alpha^2\omega_l)]^{-1}\}. \end{aligned}$$

Следовательно, если $\alpha^2 > 7 > 5 + 5\beta_l/\omega_l - 25/\omega_l$, то

$$\begin{aligned} (13) \quad |\Phi_l(\lambda, \alpha)|^2 &\geq \min_{0 < \tau < \infty} \{[(\tau - 25 + 10\beta_l - \alpha^2\omega_l)^2 + 4\tau(5 - \beta_l)^2] \times \\ &\quad \times [(\tau - 25 + 10\beta_l - \alpha^2\omega_l)^2 + 4\tau(25 - 5\omega_l - 5\beta_l + \omega_l^2)]^{-1}\} = \\ &= (5 - \beta_l)^2(25 - 5\omega_l - 5\beta_l + \omega_l^2)^{-1} \geq (\beta_l - 5)^2\omega_l^{-2} > (l + 1)^{-2}. \end{aligned}$$

Непосредственно вычисляя $F_l(5)$ при $l < 20$ и пользуясь асимптотической формулой [1]

$$F_l(5) \simeq \frac{1}{2}l^{-1} - \frac{3}{4}l^{-2} + \frac{7}{4}l^{-3} + O(l^{-4})$$

с оценкой остаточного члена при $l > 20$, имеем $2F_l(5) < (l + 1)^{-1}$, что вместе с неравенствами (12), (13) противоречит (11).

Таким образом, показано, что равенство (9) выполнено для $\alpha > \sqrt{7}$. Для $2 < \alpha < \sqrt{7}$, $l > 4$ равенство (9) следует из того, что $\operatorname{Re} \lambda_{l1} < 4$ и оценок $|2F_l(\lambda)|$ и $|\Phi_l(\lambda, \alpha)|$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 4$, аналогичных сделанным выше. Для $2 < \alpha < \sqrt{7}$, $\alpha = 3$ и 4 равенство (9) проверяется с помощью непосредственных вычислений λ_{l1} .

Итак, установлено, что (9) выполнено для всех $\alpha > 0$ и функция $\mu(\alpha) = \mu_2(\alpha)$, представленная на фигуре, действительно характеризует демпфирование системы при больших значениях времени. Ниже описаны некоторые свойства $\mu(\alpha)$.

Функция $\mu(\alpha)$ достигает максимального значения при $\alpha = \alpha^* \simeq 1,305$, причем $\mu(\alpha^*) \simeq 2,76$.

Интересно, что $\lambda_{21}(\alpha^*)$ является кратным действительным корнем уравнения (4) при $l = 2$, $\alpha = \alpha^*$. Поэтому

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^* - 0} \mu'(\alpha) = \infty$$

и, кроме того, при больших значениях времени соответствующие возмущения затухают как $t \exp[-\lambda_{21,p}(\alpha^*)t]$.

Данная ситуация является, вероятно, типичной при отсутствии вращения, когда при достаточно больших значениях вязкости собственные числа действительные, а при достаточно малых — комплексные. В качестве иллюстрации можно рассмотреть уравнение $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0$, для которого $\max_{\alpha > 0} \min_{l=1,2} \operatorname{Re} \lambda_l(\alpha)$ достигается также на кратном корне.

В [1] доказано, что рассматриваемая система не имеет собственных колебательных режимов при $\alpha < 1,142$. Проведенные вычисления позволяют уточнить это число. Так, установлено, что все корни уравнений (11) вещественны, если $\alpha \leq \alpha^* \simeq 1,305$. В противном случае уравнение (4) при некоторых значениях l имеет не вещественные корни. Если $\alpha^* < \alpha < \alpha_1 \simeq 1,611$, то уравнение (4) имеет одну пару комплексных корней при $l = 2$, при $l > 2$ все корни вещественны. Если $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \simeq 1,820$, то комплексно-сопряженные корни существуют при $l = 2$ и 3 , а при $l > 3$ все корни вещественны.

Вычисления показали также, что асимптотическая формула (6) хорошо приближает $\mu_2(\alpha)$ уже при $\alpha > 4$ (отклонение точного значения $\mu_2(\alpha)$ от суммы двух первых слагаемых в (6) не превышает $10^{-2}\alpha^{-1}$) и может быть использована при расчетах, касающихся шаров из реальных мате-

риалов, когда значение α сравнительно велико. Например, для жидких металлов при $R = 1$ см величина α имеет порядок $10-30$.

В заключение автор благодарит В. В. Пухначева, обратившего внимание на эту задачу, и В. И. Юдовича за ценные замечания.

Поступила 31 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.
2. Нго Зуй Кан. О вращательном движении твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. — ЖВММФ, 1971, т. 11, № 6.
3. Reid W. H. The oscillations of a viscous liquid globe with a core. — Proc. London Math. Soc., 1959, vol. 9, N 35.
4. Reid W. H. The oscillations of a viscous liquid drop. — Quart. Appl. Math., 1960, vol. 18, N 1.
5. Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. О свободных колебаниях жидкого самогравитирующего шара с учетом вязких и капиллярных сил. — ЖВММФ, 1968, т. 8, № 6.

УДК 532.556.2; 532.574

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В МЕЛКОЙ И ГЛУБОКОЙ КАВЕРНАХ

В. Я. Богатырев, В. А. Мушин

(Новосибирск)

В работе приводятся результаты экспериментального исследования течения несжимаемой жидкости в мелкой и глубокой кавернах прямоугольного поперечного сечения с помощью лазерного доплеровского измерителя скорости (ЛДИС). Опыты проведены при ламинарном режиме течения в канале перед каверной. Получено распределение продольной и поперечной составляющих скорости в центральном сечении каверны.

Экспериментальных данных по исследованию структуры течения в кавернах крайне мало. Исследования ограничивались в основном визуальными наблюдениями [1]. Известны работы, в которых проводилось измерение статического давления, касательного напряжения на стенках каверн. В [2] измерены профили скорости и касательное напряжение на дне мелких каверн (когда отношение длины каверны к ее глубине $L/H > 1,75$). На основании имеющихся работ невозможно составить детальное представление о характере течения в кавернах различной конфигурации.

Подробное описание экспериментальной установки и методики измерений приведено в [3]. Здесь приведем лишь некоторые сведения об опытном участке. Опытные каверны имели следующие размеры: мелкая — $L = 40$ мм, $H = 20$ мм; глубокая — $L = 20$ мм, $H = 40$ мм. Ширина каверны равнялась ширине плоского участка (100 мм). Каверны расположены на расстоянии 1500 мм от плоского участка. Во время измерений фокальная область находилась в плоскости, расположенной на равном расстоянии от боковых стенок каверны. Размеры фокальной области $100 \times 100 \times 800$ мкм. Толщина оптических стекол 10 мм. На расстоянии 60 мм от фокальной области диаметр лазерного пучка составлял 0,5—0,6 мм. Минимальное расстояние от стенок, на котором были произведены поочередные измерения продольной и поперечной составляющих скорости, ~ 1 мм. Так как оптическая схема ЛДИС не позволяла определять направление скорости, то течение в кавернах подробно исследовалось в том случае, когда в канале и каверне устанавливался ламинарный режим движения жидкости. При турбулентном режиме течения исследовалась только зона смешения (область, примыкающую к верхнему срезу каверны, можно рассматривать как зону смешения струи, образующейся после срыва потока в точке $x = 0, y = 0$ с потоком в каверне (фиг. 1, б) и пристенная струя, распространяющаяся вдоль задней стенки каверны, где известно направление движения).

В случае ламинарного течения жидкости в канале при значении $Re = 1,5 \cdot 10^3$ в каверне $L/H = 0,5$ наблюдалось течение с одним вихрем в