

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей.— М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1951.
2. Кобеко П. П. Аморфные вещества.— М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. Френкель Я. П. Кинетическая теория жидкостей.— Л.: Наука, 1975.
4. Мазурин О. В. Стеклование и стабилизация неорганических стекол.— Л.: Наука, 1978.
5. Быстрозакаленные металлы/Под ред. Б. Кантора: Пер. с англ.— М.: Metallurgia, 1983.
6. Металлические стекла/Под ред. Дж. Дж. Гилмана и Х. Дж. Лимп: Пер. с англ.— М.: Metallurgia, 1984.
7. Дорофеева Е. А., Прокошин А. Ф. Магнитная анизотропия аморфных металлических сплавов на основе железа // ФММ.— 1984.— Т. 57, № 3.
8. Дорофеева Е. А. О микроструктуре металлического стекла // ФММ.— 1987.— Т. 63, № 2.
9. Френкель Я. П., Образцов Ю. Н. Феноменологическая теория механических свойств аморфных тел и распространение колебаний в них // ЖЭТФ.— 1939.— Т. 9, № 9.
10. Френкель Я. П. Кинетическая теория жидкостей.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1954.
12. Литовиц Т., Дэвис К. Структурная и сдвиговая релаксация в жидкости // Физическая акустика/Под ред. У. Мэсона: Пер. с англ.— М.: Мир, 1968.— Т. 2, ч. А.
13. Рамачандрарао П. Интервал стеклования в металлических стеклах // Быстрозакаленные металлы/Под ред. Б. Кантора: Пер. с англ.— М.: Metallurgia, 1983.
14. Anderson P. M., Lord A. E. The correlation between viscous flow and differential scanning calorimetry // Mater. Sci. Engng.— 1980.— V. 43, N 2.
15. Кобеко П. П., Кувшинский Е. В., Гуревич Г. И. Исследование аморфного состояния // Изв. ОМЭН.— 1937.— Т. 3, № 2.
16. Листошин Б. В. О методике определения термомеханической температуры стеклования неорганических стекол // Физика и химия стекла.— 1984.— Т. 10, № 6.
17. Macedo P. B., Napolitano A. Effects of a distribution of volume relaxation times in the annealing of BSC glass // J. Res. NBS.— 1967.— V. 71A, N 2.

г. Донецк

Поступила 13/X 1987 г.,
в окончательном варианте —
11/III 1988 г.

УДК 539.3

Л. Г. Доборджгинидзе

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛА ГАРМОНИЧЕСКОГО ТИПА

В условиях простого нагружения исследована плоская контактная упругопластическая задача [1] нелинейной теории упругости для полуплоскости из материала гармонического типа [2]. Силы трения на контактной области отсутствуют. Приводится решение упругопластической задачи о растяжении бесконечной плоскости из указанного материала, ослабленной двумя полубесконечными разрезами, расположенными вдоль действительной оси [3]. Получено точное решение рассматриваемых задач.

1. Пусть нелинейно-упругая полуплоскость S занимает нижнюю часть плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и вдоль линии $L' = [-b; b]$ границы S , обозначаемой далее через L , приложен жесткий штамп симметрично относительно начала координат. На штамп действует сосредоточенная сила $(0, N_0)$, направленная вертикально вниз вдоль оси Oy , где N_0 — заданная постоянная. Остальная часть границы ($L'' =]-\infty; -b[\cup]b; \infty[$) свободна от внешних воздействий. Напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют.

При определенном значении внешней нагрузки на контактной области под штампом вблизи наибольшей концентрации контактных напря-

жений образуется пластическая область нулевой толщины, которая локализуется на границе полуплоскости под штампом в виде зоны Γ' . Она наперед неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи. Далее введем обозначение $\Gamma = L \setminus \Gamma'$. Предполагается, что в пластической области выполняются известные условия пластичности Треска — Сен-Венана [4]. Будем считать, что штамп может перемещаться лишь поступательно.

Ниже рассматривается случай малых (но необязательно бесконечно малых) уругопластических деформаций. При этом граничные условия (физическая постановка) задачи можно считать корректными [3, 4].

Используя известные свойства линии скольжения, граничные условия задачи запишем в виде [5]

$$(1.1) \quad X_y = 0 \text{ на } L, \quad v = f(x) + \text{const на } \Gamma;$$

$$(1.2) \quad Y_y = \sigma_s \text{ на } \Gamma', \quad Y_y = 0 \text{ на } L'';$$

где σ_s — предел текучести при сжатии; $y = f(x)$ — действительная функция на Γ , характеризующая форму основания штампа (принимается, что $f'(x) \in H(\Gamma)$).

Для решения задачи воспользуемся комплексными представлениями напряжений, деформаций и смещений для нелинейно-упругого материала гармонического типа через две аналитические в физической области S функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ [6] ($z^* = z + u + iv$):

$$(1.3) \quad X_x + Y_y + 4\mu = \frac{\lambda + 2\mu}{\sqrt{J}} q \Omega(q), \quad Y_y - X_x - 2iX_y = \\ = -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{\sqrt{J}} \frac{\Omega(q)}{q} \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \bar{z}};$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \varphi'^2(z) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi'(z)}{\varphi'(z)}, \quad \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\varphi(z) \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)} - \overline{\psi'(z)} \right];$$

$$(1.5) \quad u + iv = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int \varphi'^2(z) dz + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] + \text{const};$$

$$(1.6) \quad \sqrt{J} = \frac{\partial z^* \partial \bar{z}^*}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial z^* \partial \bar{z}^*}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad q = 2 \left| \frac{\partial z^*}{\partial z} \right|, \quad \Omega(q) = q - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}, \\ z^* = z + u + iv.$$

В [6] показано, что при больших $|z|$ имеют место представления (при отсутствии на бесконечности напряжений и вращения)

$$(1.7) \quad \varphi(z) = -\frac{(\lambda + 2\mu)(X + iY)}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \ln z + z + \varphi_0(z) + \text{const},$$

$$\psi(z) = \frac{(\lambda + 2\mu)(X - iY)}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \left[\frac{1}{2\varphi'(z)} - 1 \right] \ln z + \psi_0(z) + \text{const}.$$

Здесь (X, Y) — главный вектор всех внешних усилий; λ, μ — упругие постоянные Ламэ; $\varphi_0(z), \psi_0(z)$ — голоморфные в S функции, имеющие порядок $o(1)$ при больших $|z|$. Кроме того,

$$(1.8) \quad \varphi'(z) \neq 0 \text{ в } S + L.$$

Из (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) на основании первого равенства (1.4) приходим к соотношению

$$(1.9) \quad \overline{\varphi(x)} \varphi''(x) - \varphi'^2(x) \psi'(x) = 0 \text{ на } L.$$

С использованием (1.9) после сравнения (1.3) и (1.4) получим важную для дальнейшего рассмотрения формулу

$$(1.10) \quad Y_y = N(x) = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + \mu + \mu |\varphi'^2(x)|} [|\varphi'^2(x)| - 1] \text{ на } L.$$

Из этого соотношения, как легко убедиться, на основании (1.7) следует

$$(1.11) \quad \varphi'(z) = \exp\left(-\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{F(x) dx}{x-z}\right) \text{ при } z \in S;$$

$$(1.12) \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{2\mu + N(x)}{2(\lambda + \mu) - N(x)} \right].$$

Отсюда, согласно (1.2), имеем

$$(1.13) \quad \varphi'(z) = \exp\left\{-\frac{F_s}{\pi i} [\ln(x-z)]_{\Gamma'} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(x) dx}{x-z}\right\}.$$

Рассмотрим теперь граничное значение (1.5) на L и полученное равенство продифференцируем по x . Тогда с учетом (1.9)

$$u'_x + iv'_x = \varphi'^z(x) \left[\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{|\varphi'^2(x)|} \right] - 1 \text{ на } L.$$

Отсюда на основании второго соотношения (1.1) находим

$$\left[\mu + \frac{\lambda + \mu}{|\varphi'^2(x)|} \right] \operatorname{Im} \varphi'^2(x) = (\lambda + 2\mu) f'(x) \text{ на } \Gamma.$$

Теперь вычислим граничное значение $\varphi'(z)$, заданное формулой (1.13), когда z , оставаясь внутри S , стремится к точке x контура Γ , и введем обозначение $[\operatorname{Im}(x-x_0)]_{\Gamma'} = A(x_0)$. Тогда, применяя известное соотношение Сохоцкого — Племеля, получим на Γ

$$(1.14) \quad [\lambda + \mu + \mu \exp(2F(x_0))] \sin \left[\frac{2F_s}{\pi} A(x_0) + \frac{2}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{F(x) dx}{x-x_0} \right] = (\lambda + 2\mu) f'(x_0),$$

где $F(x)$ определяется согласно (1.12), а F_s — постоянная:

$$(1.15) \quad F_s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{2\mu + \sigma_s}{2(\lambda + \mu) - \sigma_s} \right).$$

Равенство (1.14) — нелинейное функциональное уравнение для определения функции $F(x)$ на Γ . Кроме того, линия интегрирования является неизвестной. Так что это уравнение не принадлежит к более или менее известным (изученным) классам нелинейных уравнений.

Несмотря на указанные затруднения, в одном частном, но важном для практики случае можно получить его точное и единственное решение указанного класса.

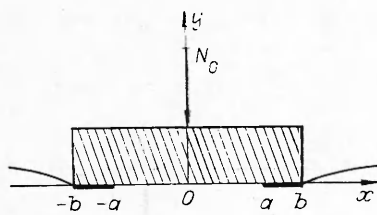
2. Рассмотрим жесткий штамп, имеющий прямолинейное горизонтальное основание, т. е. когда $f(x) = \text{const}$. Далее положим $\Gamma' = [-b; -a] \cup [a; b]$ и, следовательно, $\Gamma =]-a; a[$. Значит, пластическая область представляет собой совокупность двух прямолинейных отрезков $[-b; -a]$, $[a; b]$, расположенных на контактной линии возле угловых точек $-b$ и b (рис. 1).

В данном случае $A(x_0) = \ln \frac{(x_0 + a)(x_0 - b)}{(x_0 - a)(x_0 + b)}$ и следовательно, уравнение (1.18) примет вид

$$(2.1) \quad \int_{-a}^a \frac{F(x) dx}{x-x_0} = -F_s \ln \frac{(x_0 + a)(x_0 - b)}{(x_0 - a)(x_0 + b)} + C, \quad x, x_0 \in]-a; a[$$

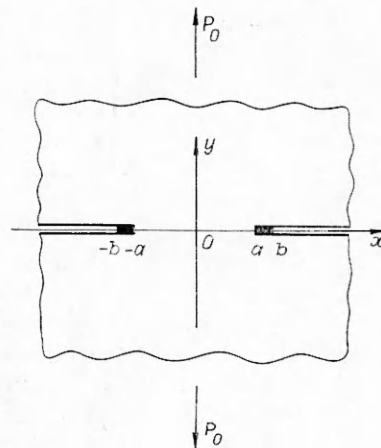
(C — произвольная постоянная). Учитывая, что $F(-x) = F(x)$, и полагая в (2.1) $x_0 = 0$, получим $C = 0$ и, значит,

$$\int_{-a}^a \frac{F(x) dx}{x-x_0} = -F_s \ln \frac{(x_0 + a)(x_0 - b)}{(x_0 - a)(x_0 + b)}.$$



Р и с. 1

Таким образом, для определения функции $F(x)$ на отрезке $]-a; a[$ найдено характеристическое сингулярное интегральное уравнение. Решение класса $h(-a; a)$ этого уравнения, как известно, имеет вид [7]



Р и с. 2

$$(2.2) \quad F(x_0) = \frac{F_s \sqrt{a^2 - x_0^2}}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{\ln |(x+a)(x-b)|(x-a)(x+b)|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dx}{x - x_0}$$

при соблюдении условия разрешимости

$$\int_{-a}^a \frac{\ln |(x+a)(x-b)|(x-a)(x+b)|}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 0.$$

Но поскольку подынтегральная функция нечетная, это условие выполняется автоматически.

Вычислим в правой части (2.2) сингулярный интеграл. После приведенных получим

$$(2.3) \quad F(x) = F_s \left[1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - a^2}} \right]$$

$(-a < x < a)$. Эта формула содержит неизвестную постоянную a . Перейдем к ее определению. Сначала внесем (2.3) в правую часть (1.11). Тогда после вычислений находим

$$(2.4) \quad \varphi'(z) = \exp \left[\frac{F_s}{\pi i} \ln \frac{(z+b) \sqrt{(b^2 - a^2)(z^2 - a^2)} + bz - a^2}{(z-b) \sqrt{(b^2 - a^2)(z^2 - a^2)} + bz + a^2} \right],$$

где ветвь функции $\sqrt{z^2 - a^2}$ фиксируем условием $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} = 1$, а постоянная F_s определяется соотношением (1.15).

В правой части (2.4) вычислим асимптотику при z^{-1} и полученное сравним с соответствующим выражением из представлений (1.7). После вычислений имеем

$$(2.5) \quad a = b \sqrt{1 - \frac{(\lambda + 2\mu)^2 N_0^2}{16\mu^2 (\lambda + \mu)^2 b^2 \left[\ln \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{2\mu + \sigma_s}{2(\lambda + \mu) - \sigma_s} \right) \right]^2}}.$$

По линейной классической теории эта формула выглядит как [2]

$$a = b \sqrt{1 - \frac{N_0^2}{4b^2 \sigma_s^2}}.$$

Вернемся теперь к формуле (2.3), из которой с учетом (1.12) получим

$$(2.6) \quad N(x) = \frac{2\mu \left[\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{2\mu + \sigma_s}{2(\lambda + \mu) - \sigma_s} \right)^{1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - a^2}}} - 1 \right]}{1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{2\mu + \sigma_s}{2(\lambda + \mu) - \sigma_s} \right)^{1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - a^2}}}$$

на $[-a; a]$. После определения $\varphi(z)$ другую искомую функцию $\psi(z)$ можно найти из условия (1.9) известным способом. Поле упругих элементов рассматриваемой области определяем из (1.3) — (1.6) операциями вычислительного характера.

3. Рассмотрим следующую задачу. Пусть бесконечная плоскость перемен $z = x + iy$ из материала гармонического типа ослаблена двумя полубесконечными прямолинейными разрезами, расположенными вдоль действительной оси. Берега разрезов свободны от внешних воздействий, а на бесконечности действует только сосредоточенная сила $(0, N_0)$, приложенная в бесконечно удаленной точке и направленная вдоль оси Oy (в точке $z = -\infty$ действует такая же сила, уравнивающая действие первой). Пластическая область теперь состоит из двух отрезков, расположенных вдоль линии разреза на ее продолжении (рис. 2).

Если мысленно отбросить верхнюю полуплоскость, то ее влияние на нижнюю часть S идентично действию жесткого штампа с горизонтальным прямолинейным основанием на линии между трещинами. Но теперь на штамп должна действовать сила, уравнивающая силу, действующую на нижнюю полуплоскость. Если введем обозначения $L =]-\infty; \infty[$, $L' = [-b; b]$, $\Gamma' = [-b; -a] \cup [a; b]$, $\Gamma = L \setminus \Gamma'$, $L'' = L \setminus L'$, то граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$X_y = 0 \text{ на } L, \quad v' = 0 \text{ на } \Gamma, \quad Y_y = \sigma_s \text{ на } \Gamma', \quad Y_y = 0 \text{ на } L'',$$

т. е. они совпадают с условиями (1.1), (1.2), если только в последних $f(x) = \text{const}$. Так что полная аналогия очевидна. Поэтому решение задачи дается формулами (2.4) — (2.6), в которых вместо N_0 следует взять $N_0 = P_0$. Ниже приводится это решение, записанное несколько в ином виде. В частности, комплексный потенциал

$$\varphi'(z) = \exp \left[-\frac{F_s}{\pi i} \ln \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}} \right],$$

а для нормального напряжения на отрезке $[-a; a]$ между разрезами получим выражение

$$N(x) = \frac{2\mu \left[\exp 2F_s \left(1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \sqrt{(b^2 - a^2)(a^2 - x^2)}}{b^2 - 2a^2 + x^2} \right) - 1 \right]}{1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \exp 2F_s \left(1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \sqrt{(b^2 - a^2)(a^2 - x^2)}}{b^2 - 2a^2 + x^2} \right)}$$

Линейный размер пластической области определяется формулой

$$a = b \left[1 - \frac{(1 - \nu^2)^2 P_0^2}{4E^2 b^2 F_s^2} \right]^{1/2},$$

где ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; постоянная F_s находится из (1.15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
2. Галин Л. А. Упругопластические задачи.— М.: Наука, 1984.
3. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача.— Новосибирск: Наука, 1983.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности.— М.: Наука, 1969.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
6. Доборджинидзе Л. Г. Комплексное представление смещений и напряжений для нелинейно-упругого материала гармонического типа // Тр. Тбп. мат. ин-та, 1979.— Т. 61.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.

г. Тбилиси

Поступила 3/IV 1987 г.,
в окончательном варианте —
18/II 1988 г.

УДК 624.074.4:539.1

Л. П. Железнов, В. В. Кабанов

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НАЧАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ ФОРМЫ

В большинстве известных решений задач устойчивости оболочек с начальными прогибами рассматривались осесимметричные прогибы. В некоторых работах изучалось влияние неосесимметричных прогибов. Решения получены или в классической постановке без учета моментности исходного напряженного состояния, или в предположении развития без перестройки начальных прогибов в процессе нелинейного деформирования при действии осесимметричных нагрузок.

Ниже найдено достаточно общее решение задачи без ограничений на нагрузку и форму начальных и бифуркационных прогибов. Использован метод конечных элементов в перемещениях. Конечный элемент выбран в виде прямоугольника естественной кривизны, функции формы которого учитывают его смещение как твердого тела.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины L , радиуса R , толщины h . Начальные несовершенства формы задаются либо рядом $w^0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w_{ij} \cos i\varphi \cos j\pi x/L$, либо двумерным массивом узловых значений начального прогиба и его производных $\bar{w}^0 = \{w_1, w_{\xi_1}, w_{\varphi_1}, \dots, w_k, w_{\xi_k}, w_{\varphi_k}, \dots, w_{\varphi_n}\}$. Здесь x, φ — продольная и угловая координаты; N, M — число членов ряда Фурье в разложении начального прогиба w^0 ; n — число узлов расчетной конечно-элементной сетки; $\xi = x/R$, w_{ij} — амплитуды начального прогиба; ξ, φ в индексах означают дифференцирование.

На конечном элементе начальные прогибы аппроксимируются бикубическим полиномом, неизвестные коэффициенты которого выражаются через узловые значения начального прогиба и его производных. Оболочка нагружена произвольной системой поверхностных нагрузок $q_i(x, y)$, погонных контурных сил $P_{ki}(x, y)$ и моментов $M_{ki}(x, y)$, локальных сил P_{li} и моментов M_{li} , $i = 1, 2, 3$ соответствует направлениям осей x, y, z .

1. Конечный элемент оболочки. Используя решение [1], запишем выражения для перемещений конечного элемента

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \xi \eta + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 - \alpha_6 s - \alpha_{20} c, \\ v &= \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \xi c + \alpha_7 \eta + \alpha_8 - \alpha_{20} \xi s + \alpha_{23} c - \alpha_{24} s, \\ w &= \alpha_9 \xi^3 \eta^3 + \alpha_{10} \xi^3 \eta^2 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi^3 + \alpha_{13} \xi^2 \eta^3 + \alpha_{14} \xi^2 \eta^2 + \\ &+ \alpha_{15} \xi^2 \eta + \alpha_{16} \xi^2 + \alpha_{17} \xi \eta^3 + \alpha_{18} \xi \eta^2 + \alpha_{19} \xi \eta + \alpha_{20} \xi c + \alpha_{21} \eta^3 + \\ &+ \alpha_{22} \eta^2 + \alpha_{23} s + \alpha_{24} c + \alpha_6 \xi s, \quad \xi = k_2 x, \quad \eta = k_2 y, \\ c &= \cos \varphi, \quad s = \sin \varphi, \quad u = k_2 u', \quad v = k_2 v', \quad w = k_2 w', \quad k_2 = R^{-1}. \end{aligned}$$