ПМТФ, № 1, 1969

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. Н. Данилов, В. А. Сыровой

(Москва)

Дано решение уравнений пространственного стационарного электростатического пучка заряженных частиц одного знака, заполняющих область между двумя близкими криволинейными поверхностями. Течение предполагается безвихревым и нерелятивистским, а вектор скорости — однозначной функцией. Решение строится в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε, представляющего собой отношение характерных поперечного (a) и продольного (l) размеров задачи. В качестве первого размера фигурирует расстояние между электродами, а l определяет масштаб, на котором заметно меняются геометрические и физические параметры: кривизны эмиттера, электрическое поле E на нем и плотность тока эмиссии J. Исследованы режимы эмиссии, ограниченной пространственным зарядом (ρ-режим), температурой (T-режим), и случай ненулевой начальной скорости (U-режим). Асимптотическое представление при этом задается формулами для соответствующего одномерного течения между параллельными плоскостями.

Решение краевой задачи при эмиссии в ρ-режиме сводится к определению плотности тока эмиссии J при фиксированной геометрии электродов и заданном ускоряющем напряжении. Соответствующие формулы приведены с сохранением членов порядка ε^3.

Для T- и U-режимов выполнено два приближения по ε. Здесь искомой величиной при заданных свойствах эмиттирующей поверхности (J) будет электрическое поле E.

Результаты, доставляемые построенными разложениями, сравниваются с точным решением для течения с плоского эмиттера по круговым траекториям [1]. В качестве примера рассмотрена двумерная задача о течении между двумя близкими круговыми цилиндрическими электродами при нарушении коаксиальности.

В работе используются обычные тензорные обозначения.

1. Основные уравнения. Регулярный моноэнергетический нерелятивистский пучок одноименно заряженных частиц при отсутствии магнитного поля в стационарном случае описывается системой дифференциальных уравнений, которая в тензорной форме в произвольной криволинейной системе координат q^i ($i = 1, 2, 3$) имеет вид

$$g^{ik}v_i v_k = 2\varphi + (u)^2, \quad e^{ikl}\frac{\partial v_i}{\partial q^k} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(\sqrt{g}g^{ik}\rho v_k) = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial q^k}\right) = \rho \qquad (1.1)$$

Здесь v_i — ковариантные компоненты скорости, φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда, g_{ik} — метрический тензор, g — его детерминант, u — постоянная, имеющая смысл скорости на эмиттере. Для удобства в уравнениях (1.1) опущены удельный заряд η и 4π, что соответствует замене $\eta\varphi \to \varphi$, $4\pi\eta\rho \to \rho$. При таком определении для ρ- и T-режимов $\varphi \geqslant 0$, $E \geqslant 0$.

Дальнейшее рассмотрение будем вести в ортогональной системе, связанной с эмиттером, предполагая, что $q^1 = 0$ — его уравнение в этих координатах; коллектор определим соотношением $q^1_{(2)} = f(q^2, q^3)$. На введенных таким образом электродах имеем

$$q^1 = 0,\ v_{q^1} = u,\ v_{q^2} = v_{q^3} = 0,\ \varphi = 0,\ J_{q^1} = J(q^2,\ q^3),\quad E_{q^1} = E(q^2, q^3)$$
$$q^1_{(2)} = f(q^2,\ q^3),\ \varphi = \varphi_{(2)} \tag{1.2}$$

Здесь символы с нижним индексом q^i означают физические компоненты соответствующих величин; в ρ-режиме $u = E = 0$, при эмиссии, ограниченной температурой, $u = 0$.

Введение характерных масштабов (a по q^1, l по q^2, q^3) позволяет явно выделить ε в уравнениях (1.1): малый параметр появится при производных по q^2, q^3. Удобнее, однако, ввести ε символически в качестве указателя порядка малости следующих за ним членов, сохранив за обозначениями смысл, приданный им в (1.1). Тогда (1.1) перепишется следующим образом:

$$g_{11}(v^1)^2 + \varepsilon^2 g^{22}(v_2)^2 + \varepsilon^2 g^{33}(v_3)^2 = 2\varphi + (u)^2$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial q^1} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial q^2}(q_{11}v^1),\quad \frac{\partial v_3}{\partial q^1} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial q^3}(g_{11}v^1)$$
$$\frac{\partial}{\partial q^1}(\sqrt{g}\,\rho\, v^1) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial q^2}(\sqrt{g}\,\rho g^{22}v_2) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial q^3}(\sqrt{g}\,\rho g^{33}v_3) = 0 \tag{1.3}$$
$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\sqrt{g}g^{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\sqrt{g}g^{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial q^3}\left(\sqrt{g}g^{33}\frac{\partial\varphi}{\partial q^3}\right) = \sqrt{g}\,\rho$$

Прежде чем приступить к решению (1.3), выпишем разложения для элементов метрического тензора g_{ik} вблизи эмиттирующей поверхности, сохраняя при этом члены порядка ε^2

$$g_{11} = a_0\left[1 + \varepsilon\frac{a_1}{a_0^{3/2}}s + \varepsilon^2\frac{a_2}{a_0^2}s^2\right],\quad s = a_0^{1/2}q^1$$
$$g_{22} = b_0\left[1 - 2\varepsilon\varkappa_1 s + \varepsilon^2\left(k_{1P}' + \varkappa_1^2 - k_1^2 - \delta_1\delta_2 - \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\varkappa_1\right)s^2\right] \tag{1.4}$$
$$g_{33} = c_0\left[1 - 2\varepsilon\varkappa_2 s + \varepsilon^2\left(\delta_{1Q}' + \varkappa_2^2 - \delta_1^2 - k_1k_2 - \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\varkappa_2\right)s^2\right]$$

Здесь $\varkappa_1$, $\varkappa_2$; k_1, k_2; δ_1, δ_2 — главные кривизны координатных поверхностей $q^i = \mathrm{const}$, вычисленные при $q^1 = 0$; следовательно, как коэффициенты a_k разложения g_{11}, так и $\varkappa$, k, δ суть функции от q^2, q^3; P, Q — длины дуг криволинейных осей q^2, q^3

$$k_{1P}' = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial k_1}{\partial q^2},\quad \delta_{1Q}' = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\delta_1}{\partial q^3}$$

При написании (1.4) учтены условия эвклидовости пространства, сформулированные в терминах главных кривизн.

2. Решение уравнений пучка. Будем искать решение (1.3) в параметрическом виде, определяя параметр τ во всех приближениях по ε соотношением

$$\partial q^1 / \partial\tau = v^1 \tag{2.1}$$

Можно показать, что в первом приближении τ совпадает с временем движения частицы по траектории.

Наметим путь интегрирования системы (1.3). Из уравнения сохранения тока при учете (2.1) имеем

$$\sqrt{g}\rho v^1 = (b_0c_0)^{1/2} J - \int\limits_0^\tau v^1\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial q^2}(\sqrt{g}\rho g^{22} v_2) + \frac{\partial}{\partial q^3}(\sqrt{g}\rho g^{33} v_3)\right] d\tau \qquad (2.2)$$

Уравнение Пуассона позволяет вычислить контравариантную компоненту электрического поля

$$\sqrt{g}g^{11}\partial\varphi / \partial q^1 = (b_0c_0)^{1/2} E +$$
$$+ \int\limits_0^\tau \left\{\sqrt{g}\rho v^1 - v^1\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\sqrt{g}g^{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q^3}\left(\sqrt{g}g^{33}\frac{\partial\varphi}{\partial q^3}\right)\right]\right\} d\tau \qquad (2.3)$$

входящую в уравнение движения, получаемое дифференцированием интеграла энергии по q^1

$$\frac{\partial^2 q^1}{\partial\tau^2} = g^{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1} - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial q^1}(v^1)^2 - \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial q^1}[g^{22}(v_2)^2 + g^{33}(v_3)^2] \qquad (2.4)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения вида

$$\frac{\partial^2 q^1}{\partial\tau^2} = F(\tau; q^2, q^3)$$

причем в правые части (2.2) — (2.4) подставляются функции предыдущих приближений нужного порядка. Производные по q^α ($\alpha = 2, 3$) вычисляются при помощи соотношений

$$\left.\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right|_{q^1=\mathrm{const}} = \left.\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right|_{\tau=\mathrm{const}} + \left.\frac{\partial\tau}{\partial q^\alpha}\right|_{q^1=\mathrm{const}}\left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{q^\alpha=\mathrm{const}}$$

Следуя намеченному пути, получаем следующие выражения для решения в первом приближении (символ $\langle 1\rangle$ указывает номер приближения)

$$s\langle 1\rangle = \frac{1}{6}J\tau^3 + \frac{1}{2}E\tau^2 + u\tau + \varepsilon\left[\frac{1}{30}J^2\left(-\frac{5}{24}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{1}{6}T\right)\tau^6 + \right.$$
$$+ \frac{1}{20}JE\left(-\frac{5}{6}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{2}{3}T\right)\tau^5 + \frac{1}{12}E^2\left(-\frac{3}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{1}{2}T\right)\tau^4 +$$
$$\left. + \frac{1}{12}uJ\left(-\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + T\right)\tau^4 + \frac{1}{6}uE\left(-\frac{3}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + T\right)\tau^3 - \frac{1}{4}u^2\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\tau^2\right]$$

$$2\varphi\langle 1\rangle = (^1/_2\, J\tau^2 + E\tau + u)^2 - u^2 + \varepsilon(^1/_2\, J\tau^2 + E\tau + u)\,[^1/_{15}\, J^2\tau^5 + {}^1/_3\, JE\tau^4 +$$
$$+ {}^1/_3\,(E^2 + 2uJ)\,\tau^3 + uE\tau^2]\,T$$

$$b_0^{-1/2}v_2\langle 1\rangle = \varepsilon\{^1/_{60}\, J(J_P' - 5k_1J)\,\tau^5 + {}^1/_{12}\, E\,(J_P' - 5k_1J)\tau^4 + {}^1/_6[E\,(E_P' - 3k_1E) +$$
$$+ u(J_P' - 4k_1J)]\tau^3 + {}^1/_2\, u\,(E_P' - 3k_1E)\tau^2 - u^2k_1\tau\} \qquad (2.5)$$

$$c_0^{1/2}v_3\langle 1\rangle = \varepsilon\,\{^1/_{60}\, J(J_Q' - 5\delta_1J)\tau^5 + {}^1/_{12}E(J_Q' - 5\delta_1J)\tau^4 + {}^1/_6\,[E(E_Q' - 3\delta_1E) +$$
$$+ u(J_Q' - 4\delta_1J)]\,\tau^3 + {}^1/_2\, u(E_Q' - 3\delta_1E)\tau^2 - u^2\delta_1\tau\}$$

Здесь $T = \varkappa_1 + \varkappa_2$ — полная кривизна эмиттирующей поверхности.

Формулы, определяющие члены порядка ε^2, при $u \neq 0$ имеют вид

$$\Delta s\langle 2\rangle \equiv s\langle 2\rangle - s\langle 1\rangle = \sum_{k=0}^{9} A_k\tau^k + \sum_{k=0}^{3} B_k\tau^k \ln(\tau^2 + b\tau + c) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{3} C_k\tau^k \operatorname{arc\,tg}\frac{2\tau + b}{\sqrt{d}}, \quad b = \frac{2E}{J}, \quad c = \frac{2u}{J}, \quad d = 4c - b^2 \tag{2.6}$$

$$2\Delta\varphi\langle 2\rangle \equiv 2(\varphi\langle 2\rangle - \varphi\langle 1\rangle) = \sum_{k=0}^{10} F_k\tau^k + (J\tau^2 + 2E\tau + 2u)\Big[(B_1 + 2B_2\tau +$$

$$+ 3B_3\tau^2)\ln(\tau^2 + b\tau + c) + \left(C_1 + 2C_2\tau + \frac{6}{\sqrt{d}}C_3\tau^2\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{2\tau + b}{\sqrt{d}}\Big]$$

$$b_0^{-1/2}\Delta v_2\langle 2\rangle = \sum_{k=2}^{8}\frac{V_{k-1}}{k}\tau^k, \quad c_0^{-1/2}\Delta v_3\langle 2\rangle = \sum_{k=2}^{8}\frac{W_{k-1}}{k}\tau^k$$

Коэффициенты A, B, C, F, V, W в (2.6) зависят от геометрических и физических параметров задачи и не будут приведены здесь из-за громоздкости. Остановимся подробнее на случае нулевой начальной скорости. При $u = 0$ (2.6) перепишется следующим образом: (2.7)

$$\Delta s\langle 2\rangle = \sum_{k=0}^{7}\frac{D_k^\circ}{(k+1)(k+2)}\tau^{k+2} - \frac{1}{2}D_0^\circ\tau(\tau + b)\ln\left(1 + \frac{\tau}{b}\right)$$

$$\Delta v^1\langle 2\rangle = \sum_{k=1}^{7}\frac{D_k^\circ}{k+1}\tau^{k+1} + \frac{1}{2}D_0^\circ\left[\tau - (2\tau + b)\ln\left(1 + \frac{\tau}{b}\right)\right]$$

$$2\Delta\varphi\langle 2\rangle = \sum_{k=2}^{10} F_k^\circ\tau^k - \frac{1}{2}JD_0^\circ\tau(\tau + b)(2\tau + b)\ln\left(1 + \frac{\tau}{b}\right)$$

$$b_0^{-1/2}\Delta v_2\langle 2\rangle = \sum_{k=5}^{8}\frac{V_{k-1}}{k}\tau^k, \quad c_0^{-1/2}\Delta v_3\langle 2\rangle = \sum_{k=5}^{8}\frac{W_{k-1}}{k}\tau^k$$

$$D_7 = J^3\Big[-\frac{1}{18}\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{1}{18}\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{1}{30}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}T + \frac{1}{30}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \frac{7}{180}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{11}{126}k_1^2 -$$

$$- \frac{2}{315}\frac{J_P''}{J} - \frac{1}{1260}\frac{J_P'^2}{J^2} + \left(\frac{11}{210}k_1 + \frac{2}{315}k_2\right)\frac{J_P'}{J}\Big], \quad D_6 = \frac{7}{2}bD_7$$

$$D_5 = JE^2\Big[-\frac{7}{8}\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{7}{8}\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{119}{240}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}T + \frac{59}{120}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \frac{17}{30}\varkappa_1\varkappa_2 -$$

$$- \frac{161}{120}k_1^2 - \frac{1}{15}\frac{J_P''}{J} - \frac{7}{300}\frac{J_P'^2}{J^2} + \left(\frac{119}{200}k_1 + \frac{1}{15}k_2\right)\frac{J_P'}{J} + \frac{7}{200}\frac{J_P'}{J}\frac{E_P'}{E} -$$

$$- \frac{7}{120}\frac{E_P''}{E} - \frac{7}{120}\frac{E_P'^2}{E^2} + \left(\frac{7}{20}k_1 + \frac{7}{120}k_2\right)\frac{E_P'}{E}\Big]$$

$$D_4 = E^3\Big[-\frac{5}{8}\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{5}{8}\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{5}{16}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}T + \frac{7}{24}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \frac{1}{3}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{7}{8}k_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{20}\frac{J_P'^2}{J^2} - \frac{1}{40}k_1\frac{J_P'}{J} - \frac{19}{120}\frac{J_P'}{J}\frac{E_P'}{E} - \frac{1}{8}\frac{E_P''}{E} + \frac{1}{24}\frac{E_P'^2}{E^2} + \left(\frac{11}{12}k_1 + \frac{1}{8}k_2\right)\frac{E_P'}{E}\Big]$$

$$D_3 = \frac{E^4}{J}\left[-\frac{1}{9}\frac{J_P'^2}{J^2} + \frac{1}{18}k_1\frac{J_P'}{J} + \frac{19}{54}\frac{J_P'}{J}\frac{E_P'}{E} - \frac{5}{18}\frac{E_P'^2}{E^2} - \frac{5}{24}k_1\frac{E_P'}{E}\right]$$

$$D_2 = -\frac{6}{5}\,bD_3,\quad D_1 = \frac{9}{5}\,b^2D_3,\quad D_0 = \frac{6}{5}\,b^3D_3$$

$$F_{10} = J^4\left[\frac{19}{3600}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2) + \frac{17}{2400}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{1}{252}k_1^2 - \frac{1}{1260}\frac{J_P''}{J} + \frac{1}{5600}\frac{J_P'^2}{J^2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{19}{5040}k_1 + \frac{1}{1260}k_2\right)\frac{J_P'}{J}\right],\qquad F_9 = 5bF_{10}$$

$$F_8 = J^2E^2\left[\frac{3}{16}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2) + \frac{1}{4}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{89}{630}k_1^2 - \frac{1}{42}\frac{J_P''}{J} + \frac{37}{25200}\frac{J_P'^2}{J^2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2969}{25200}k_1 + \frac{1}{42}k_2\right)\frac{J_P'}{J} + \frac{41}{3600}\frac{J_P'}{J}\frac{E_P'}{E} - \frac{7}{720}\frac{E_P''}{E} - \frac{7}{720}\frac{E_P'^2}{E^2} + \left(\frac{11}{360}k_1 + \frac{7}{720}k_2\right)\frac{E_P'}{E}\right]$$

$$F_7 = JE^3\left[\frac{5}{18}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2) + \frac{11}{30}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{37}{180}k_1^2 - \frac{1}{45}\frac{J_P''}{J} + \frac{1}{450}\frac{J_P'^2}{J^2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{11}{100}k_1 + \frac{1}{45}k_2\right)\frac{J_P'}{J} + \frac{7}{900}\frac{J_P'}{J}\frac{E_P'}{E} - \frac{2}{45}\frac{E_P''}{E} - \frac{1}{90}\frac{E_P'^2}{E^2} + \left(\frac{29}{180}k_1 + \frac{2}{45}k_2\right)\frac{E_P}{E}\right]$$

$$F_6 = E^4\left[\frac{13}{90}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2) + \frac{17}{90}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{1}{10}k_1^2 - \frac{7}{900}\frac{J_P'^2}{J^2} + \frac{7}{1800}k_1\frac{J_P'}{J} + \right.$$
$$\left. + \frac{133}{5400}\frac{J_P'}{J}\frac{E_P'}{E} - \frac{1}{20}\frac{E_P''}{E} - \frac{1}{40}\frac{E_P'^2}{E^2} + \left(\frac{191}{1080}k_1 + \frac{1}{20}k_2\right)\frac{E_P'}{E}\right]$$

$$F_5 = -\frac{3}{10}ED_3,\quad F_4 = -\frac{10}{3}bF_5,\quad F_3 = -10b^2F_5,\quad F_2 = -4b^3F_5$$

$$V_7 = J^3\left[\frac{1}{90}T_P' - \frac{1}{18}k_{1S}' - \left(\frac{1}{90}\varkappa_1 + \frac{1}{15}\varkappa_2\right)k_1 + \frac{1}{90}T\frac{J_P'}{J}\right],\quad V_6 = \frac{7}{2}bV_7$$

$$V_5 = JE^2\left[\frac{1}{120}T_P' - \frac{7}{8}k_{1S}' - \left(\frac{7}{60}\varkappa_1 + \frac{119}{120}\varkappa_2\right)k_1 + \frac{2}{15}T\frac{J_P'}{J} + \frac{1}{20}T\frac{E_P'}{E}\right]$$

$$V_4 = E^3\left[\frac{1}{8}T_P' - \frac{5}{8}k_{1S}' - \frac{5}{8}\varkappa_2k_1 + \frac{1}{6}T\frac{E_P'}{E}\right]$$

Символ D°, F° означает, что выражения для D, F в (2.7) должны быть дополнены слагаемыми, содержащими производные от J, E по Q, и кривизнами δ_1, δ_2; эти члены входят абсолютно симметрично в силу полного равноправия направлений q^2, q^3 (например, k_1J_P'/J должно быть дополнено слагаемым δ_1J_Q'/J); $\overline{W}$ получаются из V заменой $P \to Q$, $k \to \delta$, S — длина дуги криволинейной оси q^1.

Заметим, что решение (2.5), (2.7) допускает описание течений с непрерывным переходом условий эмиссии от T- к ρ-режиму.

При эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, логарифмические члены в (2.7) выпадают, и после исключения τ разложения (2.5), (2.7) переходят в ряды по q^1, приведенные в [2]. В этом случае для построения приближений по ε можно пользоваться выписанными в [2] рекуррентными соотношениями. Сохраняя члены порядка ε^3, для потенциала имеем

$$\frac{\varphi\langle 3\rangle}{\varphi\langle 0\rangle} = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{8}{15}T\right)s + \varepsilon^2\left[\frac{2}{9}\frac{a_2}{a_0^2} - \frac{1}{24}\frac{a_1^2}{a_0^3} + \frac{14}{45}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}T + \right.$$
$$\left. + \frac{83}{225}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2) + \frac{157}{450}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{2}{9}k_1^2 - \frac{4}{45}\frac{J_P''}{J} + \frac{13}{450}\frac{J_P'^2}{J^2} + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{4}{45}k_2\right)\frac{J_P'}{J}\right]s^2 +$$
$$+ \varepsilon^3\left\{\frac{1}{6}\frac{a_3}{a_0^{5/2}} - \frac{7}{108}\frac{a_1a_2}{a_0^{7/2}} + \frac{5}{324}\frac{a_1^3}{a_0^{9/2}} + \frac{28}{135}\frac{a_2}{a_0^2}T + \frac{a_1}{a_0^{3/2}}\left[\frac{83}{270}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{157}{540}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{5}{27}k_1^2 - \frac{2}{27}\frac{J_P''}{J} + \frac{13}{540}\frac{J_P'^2}{J^2} + \left(\frac{5}{18}k_1 + \frac{2}{27}k_2\right)\frac{J_P'}{J}\right] - \frac{37}{990}T_P'' +$$

$$+\frac{112}{495}k_1\varkappa_{1P}'+\frac{19}{165}k_1\varkappa_{2P}'+\frac{37}{990}k_2T_P'-\frac{4}{99}\varkappa_1k_{1P}'-\frac{1}{6}k_1k_{1S}'+\frac{31463}{111375}(\varkappa_1^3+\varkappa_2^3)+$$

$$+\frac{199}{750}\varkappa_1\varkappa_2T-\left(\frac{751}{2970}\varkappa_1+\frac{28}{135}\varkappa_2\right)k_1^2+\left(-\frac{1}{9}\varkappa_1+\frac{5}{33}\varkappa_2\right)k_1k_2-$$

$$-\left(\frac{988}{7425}\varkappa_1+\frac{1018}{7425}\varkappa_2\right)\frac{J_P''}{J}+\left(\frac{689}{14850}\varkappa_1+\frac{221}{14850}\varkappa_2\right)\frac{J_P'^2}{J^2}+\left(-\frac{233}{2475}\varkappa_{1P}'-\frac{8}{2475}\varkappa_{2P}'+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{9}k_{1S}'+\frac{221}{495}\varkappa_1k_1+\frac{8}{45}\varkappa_2k_1+\frac{988}{7425}\varkappa_1k_2+\frac{1018}{7425}\varkappa_2k_2\right)\frac{J_P'}{J}\right\}s^3$$

$$2\varphi\langle 0\rangle=({}^9/{}_2J)^{2/3}s^{4/3} \qquad (2.8)$$

Члены с производными по Q и с δ_1, δ_2 снова для краткости опущены.

3. Решение краевой задачи. При эмиссии в T-режиме, как уже было отмечено выше, цель состоит в определении поля E (q^2, q^3) на эмиттере при заданных плотности тока эмиссии J (q^2, q^3), геометрии коллектора $s_{(2)}=a_0^{1/2}f=s_{(2)}$ (q^2, q^3) и его потенциале $\varphi_{(2)}$. Таким образом, дело сводится к решению двух уравнений

$$\begin{gathered}{}^1/{}_6J\tau_{(2)}^3+{}^1/{}_2E\tau_{(2)}^2+\varepsilon\Delta s_{(2)}\langle 1\rangle+\varepsilon^2\Delta s_{(2)}\langle 2\rangle=s_{(2)}\\ [{}^1/{}_2J\tau_{(2)}^2+E\tau_{(2)}]^2+2\varepsilon\Delta\varphi_{(2)}\langle 1\rangle+2\varepsilon^2\Delta\varphi_{(2)}\langle 2\rangle=2\varphi_{(2)}\end{gathered} \qquad (3.1)$$

Напомним, что нижний индекс (2) указывает на то, что соответствующие величины вычисляются на коллекторе. Из (3.1) имеем

$$E=V/\tau_{(2)}-{}^1/{}_2J\tau_{(2)},\qquad J\tau_{(2)}^3-6V\tau_{(2)}+12h=0$$

$$V=[2\varphi_{(2)}]^{1/2}\left\{1-\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\Delta\varphi_{(2)}\langle 1\rangle}{\varphi_{(2)}}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\frac{1}{8}\left(\frac{\Delta\varphi_{(2)}\langle 1\rangle}{\varphi_{(2)}}\right)^2+\frac{\Delta\varphi_{(2)}\langle 2\rangle}{\varphi_{(2)}}\right]\right\} \qquad (3.2)$$

$$h=s_{(2)}-\varepsilon\Delta s_{(2)}\langle 1\rangle-\varepsilon^2\Delta s_{(2)}\langle 2\rangle$$

В данном случае дискриминант кубического уравнения для $\tau_{(2)}$

$$\Delta=4J^{-3}(9Jh^2-2V^3)<0 \qquad (3.3)$$

поэтому существуют три различных действительных корня. Тот факт, что $\tau_{(2)}>0$, $E>0$, позволяет выделить корень, удовлетворяющий физическому смыслу

$$\tau_{(2)}=2\left(\frac{2V}{J}\right)^{1/2}\cos\frac{1}{3}(\pi+\psi),\qquad \cos\psi=\frac{6h}{J}\left(\frac{J}{2V}\right)^{3/2} \qquad (3.4)$$

Дальнейшая задача сводится к вычислению V и h в первом и втором приближениях. При этом $\Delta s\langle 2\rangle$, $\Delta\varphi\langle 2\rangle$ рассчитываются по решению (3.4) в нулевом, а $\Delta s\langle 1\rangle$, $\Delta\varphi\langle 1\rangle$ в первом приближении.

Специального рассмотрения требует случай эмиссии, близкой к ρ-режиму ($E\to 0$), так как дискриминант Δ при этом стремится к нулю, и знак неравенства в (3.3) определяется уже не нулевым, а первым приближением. Здесь решение для $\tau_{(2)}$, E следует искать в виде ряда по степеням $\mu=\varepsilon^{1/2}$. При этом удобно ввести величину j, определяющую отклонение плотности тока эмиссии от значения, задаваемого законом ${}^3/{}_2$

$$J=\frac{2}{9}\frac{[2\varphi_{(2)}]^{3/2}}{s_{(2)}^2}(1-\mu^2j),\qquad E=\frac{2\varphi_{(2)}}{s_{(2)}}\mu\mathscr{E},\qquad \tau_{(2)}=\frac{3s_{(2)}}{[2\varphi_{(2)}]^{1/2}}(1+\mu\vartheta) \quad (3.5)$$

Сохраняя члены порядка μ^3, из уравнений (2.5) получаем

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{6} J\tau_{(2)}{}^3 + \frac{1}{2}\mu E\tau_{(2)}{}^2 + \frac{1}{30}\mu^2 J^2\left(-\frac{5}{24}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{1}{6}T\right)\tau_{(2)}{}^6 + \\
+ \frac{1}{20}\mu^3 JE\left(-\frac{5}{6}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{2}{3}T\right)\tau_{(2)}{}^5 = s_{(2)} \\
\frac{1}{4} J^2\tau_{(2)}{}^4 + \mu JE\tau_{(2)}{}^3 + \mu^2\left[E^2\tau_{(2)}{}^2 + \frac{1}{30}J^3T\tau_{(2)}{}^7\right] + \frac{7}{30}\mu^3 J^2ET\tau_{(2)}{}^6 = 2\varphi_{(2)}
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

Подставляя (3.5) в (3.6), имеем

$$
\begin{gathered}
\mu(4\vartheta + 6\mathscr{E}) = -\mu^2\left[4\vartheta^2 + 12\vartheta\mathscr{E} - \frac{4}{3}j + \left(-\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{4}{15}T\right)s_{(2)}\right] - \\
- \mu^3\left[\frac{4}{3}\vartheta^3 + 6\vartheta^2\mathscr{E} - 4j\vartheta + \left(-\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{4}{15}T\right)s_{(2)}(8\vartheta + 9\mathscr{E})\right] \\
\mu(4\vartheta + 6\mathscr{E}) = -\mu^2\left[6\vartheta^2 + 18\vartheta\mathscr{E} + 9\mathscr{E}^2 - 2j + \frac{4}{5}Ts_{(2)}\right] - \\
- \mu^3\left[4\vartheta^3 + 18\vartheta^2\mathscr{E} + 18\vartheta\mathscr{E}^2 + \left(-8j + \frac{28}{5}Ts_{(2)}\right)\vartheta + \left(-6j + \frac{42}{5}Ts_{(2)}\right)\mathscr{E}\right]
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

Разрешая (3.7) относительно ϑ, $\mathscr{E}$, находим

$$
\begin{gathered}
\mu\mathscr{E} = \mu\mathscr{E}_0 + \mu^2\left[\frac{4}{27}j + \left(\frac{1}{27}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} - \frac{28}{135}T\right)s_{(2)}\right] \\
\mu\vartheta = -\frac{3}{2}\mu\mathscr{E}_0 + \mu^2\left[\frac{22}{9}j - \left(\frac{7}{18}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{46}{45}T\right)s_{(2)}\right] \\
\mathscr{E}_0 = \frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}j - \left(\frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{16}{15}T\right)s_{(2)}\right]^{1/2}
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Рассмотрим, наконец, случай эмиссии в ρ-режиме, когда решение задается формулами (2.8). Последовательно разрешая (2.8) относительно J в нулевом, первом и т. д. приближениях, получаем

$$
\begin{gathered}
J\langle 2\rangle = \frac{2}{9}\frac{[2\varphi_{(2)}]^{3/2}}{s_{(2)}{}^2}\left\{1 - \varepsilon\left(\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{4}{5}T\right)s_{(2)} + \right. \\
+ \varepsilon^2\left[-\frac{1}{3}\frac{a_2}{a_0{}^2} + \frac{13}{48}\frac{a_1{}^2}{a_0{}^3} + \frac{1}{5}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}T - \frac{1}{50}(\varkappa_1{}^2 + \varkappa_2{}^2) + \frac{163}{300}\varkappa_1\varkappa_2 + \frac{1}{3}k_1{}^2 - \right. \\
\left.\left. - \frac{4}{15}\frac{s''_{(2)P}}{s_{(2)}} + \frac{47}{75}\frac{s'^2_{(2)P}}{s_{(2)}{}^2} + \left(k_1 + \frac{4}{15}k_2\right)\frac{s'_{(2)P}}{s_{(2)}}\right]s_{(2)}{}^2\right\}
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

Выражение для J приобретает более компактный вид, если уравнение коллектора задавать, отсчитывая расстояние от $q^1 = 0$ по длине дуги S криволинейной оси $q^1 : S_{(2)} = S_{(2)}(q^2, q^3)$. Тогда для $J\langle 3\rangle$ имеем

$$
\begin{gathered}
J\langle 3\rangle = \frac{2}{9}\frac{[2\varphi_{(2)}]^{3/2}}{S_{(2)}{}^2}\left\{1 - \frac{4}{5}\varepsilon TS_{(2)} + \varepsilon^2\left[-\frac{1}{50}(\varkappa_1{}^2 + \varkappa_2{}^2) + \frac{163}{300}\varkappa_1\varkappa_2 + \right.\right. \\
\left. + \frac{1}{3}k_1{}^2 - \frac{4}{15}\frac{S''_{(2)P}}{S_{(2)}} + \frac{47}{75}\frac{S'^2_{(2)P}}{S_{(2)}{}^2} + \left(k_1 + \frac{4}{15}k_2\right)\frac{S'_{(2)P}}{S_{(2)}}\right]S_{(2)}{}^2 + \\
+ \varepsilon^3\left[-\frac{167}{3300}T_P'' + k_1\left(\frac{2}{33}\varkappa'_{1P} + \frac{5}{22}\varkappa'_{2P}\right) + \frac{167}{3300}k_2T_P' + \frac{2}{33}\varkappa_1k'_{1P} + \right.
\end{gathered}
$$

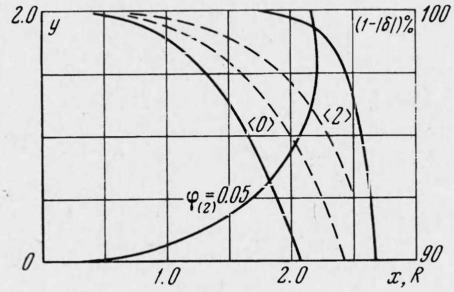
$$+\frac{1}{4}k_1k_{1S}' - \frac{49}{2750}(\varkappa_1{}^3+\varkappa_2{}^3) - \frac{1}{500}\varkappa_1\varkappa_2T - \left(\frac{43}{660}\varkappa_1+\frac{2}{15}\varkappa_2\right)k_1{}^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{6}\varkappa_1-\frac{5}{22}\varkappa_2\right)k_1k_2 - \left(\frac{124}{825}\varkappa_1+\frac{134}{825}\varkappa_2\right)\frac{S_{(2)P}''}{S_{(2)}} +$$

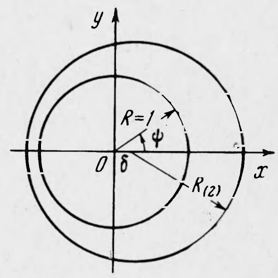
$$+\left(\frac{511}{1375}\varkappa_1+\frac{561}{1375}\varkappa_2\right)\frac{S_{(2)P}'^2}{S_{(2)}{}^2} + \left(-\frac{269}{1375}\varkappa_{1P}'+\frac{268}{1375}\varkappa_{2P}'+\frac{1}{3}k_{1S}' +\right.$$

$$\left.+\frac{67}{165}\varkappa_1k_1-\frac{2}{5}\varkappa_2k_1+\frac{124}{825}\varkappa_1k_2+\frac{134}{825}\varkappa_2k_2\right)\frac{S_{(2)P}'}{S_{(2)}}\Bigg]S_{(2)}{}^3\Bigg\} \qquad (3.10)$$

Видно, что в первом и во втором приближениях отдельные участки эмиттера работают независимо один от другого; $J\langle 1\rangle$ при этом зависит



Фиг. 1



Фиг. 2

только от полной кривизны T и расстояния до коллектора вдоль q^1; при учете членов порядка ε^2 дифференциальной окрестности второго порядка на эмиттере ставится в соответствие некоторая окрестность того же порядка на собирающей поверхности. В третьем приближении плотность тока определяется той же областью на коллекторе, но начинается взаимодействие с соседними участками эмиттирующей поверхности, учитываемое посредством производных от полной кривизны.

Для $\tau_{(2)}$ имеем

$$\tau_{(2)} = \frac{3s_{(2)}}{[2\varphi_{(2)}]^{1/2}}\left[1+\varepsilon\left(\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}+\frac{1}{5}T\right)s_{(2)}\right]$$

4. **Примеры**. Посмотрим, в каком соотношении находятся результаты, доставляемые построением разложений по ε, с точными выражениями для известного аналитического решения, описывающего течение по круговым траекториям с плоского эмиттера [1]. Для этой цели будем использовать две системы координат: полярную R, ψ и декартову x, y. В качестве коллектора возьмем эквипотенциаль из точного решения

$$\psi = {}^2/_3 \arcsin[(2\varphi_{(2)}R^2)^{3/4}] \qquad (4.1)$$

и сравним плотность тока, вычисляемую по формуле (3.10)

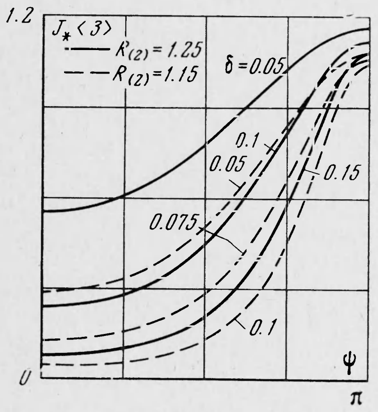
$$J\langle 2\rangle = \frac{2}{9}[2\varphi_{(2)}]^{3/2}\left[\frac{1}{S^2}+\left(-\frac{1}{25}\frac{1}{R^2}-\frac{7}{25}\frac{\psi'}{S}-\frac{4}{15}\frac{\psi''}{\psi}+\frac{47}{75}\frac{\psi'^2}{\psi^2}\right)\right], \quad S = R\psi$$

$$J\langle 2\rangle = \frac{2}{9}[2\varphi_{(2)}]^{3/2}\left[\frac{1}{y^2}\mp\left(-\frac{4}{15}\frac{y''}{y}+\frac{47}{75}\frac{y'^2}{y^2}\right)\right] \qquad (4.2)$$

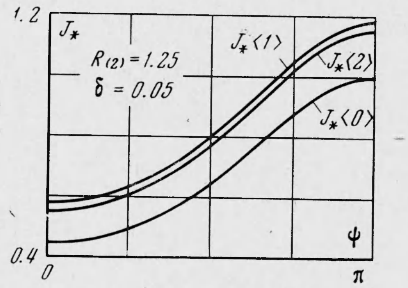
с точным выражением $J_{ex} = {}^1/_2R^{-5}$. Легко видеть, что область рассмотрения в координатах R, ψ ограничена сверху углом в 60° ($\psi' = \infty$), а в декартовых координатах — углом в 36°($y' = \infty$). На фиг. 1 изображен коллектор с потенциалом $\varphi_2 = 0.05$ и приведены кривые относительной ошибки $\delta = (J_{ex} - J) / J_{ex}$ в нулевом и втором приближениях, вычисленной в соответствии с (4.2) (сплошные кривые) и (4.3) (пунктир). В координатах R, ψ течение рассчитывается с ошибкой менее 1% в области $\varphi = 0$, $\varphi = 0.05$, $R = 2.27$; в координатах x,y — в области $\varphi = 0$, $\varphi = 0.05$, $x = 1.47$. Таким образом, переход к системе, связанной с траекторией, в этом случае заметно расширяет область рассмотрения.

Можно ожидать, что это утверждение справедливо в общем случае и представить себе итеративный процесс оптимизации системы координат, целью которого является повышение точности приведенных в п. 2, 3 выражений.

В качестве примера была рассмотрена задача об определении плотности тока эмиссии в ρ-режиме при течении между двумя круговыми цилиндрическими электродами, оси которых не совпадают (фиг. 2). При этом использовалась полярная система координат, связанная с эмиттером $R = 1$. На фиг. 3 приведены зависимости $J_*\langle 3\rangle$ в функции



Фиг. 3



Фиг. 4

полярного угла ψ для двух коллекторов ($R_{(2)} = 1.25$ — сплошные линии, $R_2 = 1.15$ — пунктир) и ряда значений расстояния между центрами δ. Под J_* понимается плотность тока, отнесенная к лэнгмюровской плотности для плоского диода, вычисленной по минимальному расстоянию между цилиндрическими электродами

$$J_* = \frac{J}{J_L}, \qquad J_L = \frac{2}{9}\,\frac{[2\varphi_{(2)}]^{3/2}}{[R_{(2)} - \delta - 1]^2}$$

Фиг. 4 иллюстрирует результаты расчета J_* в нулевом, первом и втором приближениях для $R_{(2)} = 1.25$ и $\delta = 0.05$. Кривые $J_*\langle 2\rangle$ и $J_*\langle 3\rangle$ в выбранном масштабе не отличимы одна от другой (максимальное расстояние по ординате 0.0057).

Поступила 30 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Meltzer B. Single-component stationary electron flow under space-charge conditions. J. Electr., 1956, vol. 2, No 2.
2. Кузнецов Ю. Е., Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности. ПМТФ, 1966, № 2.