УДК 532.592

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ СОПРЯЖЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Н. И. Макаренко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается задача о слабостратифицированных течениях, сопряженных с равномерным потоком, имеющим заданное распределение плотности по глубине. Для гладкого фонового профиля плотности общего вида получено достаточное условие существования и единственности сопряженного течения. Показано, что при нарушении найденного условия количество ветвей сопряженных течений и их асимптотика вблизи точки бифуркации определяются тонкой структурой стратификации.

Ключевые слова: стратификация, сопряженные течения.

Введение. Два установившихся горизонтальных течения неоднородной жидкости называются сопряженными, если они согласованы друг с другом в смысле законов сохранения [1]. Течения подобного рода с одинаковыми потоками массы, импульса и энергии реализуются в волновых конфигурациях типа плавного бора, а также в уединенных внутренних волнах с уплощенными вершинами типа плато. Отыскание пар сопряженных движений сводится к одномерной по пространственным переменным бифуркационной задаче, решения которой ответвляются в собственных значениях линеаризованной задачи, соответствующих счетному семейству мод внутренних волн на основном течении. Под неединственностью понимается ситуация, когда фиксированная мода порождает более одной ветви сопряженных течений. Такая неединственность, приводящая к интересным бифуркациям волновых структур, отмечалась рядом авторов (см., например, [2–4]) в численных расчетах для непрерывной стратификации с двумя пикноклинами и ее упрощенной трехслойной модели. Аналитически факт неединственности сопряженных течений был установлен в [5] для стратификации, близкой к линейной. В настоящей работе делается попытка охарактеризовать условия на профиль плотности основного течения, от которых зависят свойства единственности и неединственности.

1. Постановка задачи. Уравнения установившихся движений неоднородной жидкости имеют вид

$$\begin{gathered}\rho(UU_x+VU_y)+p_x=0, \qquad \rho(UV_x+VV_y)+p_y=-\rho g,\\ U_x+V_y=0, \qquad U\rho_x+V\rho_y=0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где ρ — плотность жидкости; U и V — компоненты вектора скорости; p — давление; g — ускорение силы тяжести. Мы рассматриваем движения в слое $-\infty<x<+\infty$, $0<y<h$ между ровным дном $y=0$ и жесткой крышкой $y=h$. Сохранение плотности вдоль линий тока влечет функциональную зависимость плотности $\rho=\rho(\psi)$ от функции тока ψ,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00829) в рамках Интеграционного проекта № 131 СО РАН и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ 440.2003.1).

определяемой соотношениями $U = \psi_y$, $V = -\psi_x$. С учетом этой зависимости исключение давления в силу интеграла Бернулли

$$\rho|\nabla\psi|^2/2 + \rho g y + p = H(\psi)$$

сводит систему (1.1) к дифференциальному уравнению второго порядка — квазилинейному эллиптическому уравнению Дюбрей-Жакотэн — Лонга

$$\rho'(\psi)\,\Delta\psi + \rho(\psi)(gy + |\nabla\psi|^2/2) = H'(\psi),$$

где функция $H(\psi)$ определяется параметрами основного потока. Задача о течениях, сопряженных с равномерным потоком $\psi = cy$, имеющим закон плотности $\rho = \rho_\infty(y)$ и соответствующее ему гидростатическое давление $p = p_\infty(y)$, формулируется как нелинейная задача на собственные значения для одномерного оператора Дюбрей-Жакотэн — Лонга:

$$\rho(\psi)\psi_{yy} + \rho'(\psi)(gy - g\psi/c + (\psi_y^2 - c^2)/2) = 0; \qquad (1.2)$$

$$\psi = 0 \quad (y = 0), \qquad \psi = ch \quad (y = h), \qquad (1.3)$$

где $\rho(\psi) = \rho_\infty(\psi/c)$. Скорость $c > 0$ основного течения здесь является спектральным параметром. Будем отыскивать течения, в которых отсутствует обратный ток жидкости, т. е. $\psi_y > 0$ при $0 < y < h$. Задание ρ и H как функций ψ, учтенное в структуре уравнения (1.2), автоматически влечет сохранение массы и энергии в искомых течениях. В отличие от этого закон сохранения полного горизонтального импульса

$$\int\limits_0^h (p + \rho\,\psi_y^2)\,dy = \int\limits_0^h (p_\infty + \rho_\infty c^2)\,dy$$

представляет собой дополнительное условие, которое следует рассматривать вместе с уравнениями (1.2), (1.3).

Выберем величины h/π, ch/π, $\rho_\infty(0)$ в качестве масштабов для y, ψ и ρ соответственно. Движение описывается двумя безразмерными константами — параметром Буссинеска σ и параметром λ, представляющим собой квадрат обратного денсиметрического числа Фруда:

$$\sigma = \frac{N_0^2 h}{\pi g}, \qquad \lambda = \frac{\sigma g h}{\pi c^2},$$

где N_0 — характерная частота плавучести N в основном течении; $N^2(y) = -g\rho_\infty'(y)/\rho_\infty(y)$. В безразмерных переменных уравнения (1.2), (1.3) для возмущения функции тока равномерного течения $v = \psi(y) - y$ принимают вид

$$F(v;\sigma,\lambda) \equiv (\rho v_y)_y - \rho_\psi(\sigma^{-1}\lambda v + v_y^2/2) = 0, \qquad v(0) = v(\pi) = 0, \qquad (1.4)$$

где $\rho = \rho(y + v, \sigma)$. Рассматриваемая задача допускает вариационную формулировку, согласно которой интеграл потока импульса после исключения давления может быть представлен в виде

$$\int\limits_0^\pi L\,dy = 0, \qquad (1.5)$$

где $L(v;\sigma,\lambda)$ — лагранжиан оператора $F = \delta L/\delta v$,

$$L = -\frac{1}{2}\,\rho(y+v,\sigma)v_y^2 + \sigma^{-1}\lambda \int\limits_y^{y+v} (\rho(\psi,\sigma) - \rho(y+v,\sigma))\,d\psi.$$

Другими словами, сопряженные течения с условием сохранения массы, энергии и полного горизонтального импульса являются критическими точками функционала (1.5) на его поверхности нулевого уровня.

В случае слабой стратификации параметр Буссинеска является естественным малым параметром в задаче (1.4), (1.5). Согласно известным представлениям о свойствах термохалинной стратификации морской воды [6] распределение плотности можно описать уравнением

$$\rho(\psi,\sigma) = 1 - \sigma\rho_*(\psi) - \sigma^2\rho_1(\psi,\sigma),$$

где коэффициент ρ_* задает фоновый профиль, а функция ρ_1 определяет тонкую структуру поля плотности. Стратификация предполагается устойчивой, так что функции $\rho_* \in C^4[0,\pi]$, $\rho_1 \in C^4([0,\pi]\times[0,\sigma_0])$ удовлетворяют неравенствам $\rho > 0$, $\rho_{*\psi} > 0$, $\rho_\psi < 0$ при $\psi \in [0,\pi]$, $\sigma \in [0,\sigma_0]$ с некоторым $\sigma_0 > 0$.

В натурных условиях наблюдается сравнительно небольшое количество типов функциональных зависимостей, характерных для среднего профиля плотности ρ_*. К ним относятся, в частности, линейная и экспоненциальная зависимости плотности от глубины, стратификация с одним или несколькими пикноклинами, а также комбинации указанных профилей. Напротив, тонкая структура стратификации существенно более многообразна и изменчива под воздействием таких факторов, как суточный прогрев и охлаждение воды, диффузия соли, опрокидывание внутренних волн и т. п. Тем не менее характерное время ее эволюции заметно превосходит временны́е периоды внутренних волн, и поэтому при моделировании волновых процессов она тоже может задаваться стационарной зависимостью ρ_1, для которой существуют достаточно надежные методы зондирования.

2. Достаточное условие существования и единственности. Исследование разрешимости задачи (1.4), (1.5) основывается на ее сведении к эквивалентной системе из двух неявно заданных скалярных уравнений для трех параметров — амплитуды, числа Фруда и параметра Буссинеска. При построении уравнений разветвления используются функциональные пространства

$$X = \{v \in C^2[0,\pi]\colon v(0) = v(\pi) = 0\}, \qquad Y = C[0,\pi].$$

Пусть $B_r = \{v \in X\colon \|v\|_X < r\}$ — шар радиуса $r > 0$ в пространстве X. Заметим, что для всех $v \in B_r$ с достаточно малым r функция тока $\psi = y + v(y)$ принимает значения в области определения $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$ плотности ρ. Следовательно, отображение $F\colon B_r \times [0,\sigma_0] \times \mathbb{R} \to Y$ корректно определено и является гладким. Задача Штурма — Лиувилля

$$F'_v(0;0,\lambda)\varphi \equiv \varphi_{yy} + \lambda\rho'_*(y)\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \tag{2.1}$$

задает в приближении Буссинеска $\sigma = 0$ спектр нормальных мод равномерного течения $\psi = y$, состоящий из простых собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, причем $\lambda_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Пусть $\varphi_n \in X$ — собственные функции, ортонормированные в $L_2[0,\pi]$, и пусть $Q_n v = \varphi_n(v,\varphi_n)_{L_2[0,\pi]}$ — проектор на соответствующее одномерное подпространство. Ответвление малых решений задачи (1.4) от нулевого решения может происходить только в собственных значениях λ_n. Согласно методу Ляпунова — Шмидта уравнение для функции v

$$B_n v = R(v;\sigma,\lambda)$$

с фредгольмовым оператором $B_n = F'_v(0;0,\lambda_n)$, имеющим одномерное ядро в X и одномерное коядро в Y, и малым оператором R, для которого $R(0;0,\lambda_n) = 0$, $R'_v(0;0,\lambda_n) = 0$, эквивалентно скалярному уравнению разветвления

$$f(b,\sigma,\lambda) \equiv \int\limits_0^\pi \varphi_n(y)F(b\varphi_n(y) + w_n(y;b,\sigma,\lambda);\sigma,\lambda)\,dy = 0. \tag{2.2}$$

Участвующее здесь гладкое класса C^2 отображение $(b,\sigma,\lambda) \to w_n(y;b,\sigma,\lambda) \in (I-Q_n)X$ однозначно определяется согласно теореме о неявных отображениях как решение операторного уравнения

$$B_n w = (I-Q_n)R(b\varphi_n + w; \sigma, \lambda).$$

С указанным отображением w_n соотношение (1.5) дает еще одно скалярное уравнение для параметров b, σ и λ

$$l(b,\sigma,\lambda) \equiv \int\limits_0^\pi L(b\varphi_n(y) + w_n(y;b,\sigma,\lambda);\sigma,\lambda))\,dy = 0. \tag{2.3}$$

Итак, отыскание сопряженных течений n-й моды, близких к равномерному потоку, равносильно поиску решений (b,σ,λ) системы уравнений (2.2), (2.3) в малой окрестности точки $(0,0,\lambda_n)$.

Вычислим коэффициенты системы уравнений разветвления в главном порядке. Для отделения ветви тривиальных решений предварительно заметим, что элемент w_n, ортогональный собственной функции φ_n, допускает оценки

$$\|w_n(\,\cdot\,;b,\sigma,\lambda)\|_X \leqslant C|b|, \qquad \|w_n(\,\cdot\,;b,0,\lambda)\|_X \leqslant Cb^2,$$

которые являются равномерными относительно σ и λ вблизи критической точки $(\sigma,\lambda) = (0,\lambda_n)$. Эти неравенства следуют непосредственно из структуры оператора R. Согласно данному замечанию зависимость функций f и l от амплитудного параметра b наследует асимптотические порядки оператора F и лагранжиана L при малых v, допуская представление в виде

$$f(b,\sigma,\lambda) = bf_1(b,\sigma,\lambda), \qquad l(b,\sigma,\lambda) = b^2 l_1(b,\sigma,\lambda)$$

с гладкими функциями f_1 и l_1. Отделяя ветвь решений $b=0$, соответствующую равномерному потоку, представим систему (2.2), (2.3) в виде

$$A_n\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a};\sigma), \qquad \boldsymbol{a} = (b, \lambda-\lambda_n),$$

где

$$A_n = \frac{\partial(f_1,l_1)}{\partial(b,\lambda)}\Big|_{b=0,\,\sigma=0,\,\lambda=\lambda_n},$$

а нелинейная правая часть $\boldsymbol{f}$ такова, что $\boldsymbol{f}(0;0)=0$. Найдем коэффициенты матрицы A_n. Для оператора $F(v;0,\lambda_n) = v_{yy} + \lambda_n\rho_*'(y+v)v$ имеем

$$\lim_{b\to 0} b^{-2}F(b\varphi_n + w_n(\cdot\,;b,0,\lambda_n);0,\lambda_n) = \psi_{nyy} + \lambda_n\rho_*'(y)\psi_n + \lambda_n\rho_*''(y)\varphi_n^2,$$

где обозначено $\psi_n(y) = (1/2)w_{nbb}(y;0,0,\lambda_n)$. Так как элемент $B_n\psi_n = \psi_{nyy} + \lambda_n\rho_*'(y)\psi_n$ ортогонален в $L_2[0,\pi]$ собственной функции φ_n, то

$$f_{1b}(0,0,\lambda_n) = \lambda_n \int\limits_0^\pi \rho_*''(y)\varphi_n^3(y)\,dy.$$

Далее, поскольку оператор $F(v;\sigma,\lambda)$ линейно зависит от λ и $F_\lambda(v;0,\lambda) = \rho_*'(y+v)v$, находим

$$f_{1\lambda}(0,0,\lambda_n) = \int\limits_0^\pi \rho_*'(y)\varphi_n^2(y)\,dy.$$

Для вычисления производной $l_{1\lambda}$ достаточно воспользоваться выражением

$$L_\lambda(v;0,\lambda) = \int\limits_y^{y+v} \bigl(\rho_*(y+v,\sigma) - \rho_*(\psi,\sigma)\bigr)\,d\psi,$$

из которого в силу вариационного свойства исходной задачи следует соотношение $l_{1\lambda}(0,0,\lambda_n) = (1/2) f_{1\lambda}(0,0,\lambda_n)$. Аналогично находим коэффициент $l_{1b}(0,0,\lambda_n) = (1/3) f_{1b}(0,0,\lambda_n)$. Таким образом, матрица A_n имеет определитель

$$\det A_n = \frac{1}{6}\,\lambda_n \int\limits_0^\pi \rho'_*(y)\varphi_n^2(y)\,dy \times \int\limits_0^\pi \rho''_*(y)\varphi_n^3(y)\,dy.$$

Отсюда в силу теоремы о неявных отображениях вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\det A_n \ne 0$, *то для моды с номером* n *существует единственная ветвь сопряженных течений, близких к основному течению:*

$$\psi(y;\sigma) = y + b(\sigma)\,\varphi_n(y) + O(b^2), \quad b(\sigma) \to 0, \quad \lambda(\sigma) \to \lambda_n \qquad (\sigma \to 0).$$

Для распределений плотности, удовлетворяющих условию данной теоремы, тонкая структура стратификации не играет роли в определении количества семейств малых решений задачи (1.4), (1.5). Такие профили подобны двухслойной стратификации с постоянными плотностями жидкости в слоях, для которой существует только одна ветвь кусочно-постоянных течений, сопряженных с равномерным потоком. В частности, согласно теореме 1 локальная единственность всегда имеет место для сопряженных течений главной моды в случае выпуклого профиля ρ^*, поскольку собственная функция $\varphi_1(y)$ не имеет нулей в точках промежутка $y \in [0,\pi]$, отличных от концевых точек.

3. Пример неединственности. Условие теоремы 1 заведомо не выполнено для закона плотности, в котором функция ρ_* линейна. Этот интересный случай включает как собственно линейную стратификацию с $\rho_1 = 0$, так и экспоненциальную стратификацию $\rho = \exp(-\sigma y)$ с малым σ. В рассматриваемом случае предельная задача (1.4) с $\sigma = 0$ оказывается линейной, причем ее собственные функции и собственные значения находятся в явном виде:

$$\varphi_n(y) = \sqrt{2/\pi}\,\sin ny, \qquad \lambda_n = n^2.$$

Это позволяет рассматривать сопряженные течения большой амплитуды с локальными параметрами, сильно отличающимися от локальных характеристик основного течения. Единственным ограничением здесь остается требование отсутствия возвратных течений, которое выполняется при условии на амплитуду $|b| < 1/n$ для моды с номером n. В рассматриваемом случае систему уравнений разветвления удобно представить в несколько иной форме, выделив в ней после отделения ветви тривиальных решений линейную часть относительно параметра Буссинеска σ и числа λ:

$$W_n(b)\boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{a};b), \qquad \boldsymbol{a} = (\sigma, \lambda - \lambda_n).$$

Решающим оказывается тот факт, что матрица W_n в силу вариационного свойства исходной задачи имеет структуру матрицы Вронского

$$W_n(b) = \begin{pmatrix} s_n(b) & m_n(b) \\ s'_n(b) & m'_n(b) \end{pmatrix},$$

где коэффициент $m_n(b) = b^2/2$ одинаков для всех мод, а зависимость коэффициента $s_n(b)$ от амплитуды b определяется только функцией ρ_1, задающей тонкую структуру стратификации:

$$s_n(b) = \frac{2n^2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_y^{y+b\sin ny} \big(\rho_1(y + b\sin ny, 0) - \rho_1(\psi, 0)\big)\, d\psi\, dy + \frac{(\pi n b)^2}{4} + \frac{n}{6}\,(1 - (-1)^n) b^3.$$

В [5] получено достаточное условие существования сопряженных течений, которое, как и теорема 1, формулируется в терминах определителя матрицы линейной части системы уравнений разветвления. А именно: пусть $b_0 \neq 0$ — простой корень функции $\det W_n(b)$ в интервале $(-1/n, 1/n)$, тогда для данного b_0 существует единственная ветвь сопряженных течений, для которой $(v(y;\sigma), \lambda(\sigma)) \to (b_0 \sin ny, n^2)$ при $\sigma \to 0$, причем справедлива асимптотика

$$\lambda(\sigma) = n^2 - 2s_n(b_0)\sigma/b_0^2 + O(\sigma^2). \tag{3.1}$$

На основе указанного условия здесь приводится формулировка, дающая простую аналитическую интерпретацию свойства неединственности и одновременно позволяющая классифицировать до- и сверхкритические сопряженные течения.

Теорема 2. *Пусть $b_0 \in (-1, 1)$, $b_0 \neq 0$ — точка локального экстремума функции $\Lambda_1(b) = -2s_1(b)/b^2$, причем $\Lambda_1''(b_0) \neq 0$. Тогда этой точке соответствует сопряженное течение главной моды, которое является сверхкритическим при $\Lambda_1(b_0) < \Lambda_1(0)$ и докритическим при $\Lambda_1(b_0) > \Lambda_1(0)$.*

В самом деле, существование соответствующей ветви непосредственно следует из упомянутого выше достаточного условия, поскольку указанные в теореме точки экстремума являются простыми нулями для функции $\det W_1(b) = (1/4)b^4\Lambda_1'(b)$. Согласно определению денсиметрического числа Фруда сопряженное течение сверхкритично, если $\lambda(\sigma) < \lambda_c(\sigma)$, и докритично при $\lambda(\sigma) > \lambda_c(\sigma)$, где критическое значение $\lambda_c(\sigma)$ — наименьшее собственное значение задачи Штурма — Лиувилля

$$(\rho(y,\sigma)\varphi_y)_y - \lambda\sigma^{-1}\rho_y(y,\sigma)\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0,$$

дающей длинноволновый спектр нормальных мод равномерного потока. Как уже отмечалось, в приближении Буссинеска $\sigma = 0$ эта задача имеет вид (2.1). Поэтому для стратификации, близкой к линейной, первое собственное значение при малых σ имеет асимптотику $\lambda_1(\sigma) = 1 + \Lambda_1(0)\,\sigma + O(\sigma^2)$. Сравнение с асимптотикой ветви сопряженных течений (3.1) дает утверждение теоремы 2.

В размерных переменных формула (3.1) устанавливает функциональную связь между скоростью основного течения, характерным градиентом плотности жидкости и амплитудой сопряженного течения. При этом зависимость скорости от амплитуды определяется введенной выше функцией $\Lambda_n(b) = -2s_n(b)/b^2$. Согласно теореме 2 неединственность сопряженных течений фиксированной моды имеет место в случае немонотонной зависимости указанной функции от амплитудного параметра.

Интересно отметить, что экспоненциальная и линейная стратификации сами по себе не дают примеров неединственности (ненулевые точки экстремума функции Λ_n в этом случае отсутствуют), однако возмущения плотности порядка $O(\sigma^2)$ могут порождать для них любое наперед заданное количество ветвей. Таким образом, в случае линейного фонового профиля наличие тонкой структуры стратификации играет определяющую роль при описании сопряженных течений и связанных с ними нелинейных волновых структур.

Автор выражает признательность А. Ю. Казакову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Benjamin T. B.** A unified theory of conjugate flows // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 269. P. 587–643.
2. **Lamb K. G., Wan B.** Conjugate flows and flat solitary waves for a continuously stratified fluid // Phys. Fluids. 1998. V. 10, N 8. P. 2061–2079.
3. **Lamb K. G.** Conjugate flows for a three-layer fluid // Phys. Fluids. 2000. V. 12, N 9. P. 2169–2185.
4. **Rusås P.-O., Grue J.** Solitary waves and conjugate flows in a three-layer fluid // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21, N 2. P. 185–206.
5. **Макаренко Н. И.** Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 69–78.
6. **Федоров К. Н.** Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

Поступила в редакцию 27/X 2003 г.