ПМТФ, № 4, 1967

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ ГОРЕНИЯ С УЧЕТОМ ТЕПЛООТВОДА

Э. А. Чернова

(Москва)

Делается попытка исследования числа возможных стационарных режимов горения в проточной полубесконечной трубе с учетом теплоотвода через стенки. Рассматриваются случаи, когда в реактивной смеси происходит реакция нулевого порядка или имеется подобие полей концентраций и температур. Производится осреднение уравнений по поперечной координате η. В рамках принятых приближений получается, что число стационарных режимов горения определяется корнями θ_n некоторой функции. Корням θ_{2k} отвечают лишь тривиальные неустойчивые решения. Корням θ_{2k-1} отвечают режимы, возможные в широких областях изменения параметров, характеризующих температуру подаваемой смеси, скорость подачи и теплоотвод. Указанные области пересекаются, образуя зоны, где существует сразу несколько стационарных режимов. В этих зонах, кроме монотонных решений, могут быть еще решения, делающие вначале несколько колебаний. Показано, что, по-видимому, последние будут неустойчивы и в конечном счете приведут к одному из монотонных режимов. Подробно рассматривается обычный для практики случай, когда число корней не более трех.

Если функция тепловыделения может менять знак, то подобная картина будет наблюдаться и при отсутствии теплоотвода через стенки (корни θ_{2k-1} и θ_{2k} могут поменяться ролями). При этом отпадает необходимость осреднения уравнений по η, так как производные по ней там будут отсутствовать.

Рассматривается полуограниченная цилиндрическая труба с радиусом r_0, в которую с торца с постоянной скоростью w подается реакционная смесь с температурой T_-. Уравнения стационарного горения в ней берутся в виде

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{b}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial u}{\partial \xi} + f(u) = 0$$

$$\xi = 0, \quad u = u_-; \qquad \eta = 0, \quad \partial u / \partial \eta = 0; \qquad \eta = 1, \quad u = 0 \tag{1}$$

$$u = \frac{(T - T_0)E}{RT_0^2}, \quad \xi = \frac{xF(T_0)E}{wRT_0^2}, \quad \eta = \frac{r}{r_0}, \quad f(u) = \frac{F(T)}{F(T_0)}$$

$$a = \frac{\varkappa_1 F(T_0)E}{w^2 RT_0^2}, \quad b = \frac{\varkappa_2 RT_0^2}{r_0^2 F(T_0)E}$$

Здесь T — температура; T_0 — температура на стенках; E — энергия активации; R — универсальная постоянная; x, r — продольная и радиальная координаты; $\varkappa_1$, $\varkappa_2 = \mathrm{const}$ — эффективные коэффициенты температуропроводности по этим направлениям; $F(T)\rho c \geqslant 0$ — функция тепловыделения ($\rho c = \mathrm{const}$ — удельная объемная теплоемкость смеси).

К задаче (1) сводится случай подобия между полем концентраций C и температур T, который осуществляется при $\varkappa_{1,2} = D_{1,2}$ (D — коэффициент диффузии) и подобии граничных условий для C и T, что предполагает непрерывный подвод активного вещества и частичный отвод продуктов сгорания через стенки. К задаче (1) приводит также случай реакции нулевого порядка. Последним можно воспользоваться, например, при малом убывании активного вещества в трубе достаточно большой длины, что часто имеет место в химической технологии. Пренебрежение убыванием активного вещества мажорирует функцию тепловыделения, что помогает оценить область условий, при которых не будет происходить нежелательного здесь воспламенения.

В [1–4] приводится исследование стационарных режимов горения в непроточных сосудах плоской, цилиндрической и сферической формы, описываемых в цилиндрическом случае уравнением (1) без первого и третьего членов, а в плоском — уравнением вида (2) без второго и последнего членов. Стационарное горение в проточных камерах исследовалось в основном, например, в [5–7] без учета влияния теплоотвода через стенки, хотя последний может иногда играть существенное значение. В [8] предпринята попытка изучения этого влияния. Исследовалось уравнение (1), в котором отбрасывался первый член (что справедливо при малых a), а функция $f(u)$ линеаризировалась. Такие упрощения сильно искажают качественную картину явления, в частности, не позволяют охватить возможность неединственности решения.

Исследуем уравнение (1) при помощи интегрального метода (осреднение уравнения по η). При этом $u(\xi, \eta)$ представим, например, в виде суммы степеней η не выше второй с коэффициентами, зависящими от ξ, т. е. с учетом граничных условий $u(\xi, \eta) = \theta(\xi)(1 - \eta^2)$. Подставляя выражение такого типа в уравнение (1) и интегрируя последнее по поперечному сечению трубы, получим

$$a\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \frac{d\theta}{d\xi} - \varphi(\theta) + \frac{\theta}{\delta} = 0 \tag{2}$$

$$\delta = \frac{r_0^2 F(T_0) E}{8\varkappa_2 R T_0^2}, \qquad \varphi(\theta) = 4\int_0^1 f[\theta(1-\eta^2)]\,\eta\, d\eta$$

Здесь общий вид уравнения (2) и весь дальнейший анализ не изменится, если $u(\xi, \eta)$ приблизить по η другими какими-либо функциями или вообще взять ее не зависящей от η (роль $1/\delta$ будет играть коэффициент теплоотдачи). Плоский случай также приводит к уравнению (2).

Ищем ограниченные решения уравнения (2). Это исключает неопределенность, состоящую в возможности наличия на бесконечности источников тепла. Для решений, принимающих на бесконечности значение θ_+, граничные условия можно взять в виде

$$\xi = 0, \quad \theta = \theta_-; \qquad \xi = \infty, \quad \theta = \theta_+ \tag{3}$$

Отсюда вытекает, что $d\theta/d\xi = 0$, $d^2\theta/d\xi^2 = 0$ при $\xi = \infty$ и, следовательно согласно (2), значения θ_+ должны быть корнями функции

$$\psi(\theta) = \varphi(\theta) - \theta/\delta \tag{4}$$

Если $\psi(\theta)$ не имеет корней, то стационарных режимов горения, принимающих на бесконечности определенное значение, не существует.

Пусть $\psi(\theta)$ имеет N корней $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_N$ (корни неотрицательны, так как $\psi(\theta) > 0$ при $\theta < 0$). Тогда задачу (2), (3) можно свести к следующим N задачам ($n = 1, 2, \ldots, N$):

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{1}{a} - \frac{\psi(\theta)}{ap}, \qquad \frac{d\theta}{d\xi} = p$$

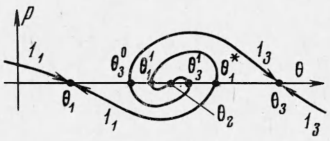
$$\xi = \infty, \quad \theta = \theta_n, \quad p = 0; \qquad \xi = 0, \quad \theta = \theta_- \tag{5}$$

На плоскости θp точки $(\theta_n, 0)$ особые и, поскольку других особенностей нет, они будут обозначаться через θ_n. Для определения вида θ_n составляется характеристическое уравнение с корнями

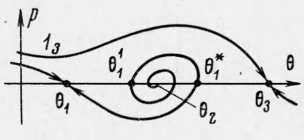
$$\mu_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \sigma_n}\right), \qquad \sigma_n = 4a\psi'(\theta_n) \tag{6}$$

Предположим сначала, что $\psi(\theta)$ непрерывна вплоть до первой отличной от нуля производной и $|\psi'(\theta)| < \infty$. Функция $\psi(\theta) > 0$ при $\theta < 0$. Поэтому $\psi(\theta) > 0$ при $\theta < \theta_1$, и, следовательно, в случае простых корней $\psi'(\theta_1) < 0$, $\psi'(\theta_2) > 0, \ldots, \psi'(\theta_{2k-1}) < 0$, $\psi'(\theta_{2k}) > 0$ и т. д. Отсюда, согласно (6), точка θ_{2k-1} ($k = 1,2,\ldots$) будет седлом, а θ_{2k} — узлом при $\sigma_{2k} \leqslant 1$ и фокусом при $\sigma_{2k} > 1$ (фиг. 1—3).

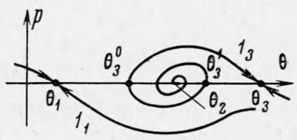
Указанное чередование сохраняется и в случае кратного корня $\theta_{n,i}$ ($\theta_n = \theta_{n+1} = \ldots = \theta_i$). Согласно аналитическим критериям, данным в [9], с учетом знака $\psi(\theta)$ левая половина θ_n точки $\theta_{n,i}$ при $n = 2k$ будет узлом (вид кривых вблизи него показан на фиг. 4), а при $n = 2k - 1$ —



Фиг. 1



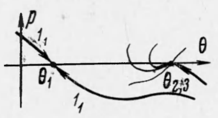
Фиг. 2



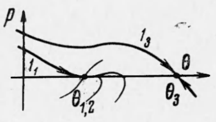
Фиг. 3

седлом (фиг. 5). Аналогично правые половины θ_i точек $\theta_{n,i}$ на фиг. 4, 5 соответствуют случаям $i = 2j - 1$ (седло) и $i = 2j$ (узел). Если вид обеих половин точки $\theta_{n,i}$ одинаков (корень нечетной кратности), то ее можно обозначать через θ_n.

Наклоны λ_1, λ_2 кривых, проходящих через седло и узел, а также вид кривых в полярных координатах вблизи фокуса (B — произвольная постоянная) будут



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\lambda_{1,2}(\theta_n) = \mu_{1,2}(\theta_n)\, a^{-1}$$

$$\rho = B \exp\left[-(\sigma_n - 1)^{-1/2}\omega\right] \qquad (7)$$

Если положить, что движение по кривым в плоскости θp происходит в сторону увеличения ξ ($d\theta / p = d\xi > 0$), то всякая кривая, идущая от прямой $\theta = \theta_-$ и входящая в точку θ_n, обеспечит решение задачи (5), и обратно. Действительно, если взять криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(\theta_-,\,\theta)} \frac{d\theta}{p} = \xi(\theta)$$

по такой кривой, то $\xi(\theta_-) = 0$, $\xi(\theta_n) = \infty$ (в точке θ_n интеграл расходится), и $\xi(\theta)$, монотонно возрастая вдоль указанной кривой, определит искомую функцию $\theta(\xi)$ единственным образом. Обратное очевидно.

В верхней полуплоскости, где $p > 0$, движение по кривым происходит слева направо, в нижней — наоборот. Поэтому у точек θ_{2k} (фиг. 1—3) кривые расходятся, и решений с $\theta_+ = \theta_{2k}$ не существует (за исключением тривиального решения $\theta \equiv \theta_{2k}$ при $\theta_- = \theta_{2k}$, которое можно считать неустойчивым).

В точку $\theta_{2k-1,2j}$ (фиг. 5) слева, в $\theta_{2s,\,2k-1}$ (фиг. 4) справа, а в θ_{2k-1} (фиг. 1—5) с обеих сторон входит кривая I_{2k-1} с наклоном $\lambda_2(\theta_{2k-1}) \leqslant 0$. Остается установить, для каких значений θ_- эти кривые дают решение.

Пусть $\psi(\theta)$ имеет корни $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Из (5) с учетом знака $\psi(\theta)$ следует

$$\left|\frac{dp}{d\theta}\right|_{p\neq 0} < \infty, \qquad \left(\frac{dp}{d\theta}\right)_{p=\pm 0} = \begin{cases} \mp\infty & (\theta < \theta_1,\ \theta_2 < \theta < \theta_3) \\ \pm\infty & (\theta_1 < \theta < \theta_2,\ \theta > \theta_3) \end{cases} \qquad (8)$$

Если от точки θ_1 идти по кривой I_1 против движения, то, согласно (8), левая ее ветвь не может повернуть назад, пересечь ось θ или иметь вертикальную асимптоту, а идет все время влево (фиг. 1—3), обеспечивая решение с $\theta_+ = \theta_1$ (первый режим) для всех $\theta_- \leqslant \theta_1$ (физический смысл имеют только $\theta_- > -E / R T_0$). Правая же ее ветвь, идя вправо, либо пересечет ось θ в точке $\theta_1{}^* \in [\theta_2, \theta_3]$ (фиг. 1, 2), либо будет идти дальше (фиг. 3) до бесконечности ($\theta_1^* = \infty$). Если $\theta_1^* = \theta_2$ или $\theta_1^* = \theta_3$, то можно идти только до точки θ_1^*, так как вход (выход) в θ_n соответствует бесконечным изменениям ξ.

Если $\theta_2 < \theta_1^* < \theta_3$, то из θ_1^* кривая I_1, согласно (8), пойдет влево в верхнюю полуплоскость, дойдет до прямой $\theta = \theta_2$ и пересечет ось θ в точке $\theta_1 < \theta_1^1 \leqslant \theta_2$, так как, согласно (5) — (7),

$$(dp / d\theta)_{p>0} = -(dp / d\theta)_{p<0} + 2 / a \tag{9}$$

В θ_1^1 кривая I_1 снова поворачивает и идет в нижней полуплоскости вправо, пересекая ось θ при $\theta_2 \leqslant \theta < \theta_1^*$ и т. д. В результате она будет входить в точку θ_2, делая при $\sigma_2 > 1$ бесконечное число витков (фиг. 2), а при $\sigma_2 \leqslant 1$ — конечное (фиг. 1). Таким образом, правая ветвь кривой I_1 даст решение с $\theta_+ = \theta_1$ для $\theta_1 \leqslant \theta_- \leqslant \theta_1^*$ (при $\theta_1^* = \theta_2$ или $\theta_1^* = \theta_3$ для $\theta_1 \leqslant \theta_- < \theta_1^*$), причем при $\theta_1^1 \leqslant \theta_- \leqslant \theta_1^*$, $\theta_2 < \theta_1^* < \theta_3$ к монотонному решению добавляются решения (при $\theta_+ = \theta_2$, $\sigma_2 > 1$ их бесконечно много), делающие вначале конечное число колебаний около θ_2.

Аналогично кривая I_3 дает решение с $\theta_+ = \theta_3$ (третий режим) для $\theta_- \geqslant \theta_3^0$ (при $\theta_3^0 = \theta_2$ или $\theta_3^0 = \theta_1$ для $\theta_- > \theta_3^0$), где $\theta_3^0 \in [\theta_1, \theta_2]$ (фиг. 1, 3) или $\theta_3^0 = -\infty$ (фиг. 2). При $\theta_3^0 \leqslant \theta_- \leqslant \theta_3^1$, $\theta_1 > \theta_3^0 < \theta_2$ будут решения, колеблющиеся некоторое время у θ_2.

Анализ показывает, что при $\theta_- < \theta_3^0$ может осуществляться только первый режим ($\theta_+ = \theta_1$), при $\theta_1 > \theta_1^*$ — только третий ($\theta_+ = \theta_3$). При $\theta_- \in [\theta_3^0, \theta_1^*]$ возможны оба эти режима, причем, наряду с монотонными, здесь могут быть решения, колеблющиеся вначале около θ_2, а при $\theta_- = \theta_2$ имеется еще неустойчивый второй режим ($\theta \equiv \theta_2$). Точка θ_1^*, лежащая либо на отрезке $[\theta_2, \theta_3]$, либо уходящая в бесконечность, будет максимальной температурой, до которой можно нагревать подаваемую смесь, чтобы осуществлялся первый режим, представляющий собой обычно медленное беспламенное горение. При увеличении θ_- будет возможен уже только третий, высокотемпературный, режим. Поэтому θ_1^* можно назвать температурой зажигания, а θ_3°, аналогично,— температурой гашения ($\theta_1 \leqslant \theta_3^0 \leqslant \theta_2$, либо $\theta_3^0 = -\infty$).

Оценим значения θ_1^*, θ_3^0. Согласно (5) — (7),

$$\left(\frac{dp}{d\theta}\right)_{p<0} > \frac{1}{a} + \frac{m}{ap}, \quad \left(\frac{dp}{d\theta}\right)_{p>0} > \frac{1}{a}, \quad m = -\min\psi(\theta) \quad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$$

$$\left(\frac{dp}{d\theta}\right)_{p<0} > \frac{1}{a}, \quad \left(\frac{dp}{d\theta}\right)_{p>0} > \frac{1}{a} - \frac{M}{ap}, \quad M = \max\psi(\theta) \quad (\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_3)$$

Соответствующая интеграция этих неравенств дает следующие оценки, справедливые на отрезке $[\theta_1, \theta_3]$

$$\frac{\theta_1^* - \theta_2}{am} - \ln\left[1 - \frac{\theta_1^* - \theta_2}{am}\right] < \frac{\theta_2 - \theta_1}{am}$$

$$\frac{\theta_2 - \theta_3^\circ}{aM} - \ln\left[1 - \frac{\theta_2 - \theta_3^\circ}{aM}\right] < \frac{\theta_3 - \theta_2}{aM} \tag{10}$$

Из неравенства $dp / d\theta > -\psi(\theta) / ap$ следует, что $\theta_1^* < \Theta_1^*$, а $\theta_3^0 > \Theta_3^0$, где Θ_1^* и Θ_3^0 — корни функций

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \psi(\theta)\, d\theta, \qquad \int_{\theta}^{\theta_3} \psi(\theta)\, d\theta$$

соседние с θ_1 и θ_3 соответственно. Отсюда и из (10) следует

$$0 \leqslant \theta_1^* - \theta_2 \leqslant \min\left[\Theta_1^* - \theta_2,\ am,\ \sqrt{2am(\theta_2 - \theta_1)}\right]$$

$$0 \leqslant \theta_2 - \theta_3^\circ \leqslant \min\left[\theta_2 - \Theta_3^\circ,\ aM,\ \sqrt{2aM(\theta_3 - \theta_2)}\right] \tag{11}$$

Последние две оценки в квадратных скобках пригодны, пока они не превышают соответственно $\theta_3 - \theta_2$ и $\theta_2 - \theta_1$. Если $Q = 0$, где

$$Q = \int_{\theta_1}^{\theta_3} \psi(\theta)\, d\theta$$

то $\Theta_1^* = \theta_3$, $\Theta_3^0 = \theta_1$, и, следовательно, $\theta_1^* < \theta_3$, $\theta_3^0 > \theta_1$; если $Q > 0$, то, принимая во внимание знаки функции ψ под интегралом, получим $\Theta_1^* < \theta_3$, $\Theta_3^0 = -\infty$, т. е. $\theta_1^* < \theta_3$; если $Q < 0$, то $\Theta_3^0 > \theta_1$, $\Theta_1^* = \infty$ и $\theta_3^0 > \theta_1$. Таким образом, при $Q = 0$ обе критические температуры (θ_1^* и θ_3^0), при $Q > 0$ температура зажигания, а при $Q < 0$ температура гашения существуют при любых a (Q растет с увеличением δ).

Если уменьшать a, то, согласно (11), для каждого Q найдется a^* (для $Q = 0$ это $a = \infty$), при котором станет $\theta_1^* < \theta_3$, $\theta_3^0 > \theta_1$. С дальнейшим уменьшением a (например увеличением скорости w подачи смеси) θ_1^* и θ_3^0 приближаются к θ_2, сокращая область неединственности решений, амплитуда и число колебаний в колеблющихся решениях, согласно (9), уменьшаются, θ_2 становится узлом, и наступит момент, когда $\theta_1^* = \theta_3^0 = \theta_2$.

С увеличением a точки θ_1^* и θ_3^0 расходятся, приближаясь соответственно к Θ_1^* и Θ_3^0, так что при $a > a^*$ для $Q > 0$ третий режим, а для $Q < 0$ — первый режим становятся возможными при любых θ_-, и температура гашения (зажигания) перестает существовать. Точка θ_2 с ростом a становится фокусом, а при $a = \infty$ ($w = 0$) — центром. Количество колеблющихся решений и число колебаний в них около θ_2 растет, и при $a = \infty$ они вырождаются в бесконечное множество решений, совершающих периодические колебания около θ_2 с амплитудой от 0 до $\min(\Theta_1^*, \theta_3) - \max(\Theta_3^0, \theta_1)$ и не принимающих при $x = \infty$ определенного значения. (При $a = \infty$, взяв $\xi = x / r_0$, получим $dp / d\theta = -\psi(\theta) / bp$ и $\theta_1^* = \Theta_1^*$, $\theta_3^0 = \Theta_3^0$).

В случае небольшого повышения (понижения) температуры при пересечении колеблющимся решением оси θ справа (слева) может произойти переход к колебанию с большей амплитудой (при $a < \infty$ к решению, делающему меньшее число колебаний), и поэтому можно ожидать, что колеблющиеся решения будут неустойчивы, и в конечном счете приведут к одному из двух монотонных режимов (с $\theta_+ = \theta_1$ или $\theta_+ = \theta_3$).

Если уменьшать δ, то θ_1 и θ_3 уменьшаются, а θ_2, θ_1^* и θ_3^0 возрастают, так что при $\delta < \delta_1(a)$ будет $\theta_1^* = \infty$, при $\delta = \delta^0$ точки θ_2 и θ_3 совпадут, образуя точку $\theta_{2,3} = \min_\delta \theta_3$ (фиг. 4). При $\delta < \delta^0$ точка $\theta_{2,3}$ совсем исчезает, и для всех θ_- будет существовать только первый, беспламенный режим. Поэтому $\theta_{2,3}$ можно назвать температурой потухания. (Предполагается, что других корней, кроме рассмотренных, функция $\psi(\theta)$ не имеет.)

С увеличением δ наблюдается обратная картина. При $\delta > \delta_3(a)$ будет $\theta_3^0 = -\infty$, а при $\delta = \delta^*$ достигается $\max_\delta \theta_1 = \theta_{1,2}$ (фиг. 5). Точка $\theta_{1,2}$ называется температурой воспламенения, так как при $\delta > \delta^*$ ее не будет, и первый режим перестает существовать.

Критические значения δ^0, δ^* и $\theta_{2,3}$, $\theta_{1,2}$ определяются из уравнений

$$\psi(\theta, \delta) = 0, \quad d\psi / d\theta = 0 \tag{12}$$

Если $K = \underline{\lim} \, [\theta^{-1}\varphi(\theta)] \neq 0$ при $\theta \to \infty$, что может иметь место в случае реакции нулевого порядка, то при $\delta > 1 / K$ исчезает θ_3, и стационарные режимы будут невозможны при $\delta > \max(1/K, \delta^*)$ для любых θ_- и a, а при $1 / K < \delta \leqslant \delta^*$ (если $1 / K < \delta^*$) только для $\theta_- > \theta_1^*$ (наступит взрыв).

Итак, соответствующий θ_1, низкотемпературный, беспламенный режим возможен при $\delta < \delta^0$ и при $\delta^0 \leqslant \delta \leqslant \delta^*$, $\theta_- \leqslant \theta_1^*(a, \delta)$; соответствующий θ_3, высокотемпературный режим возможен при $\delta^* < \delta < 1 / K$ (если $\delta^* < 1 / K$) и при $\delta^0 \leqslant \delta < \min(\delta^*, 1 / K)$, $\theta_- \geqslant \theta_3^0(a, \delta)$ (в случае подобия полей C и T он возможен при $\delta > \delta^*$ и при $\delta^0 \leqslant \delta \leqslant \delta^*$, $\theta_- \geqslant \theta_3^0$). В указанных областях вне зоны их пересечения стационарные режимы