ПМТФ, № 2, 1964

ПОТОКИ ЧАСТИЦ И ТЕПЛА В ПЛАЗМЕ ВДОЛЬ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Ю. М. Алиев, А. Р. Шистер

(Москва)

Рассмотрены явления переноса в полностью ионизованной электронно-ионной плазме в случае, когда средние ларморовские радиусы могут оказаться меньше дебаевского радиуса экранирования кулоновского взаимодействия. Исходя из кинетического уравнения, учитывающего влияние магнитного поля на акт соударения частиц, получены потоки частиц и тепла вдоль поля.

1. Исходное кинетическое уравнение. В [1] было получено кинетическое уравнение, которое учитывает влияние магнитного поля на акт соударения частиц. Это уравнение для функции распределения α — сорта частиц $f_\alpha(t, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)$ с зарядом e_α и массой m_α, находящихся в однородном электрическом поле $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$, имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{H}\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = I \qquad (1.1)$$

где

$$I = \frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\sum_\beta \int d\mathbf{v}_\beta d\mathbf{r}_\beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\left|\frac{e_\alpha e_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}\right| \int_0^\infty E(\tau, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta)\, d\tau \qquad (1.2)$$

$$E(\tau, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\left(\frac{e_\alpha e_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}\right)\left(\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} - \frac{1}{m_\beta}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\beta}\right) f_\alpha f_\beta \Big|_{\substack{t\to t+\tau \\ \mathbf{r}\to\mathbf{R} \\ \mathbf{v}\to\mathbf{V}}} \qquad (1.3)$$

В (1.3) следует заменить момент времени t на $t + \tau$, координаты и скорости — на координаты и скорости частиц, движущихся в однородном постоянном магнитном поле в момент времени $t + \tau$, если в момент времени t они находились в точке $\mathbf{r}_\alpha$ и имели скорость $\mathbf{v}_\alpha$, т. е. скорости $\mathbf{v}_\alpha$ заменяются на

$$\mathbf{V}_\alpha(\tau, \mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{h}(\mathbf{h}\mathbf{v}_\alpha) - (\mathbf{h}\times\mathbf{v}_\alpha)\sin\Omega_\alpha\tau - \mathbf{h}\times(\mathbf{h}\times\mathbf{v}_\alpha)\cos\Omega_\alpha\tau \qquad (1.4)$$

и координаты $\mathbf{r}_\alpha$ на

$$\mathbf{R}_\alpha(\tau, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha + \int_0^\tau \mathbf{V}_\alpha(\tau', \mathbf{v}_\alpha)\, d\tau' \qquad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{h}$ — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля, Ω_α — ларморовская частота.

Воспользуемся уравнением (1.1) для описания процессов переноса в плазме вдоль магнитного поля. Считая неоднородность плазмы и внешнее электрическое поле слабыми, будем искать f_α в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)}(1 + \Phi_\alpha) \qquad (1.6)$$

$$\left(f_\alpha^{(0)} = n_\alpha(\mathbf{r}_\alpha, t)\, m_\alpha^{3/2}[2\pi T(\mathbf{r}_\alpha, t)]^{-3/2}\exp\left\{-\frac{m_\alpha}{2T}[\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_\alpha, t)]^2\right\}\right)$$

Здесь $f_\alpha^{(0)}$ — «локальная» максвелловская функция, а Φ_α — поправка, обусловленная наличием электрического поля и слабой неоднородностью плазмы.

Средняя массовая скорость

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha m_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha / \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \tag{1.7}$$

В уравнениях (1.3) удобно перейти к новой независимой переменной, а именно, вместо скорости частиц данного сорта к относительной скорости частиц данного сорта по отношению к $\mathbf{v}_0$. Учитывая слабую зависимость функции распределения от координат и времени и переходя к Фурье-представлению по координатам в (1.2), окончательно получаем

$$f_\alpha^{(0)}\mathbf{v}_\alpha\left[\left(\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2T}-\frac{5}{2}\right)\frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}}+\frac{\partial \ln n_\alpha T}{\partial \mathbf{r}}-\frac{e_\alpha}{T}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}_0\times\mathbf{H}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\sum_\beta (e_\alpha e_\beta)^2\int f_\alpha^{(0)}f_\beta^{(0)}e^{i\mathbf{k}\mathbf{M}_{\alpha\beta}}\mathbf{k}\left(\frac{\mathbf{k}}{m_\alpha}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\mathbf{v}_\alpha}-\frac{\mathbf{k}}{m_\beta}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\mathbf{v}_\beta}\right)d\mathbf{v}_\beta\frac{d\mathbf{k}}{k^4}d\tau \tag{1.8}$$

$$(\mathbf{M}_{\alpha\beta}=\mathbf{R}_\alpha-\mathbf{R}_\beta-(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta))$$

Интегрирование но k в правой части (1.8) следует производить от нижнего предела

$$k_{\min}\approx r_D^{-1}=(4\pi ne^2/T)^{-1/2}$$

определяемого экранировкой взаимодействия на больших расстояниях, до верхнего

$$k_{\max}\approx r_{\min}^{-1}=Te^{-2}$$

определяемого неприменимостью теории возмущений, при помощи которой было получено уравнение (1.1).

2. Решение кинетического уравнения. Учитывая вид левой части (1.8), будем искать Φ_α в виде

$$\Phi_\alpha=\left(A_\alpha\frac{\partial \ln T}{\partial\mathbf{r}}+B_\alpha\mathbf{d}\right)\cdot\mathbf{v}_\alpha \tag{2.1}$$

где

$$\mathbf{d}=\frac{n_e}{n}\left[\frac{\partial \ln n_e T}{\partial\mathbf{r}}+\frac{e}{T}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}_0\times\mathbf{H}\right)\right] \tag{2.2}$$

Величины A_α и B_α, как функции скоростей, разлагаются в ряд по полиномам Лагерра порядка $^3/_2$

$$A_\alpha=\sum_{\mu=0}^{\infty}a_{\alpha\mu}L_\mu\left(\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2T}\right),\qquad B_\alpha=\sum_{\mu=0}^{\infty}b_{\alpha\mu}L_\mu\left(\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2T}\right) \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1) в (1.9) используя разложение (2.3) и свойство ортогональности полиномов Лагерра, нормированных условием

$$\int_0^\infty x^{3/2}e^{-x}L_p(x)L_q(x)\,dx=p!\,\Gamma\left(p+\frac{5}{2}\right)\delta_{pq}$$

после интегрирования по всем скоростям, получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов $a_{\alpha\mu}$ и $b_{\alpha\mu}$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(a_{e\mu}K_{s\mu}^{e}-\frac{m_e}{m_i}a_{i\mu}K_{s\mu}^{ei}\right)=\frac{5}{2\nu}\delta_{s1},\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(a_{e\mu}K_{s\mu}^{ie}-\frac{m_e}{m_i}a_{i\mu}K_{s\mu}^{i}\right)=-\frac{5n_i}{2n_e\nu}\delta_{s1}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(b_{e\mu}K_{s\mu}^{e}-\frac{m_e}{m_i}b_{i\mu}K_{s\mu}^{ei}\right)=-\frac{n}{n_e\nu}\delta_{s0},\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(b_{e\mu}K_{s\mu}^{ie}-\frac{m_e}{m_i}b_{i\mu}K_{s\mu}^{i}\right)=-\frac{n}{n_e\nu}\delta_{s0}$$

$$\nu=\frac{4\sqrt{2\pi}(e_ie)^2n_i}{3T^{3/2}\sqrt{m_e}},\qquad e_i=Ze \tag{2.4}$$

Если в (2.3) ограничиться разложением по первым трем полиномам Лагерра, получим следующие выражения для матриц, входящих в (2.4)

$$K_{s\mu}^{e} = J_0 \begin{vmatrix} 1 & {}^3/_2 & {}^{15}/_4 \\ {}^3/_2 & {}^{13}/_4 & {}^{69}/_8 \\ {}^{15}/_4 & {}^{69}/_8 & {}^{433}/_{16} \end{vmatrix} + \frac{n_e}{n_i Z^2 \sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_{11}^{e} & \varkappa_{12}^{e} \\ 0 & \varkappa_{21}^{e} & \varkappa_{22}^{e} \end{vmatrix} \qquad (2.5)$$

$$K_{s\mu}^{ei} = J_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^3/_2 & 0 & 0 \\ {}^{15}/_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad K_{s\mu}^{ie} = J_0 \begin{vmatrix} 1 & {}^3/_2 & {}^{15}/_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2.6)$$

$$K_{s\mu}^{i} = \begin{vmatrix} \vartheta_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_{22} \end{vmatrix} + \frac{n_i Z^2}{n_e \sqrt{2}} \frac{\sqrt{m_i}}{\sqrt{m_e}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_{11}^{i} & \varkappa_{12}^{i} \\ 0 & \varkappa_{21}^{i} & \varkappa_{22}^{i} \end{vmatrix} \qquad (2.7)$$

Здесь

$$\varkappa_{11}^{\alpha} = {}^1/_2 J_2^{\alpha} + J_1^{\alpha}, \qquad \varkappa_{12}^{\alpha} = {}^3/_2 \varkappa_{11}^{\alpha}, \qquad \varkappa_{22}^{\alpha} = {}^{39}/_8 J_2^{\alpha} + {}^{47}/_4 J_1^{\alpha}, \qquad \alpha = e,\ i$$

$$\vartheta_{00} = J_0, \qquad \vartheta_{11} = {}^9/_2 J_0 + J_3, \qquad \vartheta_{22} = {}^{91}/_2 J_0 + 14 J_3 \qquad (2.8)$$

При этом введены следующие обозначения:

$$J_0 = \frac{3v_e}{2\pi \sqrt{\pi}} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^4} k_{\parallel}^2 \int_0^{\infty} d\tau \exp(-t_e - t_i) \qquad (2.9)$$

$$J_1^{\alpha} = \frac{3}{2\pi \sqrt{2\pi}\, v_{\alpha}} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^4} \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{\partial t_{\alpha}}{\partial \tau}\right)^2 \exp(-2t_{\alpha}) \qquad (2.10)$$

$$J_2^{\alpha} = \frac{3v_{\alpha}}{\pi \sqrt{2\pi}} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^4} k_{\parallel}^2 \int_0^{\infty} d\tau \exp(-2t_{\alpha}) \qquad (2.11)$$

$$J_3 = \frac{3v_e}{4\pi \sqrt{\pi}\, v_i^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^4} \int_0^{\infty} d\tau \frac{\partial t_e}{\partial \tau} \frac{\partial t_i}{\partial \tau} \exp(-t_e - t_i) \qquad (2.12)$$

$$t_{\alpha} = v_{\alpha}^2 \tau^2 \left[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 (\Omega_{\alpha}\tau/2)^{-2} \sin^2 \Omega_{\alpha}\tau/2\right] \qquad v_{\alpha} = (T/2m_{\alpha})^{1/2}$$

Опуская вычисление интегралов (2.9) — (2.12), отметим, что при интегрировании по τ в (1.2) верхний предел соответствовал времени разлета частиц на бесконечность. В сильном магнитном поле, когда движение частиц в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, финитно, единственным механизмом, обеспечивающим разлет взаимодействующих частиц на бесконечность, является их движение вдоль магнитного поля. Время этого разлета по порядку величины равно $R/v_{\parallel}$, где R — прицельное расстояние, $v_{\parallel}$ — проекция относительной скорости частиц на направление магнитного поля. При $v_{\parallel} \to 0$ время взаимодействия (разлета) неограниченно возрастает, что может приводить к логарифмически расходящимся выражениям (это имеет место в J_1^{α}).

Однако ясно, что при очень малых относительных скоростях, меньших $v_{\parallel}^{\min}$, определяемой из соотношения ${}^1/_2 m (v_{\parallel}^{\min})^2 \approx e^2 / R$, существенным становится кулоновское взаимодействие. Уравнение (1.1), полученное в предположении слабости последнего, становится непригодным для описания поведения таких долго взаимодействующих частиц.

Поэтому при интегрировании по τ в (1.2) следует произвести обрезание времени взаимодействия[1] на $\tau_{\max}^{(k)} \approx R/v_{\|}^{\min}$.

Оценку вклада частиц с $\tau > \tau_{\max}^{(k)}$ следует производить, учитывая кулоновское взаимодействие. Проведенные нами вычисления показали, что этот вклад невелик и им можно пренебречь.

3. Сводка полученных результатов. Определим среднюю диффузионную скорость частиц $\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$ и поток энергии $\mathbf{q}_\alpha$ следующим образом:

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha \mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha, \qquad \mathbf{q}_\alpha = \int f_\alpha \mathbf{v}_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} d\mathbf{v}_\alpha$$

Или, используя, (2.1) — (2.3), получим

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{T}{m_\alpha} \left(a_{\alpha 0} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} + b_{\alpha 0} \mathbf{d} \right) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{5}{2} T n_\alpha \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle - \frac{5 n_\alpha T^2}{2 m_\alpha} \left(a_{\alpha 1} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} + b_{\alpha 1} \mathbf{d} \right) \tag{3.2}$$

Коэффициенты $a_{\alpha 0}$, $b_{\alpha 0}$, $a_{\alpha 1}$, $b_{\alpha 1}$, входящие в (3.1) и (3.2), определяются из решения системы уравнений (2.4). Используя условие $a_{e0} n_e + a_{i0} n_i = 0$, вытекающее из (1.8), получаем

$$a_{i1} = \frac{5 n_i m_i}{2 n_e m_e \nu} K_{22}{}^i \,[K_{22}{}^i K_{11}{}^i - (K_{12}{}^i)^2]^{-1}, \qquad b_{i1} = 0 \tag{3.3}$$

$$a_{e1} = \frac{5}{2\nu} [K_{00}{}^e K_{22}{}^e - (K_{20}{}^e)^2] \,/\, \mathrm{Det}\, | K_{s\mu}{}^e | \tag{3.4}$$

$$a_{e0} = - \frac{5 n_e}{2n} b_{e1} = - \frac{5}{2\nu} [K_{01}{}^e K_{22}{}^e - K_{20}{}^e K_{21}{}^e] / \mathrm{Det}\, | K_{s\mu}{}^e | \tag{3.5}$$

Если в (2.3) ограничиться разложением по первым двум полиномам Лагерра, (3.3) — (3.5) принимают вид

$$a_{i1} = \frac{5 n_i m_i}{2 n_e m_e \nu} \left(\vartheta_{11} + \frac{n_i Z^2}{n_e \sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \varkappa_{11}{}^i \right)^{-1}, \qquad b_{i1} = 0 \tag{3.6}$$

$$a_{e1} = \frac{5}{2\nu} \left(J_0 + \frac{n_e \varkappa_{11}{}^e}{n_i Z^2 \sqrt{2}} \right)^{-1} \tag{3.7}$$

$$a_{e0} = - \frac{5 n_e}{2n} b_{e1} = - \frac{3}{2} a_{e1} \tag{3.8}$$

Чем больше число полиномов, при помощи которых аппроксимируется поправка к функции распределения, тем точнее получаются выражения для коэффициентов переноса. Сравнение результатов, получаемых с различным числом полиномов [2], показывает, что ошибка при вычислениях с одним полиномом Лагерра для некоторых коэффициентов может быть

---

[1] При электрон-ионных столкновениях с прицельными параметрами, лежащими в области от ρ_e до ρ_i, когда влиянием магнитного поля на движение иона можно пренебречь, возможен еще один механизм обрезания времени столкновения частиц, связанный с выходом иона из сферы взаимодействия. Время такого выхода порядка R / v_i, где v_i — средняя тепловая скорость иона. При $R = r_0 = r_{\min} m_i / m_e$ это время и $\tau_{\max}^{(k)}$ оказываются одинаковыми. Таким образом, в области прицельных параметров от ρ_e до r_0 взаимодействие частиц обрезается в результате кулоновского ускорения электрона в поле иона, в области от r_0 до ρ_i, где кулоновское поле достаточно слабое, из сферы взаимодействия раньше уходит свободный ион.

сравнима с самой вычисляемой величиной, в то время как переход к двум аппроксимирующим полиномам резко повышает точность расчетов. Дальнейшее увеличение числа полиномов, не приводя к существенному увеличению точности, сильно усложняет формулы.

Значения коэффициентов (3.3) — (3.5), вычисленные с тремя полиномами Лагерра, даются в приложении. Таким образом, осталось привести значения интегралов (2.9) — (2.12), входящих в матрицы (2.5) — (2.8). В зависимости от величины ларморовских радиусов частиц $\rho_e = v_e / \Omega_e|$ и $\rho_i = |v_i / \Omega_i|$ получаем следующие выражения:

$$J_2^\alpha = \begin{cases} \ln r_D^* & (r_D \ll \rho_\alpha) \\ \ln r_D^* + {}^1/_2 \ln (r_D / \rho_\alpha) & (r_D \gg \rho_\alpha) \end{cases} \tag{3.9}$$

$$J_0 = J_2^e$$

$$J_1^\alpha = \begin{cases} {}^3/_2 \ln r_D^* & (r_D \ll \rho_\alpha) \\ {}^3/_2 (\pi/2 + \sqrt{2\pi} / 8 + 1) \ln \rho_\alpha^* + {}^3/_4 \ln (r_D / \rho_\alpha) & (r_D \gg \rho_\alpha) \end{cases} \tag{3.10}$$

$$J_3 = 3 \ln r_D^* \quad (r_D \ll \rho_e) \tag{3.11}$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_2 \ln (m_i / m_e) \ln (r_D / \rho_e)] \quad (\rho_i \gg r_D \gg \rho_e \gg r_0)$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_2 \ln (m_i / m_e) \ln (r_D / r_0) + {}^1/_4 \ln (r_0 / \rho_e) \ln (r_0^* \rho_e^*)]$$
$$(\rho_e \gg r_D \gg r_0 \gg \rho_e)$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_4 \ln (r_D / \rho_e) \ln (r_D^* \rho_e^*)] \quad (\rho_i \gg r_0 \gg r_D \gg \rho_e)$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_2 \ln (\rho_i / \rho_e) \ln (m_i / m_e) + {}^1/_2 \ln (r_D / \rho_i) \ln (m_i \rho_i / m_e r_D)]$$
$$(\sqrt{m_i / m_e} \rho_i \gg r_D \gg \rho_i \gg \rho_e \gg r_0)$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_2 \ln (\rho_i / \rho_e) \ln (m_i / m_e) + {}^1/_8 \ln^2 (m_i \rho_i / m_e r_D)]$$
$$(r_D \gg \sqrt{m_i / m_e} \rho_i \gg \rho_i \gg \rho_e \gg r_0)$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_4 \ln (r_0 / \rho_e) \ln \rho_e^* r_0^* + {}^1/_2 \ln (\rho_i / r_0) \ln (m_i / m_e) +$$
$$+ {}^1/_2 \ln (r_D / \rho_i) \ln (m_i \rho_i / m_e r_D)] \quad (\sqrt{m_i / m_e} \rho_i \gg r_D \gg \rho_i \gg r_0 \gg \rho_e)$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_4 \ln (r_0 / \rho_e) \ln \rho_e^* r_0^* + {}^1/_2 \ln (\rho_i / r_0) \ln (m_i / m_e) +$$
$$+ {}^1/_8 \ln^2 (m_i \rho_i / m_e r_D)] \quad (r_D \gg \sqrt{m_i / m_e} \rho_i \gg \rho_i \gg r_0 \gg \rho_e)$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_4 \ln (r_D / \rho_e) \ln (\rho_e^* r_D^*)] \quad \begin{pmatrix} r_0^{1/3} \rho_i^{2/3} \equiv r_1 \gg \rho_i \gg r_D \gg \rho_e \\ r_1 \gg r_D \gg \rho_i \gg \rho_e \end{pmatrix}$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_4 \ln (r_1 / \rho_e) \ln \rho_e^* r_1^* + {}^1/_2 \ln (r_D / r_1) \ln (m_i \rho_i^2 / m_e r_D r_1)]$$
$$(\sqrt{m_i / m_e} \rho_i \gg r_D \gg r_1 \gg \rho_i \gg \rho_e)$$

$$J_3 = 3 [\ln r_D^* + {}^1/_4 \ln (r_1 / \rho_e) \ln \rho_e^* r_1^* + {}^1/_8 \ln^2 (m_i \rho_i^2 / m_e r_1^2)]$$
$$(r_D \gg \sqrt{m_i / m_e} \rho_i \gg r_1 \gg \rho_i \gg \rho_e)$$

Здесь верхним индексом * обозначены величины, отнесенные к $r_{\min}$ ($r_D^* = r_D / r_{\min}$ и т. д.).