УДК 539.3:621.833

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЛОКАЛЬНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НА ПЛОСКИЙ УЧАСТОК ЕГО ГРАНИЦЫ МАЛОГО ШТАМПА

И. И. Аргатов

Государственная морская академия им. адм. С. О. Макарова, 199106 Санкт-Петербург

Выписана асимптотика решения контактной задачи о давлении (без трения) на упругое тело кругового штампа с плоским основанием в предположении малости относительного размера площадки контакта. В полученные формулы входят интегральные характеристики упругого тела, зависящие от его формы, размеров, условий закрепления, коэффициента Пуассона и расположения центра штампа. Выяснен механический смысл этих величин как коэффициентов локальной податливости упругого тела. На основе теоремы взаимности установлены соотношения, уменьшающие в общем случае число различных коэффициентов в асимптотическом разложении. Приведены результаты численных расчетов некоторых коэффициентов локальной податливости упругого полушара в его центре. Обсуждается асимптотическая модель действия сосредоточенной силы на упругое тело.

Введение. Необходимость повышения точности расчета давлений, возникающих между контактирующими деталями машин, потребовала изучения контактных задач теории упругости для тел, отличных от полупространства. Известные решения для упругого слоя [1, 2], упругого пространственного клина [3], упругого усеченного шара [4, 5] основаны на явном представлении функции Грина. В [6, 7] разработана методика зеркальных отражений приближенного построения функций Грина для упругих четверти и октанта пространства. Для случая упругой плиты развит метод однородных решений [8, 9]. Предложено большое количество численных схем решения контактных задач (см., например, [10–13]).

Предположение о малости размеров площадки контакта позволяет использовать асимптотические методы при решении контактных задач [1–3, 5]. В [14] показано, что в общем случае для построения нескольких первых членов асимптотического разложения плотности контактных давлений достаточно знать несколько коэффициентов в асимптотических разложениях регулярных составляющих сингулярных решений с особенностями, соответствующими сосредоточенной силе (функция Грина), сосредоточенным моментам и полимоментам. В данной работе эти коэффициенты интерпретируются как характеристики локальной податливости упругого тела.

1. Постановка контактной задачи для штампа с плоским основанием. Матрица локальной податливости. Рассмотрим упругое тело, занимающее трехмерную область Ω, на границе которой имеется площадка Σ, расположенная в плоскости Ox_1x_2. Пусть на Σ без трения давит круговой (с центром в начале координат) штамп. Будем считать, что радиус a_ε основания штампа $\omega(\varepsilon)$ мал по сравнению с характерным размером l тела Ω. Удобно положить

$$a_\varepsilon = \varepsilon a^*, \tag{1.1}$$

где ε — малый положительный параметр; a^* — сравнимая с l величина, не зависящая от ε. В качестве l выберем радиус наибольшего помещающегося в области Ω полушара с центром в точке O. Считаем, что на участке границы Γ_u тело закреплено, а на Γ_σ и Σ вне области контакта свободно от напряжений.

Предположим, что главный вектор и главные моменты системы сил, приложенных к штампу, имеют величины F_3 и M_1, M_2. В результате нагружения штамп поступательно перемещается на расстояние δ_0 и поворачивается. Поворот определяется углами β_1, β_2. При этом плотность p контактного давления, развивающегося под штампом, удовлетворяет интегральному уравнению (см., например, [1, § 19])

$$\iint\limits_{\omega(\varepsilon)} G_3(y_1, y_2; x_1, x_2, 0)\, p(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 = \delta_0 + \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1. \tag{1.2}$$

Здесь G_3 — вертикальная компонента вектор-функции Грина с полюсом на границе в точке $(y_1, y_2, 0)$.

Искомые величины δ_0, β_1 и β_2 определяются из уравнений равновесия штампа

$$\iint\limits_{\omega(\varepsilon)} p(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = F_3, \qquad \iint\limits_{\omega(\varepsilon)} \begin{Bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{Bmatrix} p(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}. \tag{1.3}$$

Замечание. Контактное давление под подошвой штампа должно быть положительным. Увеличение перекоса штампа приведет к отрыву кромки штампа от поверхности упругого тела. Однако, как следует из решения осесимметричной контактной задачи для упругого усеченного шара (см. [5, § 5.2.1]) в случае поступательного вдавливания штампа, условие плотного контакта будет соблюдаться только при достаточно малых значениях параметра ε.

Ввиду линейности задачи величины δ_0, β_1 и β_2 должны быть связаны с F_3, M_1 и M_2 линейной зависимостью

$$\begin{pmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} & \Pi_{02} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{20} & \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_3 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Величины $\Pi_{kl}(\varepsilon)$ характеризуют податливость упругого тела Ω под действием на его грань Σ в точке O штампа с плоским основанием $\omega(\varepsilon)$. При малых значениях ε перемещение штампа в первую очередь определяется локальными деформациями тела Ω, возникающими в окрестности штампа (по терминологии [15, § 133] в области местных возмущений). Матрицу в (1.4) будем называть матрицей локальной податливости. Отметим, что из теоремы взаимности $\delta_0'' F_3' + \beta_1'' M_1' + \beta_2'' M_2' = \delta_0' F_3'' + \beta_1' M_1'' + \beta_2' M_2''$ следует симметричность матрицы локальной податливости Π.

Одной из целей данной работы является построение асимптотики матрицы $\Pi(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

2. Асимптотическое моделирование локального контактного взаимодействия упругого тела со штампом. Справедливо разложение (см., например, [1; 16, § 4.14])

$$G_3(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}) = T_3(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3) + g_3(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}), \tag{2.1}$$

где $g_3(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x})$ — вертикальная компонента регулярной составляющей вектор-функции Грина; T_3 — часть решения задачи Буссинеска о действии единичной силы на границу упругого полупространства (см. [16, § 5.11]), причем

$$\frac{\pi E}{1 - \nu^2}\, T_3(x_1 - y_1, x_2 - y_2, 0) = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}. \tag{2.2}$$

Здесь E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлено тело Ω.

Используем следующую асимптотическую формулу (обозначения соответствуют принятым в [14, 17]):

$$(\pi E/(1-\nu^2))g_3(\boldsymbol{y};x_1,x_2,0) = A_0 + B_1x_1 + B_2x_2 - A_0^{(2)}y_1 + A_0^{(1)}y_2 +$$

$$+ C_{11}x_1^2 + 2C_{12}x_1x_2 + C_{22}x_2^2 - (B_1^{(2)}x_1 + B_2^{(2)}x_2)y_1 +$$

$$+ (B_1^{(1)}x_1 + B_2^{(1)}x_2)y_2 + (1/2)(A_0^{(2,0)}y_1^2 + 2A_0^{(2,1)}y_1y_2 + A_0^{(2,2)}y_2^2) + \ldots . \quad (2.3)$$

Здесь многоточие обозначает члены $O(\varepsilon^3)$ (в соответствии с (1.1)). Заметим также, что коэффициенты, входящие в правую часть (2.3) (указания для их вычисления даны в [14, 17]), вообще говоря, зависят от расположения точки O (центра штампа).

Пример 1. Пусть Ω — слой толщиной h, жестко скрепленный с недеформируемым основанием $x_3 = h$. Тогда правая часть (2.3) зависит только от квадрата расстояния между точками (y_1, y_2) и (x_1, x_2). Согласно [1] при $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} < 2h$ справедливо представление в виде абсолютно сходящегося степенного ряда

$$\frac{\pi E}{1-\nu^2}\, g_3(\boldsymbol{y};x_1,x_2,0) = -\frac{1}{h}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{h^{2m}}\,[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^m.$$

Сравнивая данное разложение с (2.3), находим, что отличными от нуля будут только следующие коэффициенты:

$$\begin{gathered} A_0 = -a_0/h, \qquad C_{11} = C_{22} = -a_1/h^3, \\ A_0^{(2,0)} = A_0^{(2,2)} = -2a_1/h^3, \qquad B_1^{(2)} = -2a_1/h^3, \qquad B_2^{(1)} = 2a_1/h^3. \end{gathered} \quad (2.4)$$

Значения безразмерных коэффициентов a_0 и a_1 для различных ν приведены в табл. 1.2 в [5] (см. также [18]). Например, при $\nu = 0{,}3$ $a_0 = 1{,}3769$, $a_1 = -0{,}6276$.

Подставим формулы (2.1)–(2.3) в (1.2) и проинтегрируем почленно. В результате получим уравнение

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_{\omega(\varepsilon)}\frac{p(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}} = \delta_0 + \beta_1x_2 - \beta_2x_1 - \tilde F_3A_0 - \tilde F_3(B_1x_1+B_2x_2) -$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iA_0^{(i)} - \tilde F_3(C_{11}x_1^2+2C_{12}x_1x_2+C_{22}x_2^2) - \sum_{i=1}^{2}\tilde M_i(B_1^{(i)}x_1+B_2^{(i)}x_2) - \sum_{n=0}^{2}\tilde M_{2,n}A_0^{(2,n)}. \quad (2.5)$$

Здесь $\tilde F_3$ и $\tilde M_1$, $\tilde M_2$ — интегральные характеристики плотности контактных давлений (нормированные сила и моменты), равные умноженным на $(\pi E)^{-1}(1-\nu^2)$ величинам, вычисляемым по формулам (1.3); $\tilde M_{2,n}$ — нормированные полимоменты распределения контактных давлений:

$$\tilde M_{2,n} = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\,M_{2,n}, \qquad M_{m,n} = \frac{1}{2}\,C_2^n\iint\limits_{\omega(\varepsilon)} y_1^{2-n}y_2^n p(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) представляет собой так называемое “связанное” интегральное уравнение контактной задачи для упругого тела конечных размеров [14] и является уравнением третьего приближения: коэффициент A_0 дает первую поправку на геометрию упругого тела, соответственно пятое и шестое слагаемые являются поправками второго порядка, последующие — поправками третьего порядка.

Отметим, что метод сведения интегрального уравнения (1.2) контактной задачи для упругого слоя к приближенному путем полиномиальной аппроксимации регулярной составляющей ядра интегрального оператора предложен в [19] (см. также [1, § 54]). Свойства решений таких уравнений изложены в [5, § 1.2]. Термин "связанное" обозначает, что после построения решения (с неопределенными коэффициентами) интегрального уравнения контактной задачи для упругого полупространства решение уравнения (2.5) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. В [18] данным методом найдено решение задачи о давлении параболического штампа на упругий слой. Асимптотическое решение соответствующей нелинейной результирующей задачи получено в [17].

3. Решение связанного уравнения. Используя результаты [20–22], решение уравнения (2.5) запишем в виде

$$p(x_1,x_2)=\frac{E}{\pi(1-\nu^2)}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}\Big[\delta_0-\tilde F_3A_0-\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iA_0^{(i)}-\sum_{n=0}^{2}\tilde M_{2,n}A_0^{(2,n)}+$$

$$+\tilde F_3(C_{11}+C_{22})a^2-2\Big(\beta_2+\tilde F_3B_1+\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iB_1^{(i)}\Big)x_1+2\Big(\beta_1-\tilde F_3B_2-\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iB_2^{(i)}\Big)x_2-$$

$$-\frac{2}{3}\,\tilde F_3(5C_{11}+C_{22})x_1^2-\frac{16}{3}\,\tilde F_3C_{12}x_1x_2-\frac{2}{3}\,\tilde F_3(C_{11}+5C_{22})x_2^2\Big]. \quad (3.1)$$

Величины $\tilde F_3$ и $\tilde M_i$, $\tilde M_{2,n}$ необходимо связать с δ_0, β_1 и β_2. Интегрируя (3.1), имеем

$$\tilde F_3=c\Big[\delta_0-\tilde F_3A_0-\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iA_0^{(i)}-\sum_{n=0}^{2}\tilde M_{2,n}A_0^{(2,n)}-\frac{1}{3}\,(C_{11}+C_{22})a^2\tilde F_3\Big], \quad (3.2)$$

где $c=2\pi^{-1}a$ — поступательная емкость кругового штампа с радиусом основания, равным a (зависимость от параметра ε не указывается).

Вычисляя моменты (см. вторую формулу в (1.3)) плотности контактных давлений (3.1), получаем

$$\tilde M_1=m\Big(\beta_1-\tilde F_3B_2-\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iB_2^{(i)}\Big),\quad \tilde M_2=m\Big(\beta_2+\tilde F_3B_1+\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iB_1^{(i)}\Big), \quad (3.3)$$

где $m=4(3\pi)^{-1}a^3$ — вращательная емкость кругового штампа.

Наконец, подставляя (3.1) в (2.6), находим

$$\tilde M_{2,0}=\frac{a^3}{3\pi}\Big(\delta_0+\tilde F_3\Big[A_0-\frac{a^2}{15}\,(17C_{11}+C_{22})\Big]-\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iA_0^{(i)}-\sum_{n=0}^{2}\tilde M_{2,n}A_0^{(2,n)}\Big); \quad (3.4)$$

$$\tilde M_{2,1}=-\frac{32a^5}{45\pi}\,\tilde F_3C_{12}; \quad (3.5)$$

$$\tilde M_{2,2}=\frac{a^3}{3\pi}\Big(\delta_0+\tilde F_3\Big[A_0-\frac{a^2}{15}\,(C_{11}+17C_{22})\Big]-\sum_{i=1}^{2}\tilde M_iA_0^{(i)}-\sum_{n=0}^{2}\tilde M_{2,n}A_0^{(2,n)}\Big). \quad (3.6)$$

Из уравнений (3.4) и (3.6) с учетом (3.5) можно выразить величины $\tilde M_{2,0}$ и $\tilde M_{2,2}$. Определитель данной системы равен $1+(3\pi)^{-1}a^3(A_0^{(2,0)}+A_0^{(2,2)})$ и не обращается в нуль при всех достаточно малых значениях $\varepsilon = a/l$. Однако отыскивать точное решение необязательно, поскольку сами формулы (3.1)–(3.6) получены в результате приближенных построений.

4. Асимптотика матрицы локальной податливости. Проведем асимптотический анализ соотношений (3.4)–(3.6) (см. также [17]). Предположим, что величины δ_0, β_1 и β_2 фиксированы (не зависят от параметра ε). Тогда из (3.2) следует разложение $\tilde{F}_3 = \varepsilon \tilde{F}_3^0 + \varepsilon^2 \tilde{F}_3^1 + \ldots$. Вместе с тем учтем, что формула (3.1) выведена путем сохранения членов порядка ε^3 по сравнению с единицей (см. (2.5), где $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon a^*$). Таким образом, с точностью, с которой получено уравнение (2.5), следует ограничиться приближением

$$\tilde{M}_{2,n} \simeq \tilde{M}_{2,n}^0, \qquad \tilde{M}_{2,0}^0 = \tilde{M}_{2,2}^0 = a^3 \delta_0/(3\pi), \qquad \tilde{M}_{2,1}^0 = 0. \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в (3.2), находим

$$\Big(\frac{1}{c} + A_0 + \frac{a^2}{3}\,(C_{11} + C_{22})\Big)\tilde{F}_3 + \sum_{i=1}^{2} \tilde{M}_i A_0^{(i)} = \Big(1 - \frac{a^3}{3\pi}\,(A_0^{(2,0)} + A_0^{(2,2)})\Big)\delta_0.$$

Используя те же соображения, что и при получении соотношения (4.1), последнюю формулу заменим следующей:

$$\Big(\frac{1}{c} + A_0 + \frac{a^2}{3}\,(C_{11} + C_{22}) + \frac{a^3}{3\pi c}(A_0^{(2,0)} + A_0^{(2,2)})\Big)\tilde{F}_3 + A_0^{(1)}\tilde{M}_1 + A_0^{(2)}\tilde{M}_2 = \delta_0. \tag{4.2}$$

Наконец, уравнение (3.3) перепишем в виде

$$B_2\tilde{F}_3 + (1/m + B_2^{(1)})\tilde{M}_1 + B_2^{(2)}\tilde{M}_2 = \beta_1, \quad -B_1\tilde{F}_3 - B_1^{(1)}\tilde{M}_1 + (1/m - B_1^{(2)})\tilde{M}_2 = \beta_2. \tag{4.3}$$

Уравнения (4.2), (4.3) приближенно связывают силу F_3 и моменты M_1, M_2 с перемещением штампа δ_0 и его углами поворота β_1, β_2. Сопоставляя (4.2), (4.3) с (1.4), получим следующие асимптотические формулы для нормированных компонент $\tilde{\Pi}_{lk} = \pi E(1-\nu^2)^{-1}\Pi_{kl}$ матрицы локальной податливости:

$$\begin{gathered}\tilde{\Pi}_{00} \simeq 1/c + A_0 + a^2(C_{11} + C_{22})/3 + a^2(A_0^{(2,0)} + A_0^{(2,2)})/6, \quad \tilde{\Pi}_{01} \simeq A_0^{(1)}, \quad \tilde{\Pi}_{02} \simeq A_0^{(2)},\\ \tilde{\Pi}_{10} \simeq B_2, \qquad \tilde{\Pi}_{11} \simeq 1/m + B_2^{(1)}, \qquad \tilde{\Pi}_{12} \simeq B_2^{(2)},\\ \tilde{\Pi}_{20} \simeq -B_1, \qquad \tilde{\Pi}_{21} \simeq -B_1^{(1)}, \qquad \tilde{\Pi}_{22} \simeq 1/m - B_1^{(2)}.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Соотношения (4.4) определяют зависимость компонент матрицы Π от емкостных характеристик штампа c и m (определяемых исключительно геометрией подошвы штампа) и коэффициентов в асимптотической формуле (2.3). Последние определяются формой, размерами упругого тела Ω, условиями его закрепления, расположением точки O и зависят от коэффициента Пуассона.

Из симметричности матрицы Π следуют равенства

$$A_0^{(1)} = B_2, \qquad A_0^{(2)} = -B_1, \qquad B_1^{(1)} = -B_2^{(2)}. \tag{4.5}$$

Эти равенства можно доказать, применяя формулу Бетти, на основе данных в [14, 17] определений величин $A_0^{(1)}, \ldots, B_2^{(2)}$ как коэффициентов в асимптотических формулах типа (2.3) для некоторых сингулярных решений. Однако соотношения взаимности (4.5) и аналогичные им нетрудно получить непосредственно из (2.3), принимая во внимание вытекающее из теоремы Бетти (см., например, [23, гл. 4, § 3.1]) равенство

$$g_3(y_1, y_2; x_1, x_2, 0) = g_3(x_1, x_2; y_1, y_2, 0). \tag{4.6}$$

Подставляя разложение (2.3) в (4.6), получим (4.5), а также равенства

$$A_0^{(2,0)} = 2C_{11}, \qquad A_0^{(2,1)} = 2C_{12}, \qquad A_0^{(2,2)} = 2C_{22}. \tag{4.7}$$

Таким образом, соотношения взаимности (4.5), (4.7) в общем случае уменьшают число различных коэффициентов, входящих в построенное асимптотическое решение.

Пример 2. В случае слоя (см. пример 1) по формулам (4.2), (4.3) с учетом (2.4) находим

$$\tilde{F}_3 = \frac{2a\delta_0}{\pi}\Big(1 - \frac{2a_0}{\pi}\,\varepsilon - \frac{8a_1}{3\pi}\,\varepsilon^3\Big)^{-1}, \qquad \tilde{M}_i = \frac{4a^3\beta_i}{3\pi}\Big(1 + \frac{8a_1}{3\pi}\,\varepsilon^3\Big)^{-1} \quad (i = 1, 2). \tag{4.8}$$

Раскладывая выражения (4.8) в ряд по степеням параметра $\varepsilon = a/h$, получим

$$F_3 = \frac{2E}{1-\nu^2}a\delta_0\Big\{1+\frac{2a_0}{\pi}\,\varepsilon+\Big(\frac{2a_0}{\pi}\Big)^2\varepsilon^2+\Big[\Big(\frac{2a_0}{\pi}\Big)^3+\frac{8a_1}{3\pi}\Big]\varepsilon^3+\Big[\Big(\frac{2a_0}{\pi}\Big)^4+\frac{32a_0a_1}{3\pi^2}\Big]\varepsilon^4+O(\varepsilon^5)\Big\},$$
$$M_i = \frac{4E}{3(1-\nu^2)}\,a^3\beta_i\Big(1 - \frac{8a_1}{3\pi}\,\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5)\Big) \quad (i = 1, 2). \tag{4.9}$$

Формулы (4.9) совпадают с формулами (48.2) и (50.2) в [1].

5. Вычисление коэффициентов A_0 и C_{11} для центра упругого полушара. Пусть упругое тело Ω представляет собой половину шара радиусом l, неподвижно закрепленную по сферической части границы Γ_u. Приближенное решение задачи о действии единичной сосредоточенной силы на центр среза Σ построим методом Бубнова — Галёркина.

Поскольку задача для определения вектор-функции $\boldsymbol{g}(0;\boldsymbol{x})$ (см. (2.1)) является осесимметричной, можно использовать представление общего решения системы Ламе в цилиндрических координатах r и z через две гармонические функции Φ_1 и Φ_2 в форме Вебера (см. [24, § 12])

$$g_r = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big[\Phi_1 + z\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} + 2(1-\nu)\Phi_2\Big], \qquad g_z = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\,\frac{\partial}{\partial z}\Big[\Phi_1 + z\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - 2(1-\nu)\Phi_2\Big],$$
$$\sigma_{zz} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big), \qquad \tau_{rz} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}, \qquad \Phi = \Phi_1 + z\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}. \tag{5.1}$$

В качестве функций напряжений выберем однородные гармонические полиномы

$$\Phi_i^n = c_i^n\rho^n P_n(\cos\theta) \quad (i = 1, 2), \qquad \rho = \sqrt{r^2+z^2}, \qquad \cos\theta = z/\sqrt{r^2+z^2} \tag{5.2}$$

(P_n — полином Лежандра). Подчиняя решение (5.1), (5.2) условиям $\sigma_{zz} = 0$ и $\tau_{rz} = 0$ при $z = 0$, исключаем один из коэффициентов c_1^n, c_2^n: если n четное, то $c_1^n = 0$, если n нечетное, то $c_2^n = -c_1^n$.

Таким образом, векторный однородный полином степени n, удовлетворяющий однородным уравнениям Ламе в полупространстве $z > 0$ и краевым условиям отсутствия напряжений на его границе $z = 0$, в случае четного n имеет следующие компоненты:

$$\tilde{V}_r^n = -(1-\alpha)(1/r)\Phi^{n+1} + [2-(1+\alpha)(n+1)](z/r)\Phi^n + (1+\alpha)n(z^2/r)\Phi^{n-1},$$
$$\tilde{V}_z^n = 2\Phi^n - (1+\alpha)nz\Phi^{n-1}, \qquad \alpha \equiv \nu(1-\nu)^{-1}, \tag{5.3}$$

в случае нечетного n

$$\tilde{V}_r^n = (2/r)\Phi^{n+1} + [(1+\alpha)n - 2](z/r)\Phi^n - (1+\alpha)n(z^2/r)\Phi^{n-1},$$
$$\tilde{V}_z^n = -(1-\alpha)\Phi^n + (1+\alpha)nz\Phi^{n-1}. \tag{5.4}$$

Первые три вектора $\tilde{\boldsymbol{V}}^n$, вычисленные по формулам (5.3), (5.4), имеют вид

$$\tilde{\boldsymbol{V}}^0 = \boldsymbol{e}_z, \qquad \tilde{\boldsymbol{V}}^1 = r\boldsymbol{e}_r - 2\alpha z\boldsymbol{e}_z, \qquad \tilde{\boldsymbol{V}}^2 = -2zr\boldsymbol{e}_r + (r^2 + 2\alpha z^2)\boldsymbol{e}_z.$$

ν	A_0	$C_{11} = C_{22}$
0,2	−1,5442	0,5943
0,25	−1,6027	0,6642
0,3	−1,6899	0,7585
0,35	−1,8214	0,8891
0,4	−2,0236	1,0763

Итак, цилиндрические компоненты регулярной части вектор-функции Грина $\boldsymbol{G}(0;\boldsymbol{x})$ при $\rho = l$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ удовлетворяют краевым условиям

$$\begin{gathered}\frac{\pi E}{1-\nu^2}\, g_r\Big|_{\Gamma_u} = -\frac{1}{2(1-\nu)}\,\frac{1}{l}\Big(\sin\theta\cos\theta - (1-2\nu)\,\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\Big),\\ \frac{\pi E}{1-\nu^2}\, g_z\Big|_{\Gamma_u} = -\frac{1}{l}\Big(1 + \frac{1}{2(1-\nu)}\,\cos^2\theta\Big).\end{gathered} \tag{5.5}$$

Возьмем приближение для вектор-функции $\boldsymbol{g}(0;\boldsymbol{x})$ в виде

$$\boldsymbol{v}^N(r,z) = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\sum_{n=0}^{N}\frac{c^n}{l^{n+1}}\,\tilde{\boldsymbol{V}}^n(r,z). \tag{5.6}$$

Тогда искомые величины будут вычисляться по формулам

$$A_0 = c^0/l, \qquad C_{11} = C_{22} = c^2/l^3.$$

Для определения коэффициентов $c^0, c^1, \ldots, c^N$ получим систему $N+1$ линейных алгебраических уравнений из условия ортогональности на полусфере невязки в краевых условиях (5.5), возникающей в результате приближения (5.6), каждому из векторов $\tilde{\boldsymbol{V}}^0$, $\tilde{\boldsymbol{V}}^1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{V}}^N$. Результаты расчетов представлены в таблице. Вычисления проводились для $N = 2 \div 17$. Следует отметить, что относительная погрешность приближенного значения величины A_0 уже при $N = 2$ составила всего 2 %. Для проверки вычислений проводились также расчеты методом граничной коллокации по равноотстоящим узлам.

Заключение. Уточнение асимптотической формулы (2.3) требует использования дополнительных величин, характеризующих геометрию упругого тела. Полное асимптотическое разложение может дать всю совокупность коэффициентов локальной податливости. Практически в явном виде удается выписать только несколько первых членов асимптотики контактного давления (см., например, [1, 5]).

В силу соотношений взаимности (4.5) и (4.7) разложение (2.3) упрощается:

$$(\pi E/(1-\nu^2))g_3(\boldsymbol{y}; x_1, x_2, 0) = A_0 + B_i x_i + B_i y_i + C_{ij}x_i x_j + b_{ij}x_i y_j + C_{ij}y_i y_j + \ldots.$$

Здесь $b_{11} = -B_1^{(2)}$; $b_{12} = b_{21} = B_1^{(1)}$; $b_{22} = B_2^{(1)}$; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Из условия инвариантности при повороте осей координат линейных и квадратичных форм, входящих в данное выражение, следует, что при переходе к новой системе координат величины B_i и C_{ij}, b_{ij} пересчитываются по закону преобразования компонент вектора и тензора соответственно.

Отметим, что в случае симметричности тела Ω и участков границы Γ_u и Γ_σ для точки O имеем $b_{12} = 0$ и $b_{11} = b_{22}$. Однако последние коэффициенты определяются из решения соответствующей неосесимметричной задачи.

Формулы (1.4) и (4.4) можно рассматривать как асимптотическую модель действия сосредоточенных нагрузок (сил и моментов) на упругое тело. Известно (см., например, [25; 10, гл. 10, § 1]), что в окрестности точки приложения сосредоточенной силы сингулярное решение $\boldsymbol{G}(0, \boldsymbol{x})$ приводит к абсурдным выводам. В частности, перемещение в точке приложения сосредоточенной силы не ограничено, в то время как формула (1.4) позволяет поставить в соответствие силе $F_3\boldsymbol{e}_3$ обобщенное перемещение $\delta_0\boldsymbol{e}_3$ (ср. с примером 1 в [26, § 8.9]).

Известно также (см. [27, гл. 7, § 21]), что при рассмотрении локальных нагрузок истинный закон их распределения часто трудно установить, однако их главный вектор, как правило, известен с высокой точностью. Априорное представление о структуре распределенных локальных нагрузок необходимо (см. [28, с. 301]) при введении в расчетную схему сосредоточенных сил с помощью предельного перехода (см. [29], а также [28, гл. 3, § 6]), в то время как асимптотическое моделирование сосредоточенной силы требует решения связанного интегрального уравнения контактной задачи для упругого тела конечных размеров, в результате которого приближенно определяется давление под пятой малого штампа.

Автор выражает благодарность С. А. Назарову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
2. **Александров В. М., Ромалис Б. Л.** Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986.
3. **Лубягин И. А., Пожарский Д. А., Чебаков М. И.** Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, № 2. С. 286–295.
4. **Александров В. М., Пожарский Д. А.** Об осесимметричной контактной задаче для усеченного шара // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 2. С. 305–311.
5. **Александров В. М., Пожарский Д. А.** Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998.
6. **Hetényi M.** A general solution for the elastic quarter space // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. 1970. V. 37, N 1. P. 70–76.
7. **Шевелева Г. И.** Расчет упругих контактных перемещений на поверхностях деталей ограниченных размеров // Машиноведение. 1984. № 4. С. 92–98.
8. **Цветков А. Н., Чебаков М. И.** Контактная задача для конечного тела вращения со свободной боковой поверхностью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 2. С. 77–82.
9. **Александров В. М., Пожарский Д. А.** К контактным задачам для конечного цилиндра и круглой плиты // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки. 1999. № 1. С. 33–36.
10. **Рвачев В. Л., Проценко В. С.** Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977.
11. **Кравчук А. С.** Решение контактных задач с известной функцией Грина // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 2. С. 283–288.
12. **Шевелева Г. И.** Решение контактных задач методом последовательного нагружения при разных условиях равновесия // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1990. № 4. С. 68–74.
13. **Рубин А. М.** Алгоритм метода попыток в задачах сжатия упругих тел // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1993. № 6. С. 49–51.
14. **Аргатов И. И.** Асимптотическое решение контактной задачи для трехмерного упругого тела конечных размеров // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 6. С. 964-970.

15. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
16. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
17. **Аргатов И. И.** Вдавливание штампа в форме эллиптического параболоида в плоскую границу упругого тела // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 4. С. 671–679.
18. **Александров В. М., Шматкова А. А.** Вдавливание параболического штампа в упругий слой и двух параболических штампов в упругое полупространство // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 4. С. 149–155.
19. **Александров В. М.** Некоторые контактные задачи для упругого слоя // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 4. С. 758–764.
20. **Абрамов В. М.** Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23, № 8. С. 759–763.
21. **Ростовцев Н. А.** Комплексные потенциалы в задаче о штампе, круглом в плане // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 20, № 1. С. 77–82.
22. **Довнорович В. И.** Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1959.
23. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
24. **Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.** Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высш. шк., 1975.
25. **Савин Г. Н., Рвачев В. Л.** О перемещении под сосредоточенной силой // Прикл. механика. 1964. Т. 10, № 2. С. 222–225.
26. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
27. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
28. **Партон В. З., Перлин П. И.** Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
29. **Штернберг Е., Юбанкс Р.** О понятии сосредоточенных нагрузок и расширении области применимости теоремы единственности в линейной теории упругости // Механика. 1956. № 5. С. 56–84.

Поступила в редакцию 13/III 2001 г.