Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 5

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПРОФИЛЯ ПОД ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ

УДК 532.59

Д. Н. Горелов, С. И. Горлов

Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН, 644077 Омск

Задача о движении профиля под границей раздела двух сред имеет широкие практические приложения и привлекает внимание многих авторов. Систематическое изложение результатов исследований в этой области дано в [1]. В подавляющем числе работ рассматривается линейная задача о движении профиля под свободной поверхностью. Основополагающие результаты принадлежат М. В. Келдышу, М. А. Лаврентьеву [2] и Н. Е. Кочину [3]. Полученные ими точные решения задачи о движении вихреисточника под свободной поверхностью тяжелой жидкости дали возможность свести краевую задачу о движении профиля к интегральным уравнениям. Дальнейшие работы в этом направлении связаны в основном с развитием методов решения соответствующих интегральных уравнений.

Общий случай, когда вторая среда не является вакуумом, исследован значительно меньше. Обзор известных результатов приведен в [4].

В настоящей работе задача о движении профиля под границей раздела двух сред рассмотрена в наиболее общей постановке. Линейная краевая задача сведена к двум интегральным уравнениям, ядро которых есть точное решение для вихря. Предложен эффективный алгоритм решения этих уравнений, применимый для профилей любой толщины, включая и сколь угодно малую. Для профиля Жуковского представлены результаты расчета подъемной силы, волнового сопротивления, момента и формы границы раздела сред в зависимости от параметров задачи.

1. Рассмотрим линейную краевую задачу о движении профиля L под границей раздела двух жидких сред D_1, D_2. Введем инерциальную систему координат Oxy, связанную с профилем, располагая ось Ox вдоль невозмущенной границы раздела сред (рис. 1). Предположим, что жидкость в слоях D_1 и D_2 идеальная, несжимаемая, тяжелая и однородная, а движение жидкости вне границы раздела и контура L стационарное и потенциальное. Обозначим: g — ускорение силы тяжести, H — отстояние передней кромки профиля от невозмущенной границы раздела сред, b — хорда профиля, α — угол атаки, ρ_k — плотность жидкости в k-м слое, $V_{k\infty}$ — скорость жидкости на бесконечности перед профилем в слое D_k $(k = 1, 2)$.

Движение жидкости в каждом слое D_k описывается комплексной скоростью $V_k(z)$, $z = x + iy$. Потребуем, чтобы функции $\overline{V}_k(z)$ были аналитичны в D_k (вне L при $k = 1$) и удовлетворяли следующим граничным условиям: непрерывности давления и нормальной составляющей скорости при переходе через границу раздела двух сред, затуханию возмущенных скоростей в бесконечном удалении перед профилем в областях D_1, D_2, условию непротекания жидкости через контур L и постулату Жуковского в задней кромке профиля.

Поставленным условиям, кроме последних двух, удовлетворяют функции

$$\overline{V}_k(z) = V_{k\infty} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K_k(z,\zeta)\,\gamma(s)\,\mathrm{e}^{-i\theta(s)}d\zeta, \quad k = 1, 2. \tag{1.1}$$

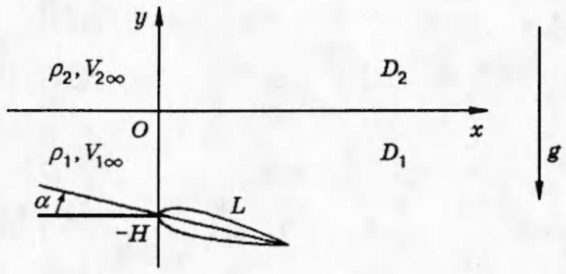

Рис. 1

Здесь s — дуговая координата точки $\zeta \in L$; $\gamma(s)$ — интенсивность вихревого слоя, моделирующего L; $\theta(s)$ — угол между касательной к L в точке $\zeta(s)$ и осью Ox;

$$K_1(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta} + \frac{m_{12}}{2\pi i}\frac{1}{z-\bar\zeta} + \frac{\nu_1 m_{12}^1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}}{\lambda-\nu_1}\,d\lambda - \nu_1 m_{12}^1 i e^{-i\nu_1(z-\bar\zeta)}; \quad (1.2)$$

$$K_2(z,\zeta) = \frac{V_{2\infty}}{V_{1\infty}}\Big\{\frac{m_{12}^1}{\pi i}\frac{1}{z-\zeta} - \frac{\nu_1 m_{12}^1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{e^{i\lambda(z-\zeta)}}{\lambda-\nu_1}\,d\lambda - \nu_1 m_{12}^1 i e^{i\nu_1(z-\zeta)}\Big\}, \quad (1.3)$$

где

$$m_{12}^1 = \frac{\rho_1 V_{1\infty}^2}{\rho_1 V_{1\infty}^2 + \rho_2 V_{2\infty}^2}; \quad \nu_1 = \frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1 V_{1\infty}^2 + \rho_2 V_{2\infty}^2}; \quad m_{12} = m_{12}^1 - m_{12}^2; \quad m_{12}^2 = \frac{\rho_2 V_{2\infty}^2}{\rho_1 V_{1\infty}^2 + \rho_2 V_{2\infty}^2}.$$

Выражения (1.2), (1.3) для $K_k(z,\zeta)\,(k = 1, 2)$ представляют собой точные решения соответствующей краевой задачи для вихря единичной интенсивности [5], которые оказались более удобны, чем решение Н. Е. Кочина [3].

Условие безотрывного обтекания контура L можно записать в виде

$$\operatorname{Im}\{\overline{V}_0(z)e^{i\theta(s)}\} = 0, \quad z \in L; \quad (1.4)$$

$$-\frac{1}{2}\gamma(s) = \operatorname{Re}\{\overline{V}_0(z)e^{i\theta(s)}\}, \quad z \in L, \quad (1.5)$$

где $\overline{V}_0(z) = \overline{V}_1(z)$ при $z \in L$. При этом особый интеграл в (1.1) понимается в смысле главного значения по Коши.

Согласно [6], независимые уравнения (1.4), (1.5) сводятся к системе двух интегральных уравнений, не вырождающихся в предельном случае бесконечно малой толщины про-

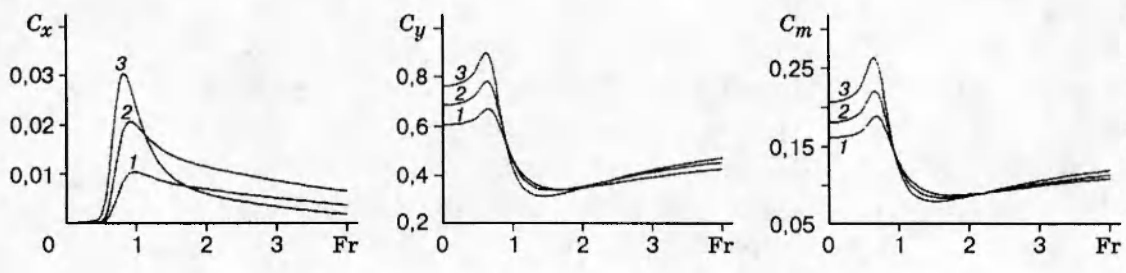

Рис. 2

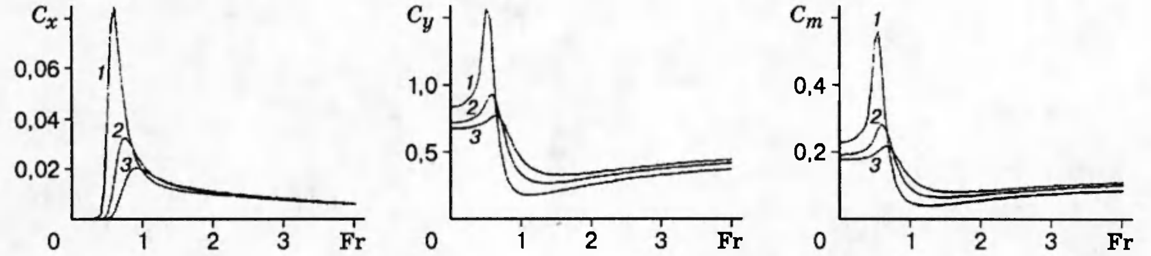

Рис. 3

филя. Метод решения такой системы уравнений в классе функций $\gamma(s)$, удовлетворяющих постулату Жуковского, изложен в [7]. Форма границы раздела двух сред определяется уравнением $y = f(x)$, где

$$f(x) = -\frac{1}{\nu_1}\,\mathrm{Re}\Big\{m_{12}^1\Big(\frac{\overline{V}_1(z)}{V_{1\infty}} - 1\Big) - m_{12}^2\Big(\frac{\overline{V}_2(z)}{V_{2\infty}} - 1\Big)\Big\}, \quad z = x.$$

Распределение давления по профилю и суммарные гидродинамические силы R_x, R_y, а также момент M вычисляются по методике [8].

2. Расчет проводился для симметричного профиля Жуковского. Алгоритм расчета тестировался известными решениями задачи обтекания профиля Жуковского безграничным потоком жидкости и движения пластинки под свободной поверхностью тяжелой жидкости [9]. При этом относительная погрешность расчета не превышала 1 %.

Безразмерными параметрами задачи являются: число Фруда $\mathrm{Fr} = V_{1\infty}/\sqrt{gb}$, отношение плотностей $\rho_* = \rho_2/\rho_1$, отношение скоростей набегающих потоков $v_* = V_{2\infty}/V_{1\infty}$, безразмерное отстояние передней кромки профиля от невозмущенной границы раздела сред $h = H/b$.

Был проведен численный эксперимент по оценке влияния этих параметров на волновое сопротивление, подъемную силу и момент относительно передней кромки профиля, движущегося под границей раздела двух тяжелых жидкостей. Основные результаты представлены на рис. 2–6.

На рис. 2 показана зависимость стандартных коэффициентов C_x, C_y и C_m от числа Фруда для относительной толщины $c = 0$; 0,1; 0,2 (линии *1*–*3*) при $\alpha = 5^0$, $h = 1$, $\rho_* = 0$. Обнаружено, что вблизи значения $\mathrm{Fr} = 1$ наблюдается существенный рост волнового сопротивления, подъемной силы и момента с увеличением толщины профиля при фиксированном отстоянии h. Аналогичный эффект имеет место с уменьшением отстояния профиля

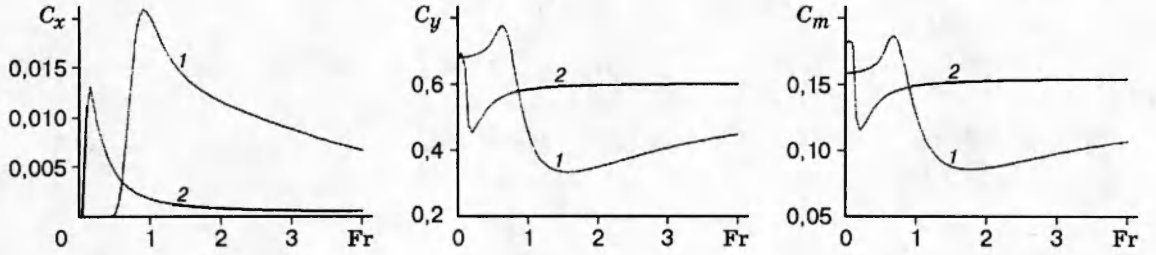

Рис. 4

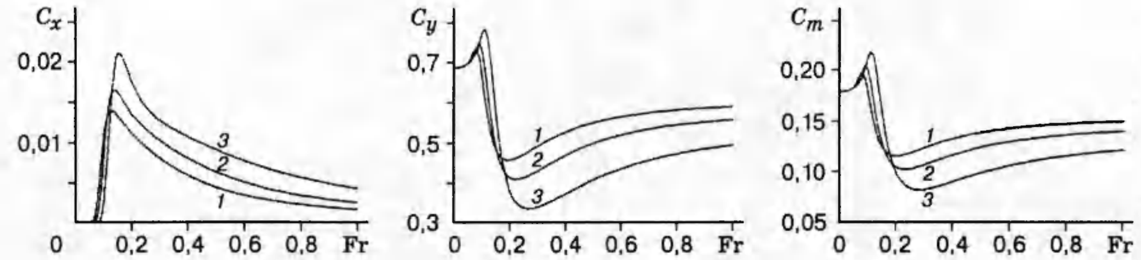

Рис. 5

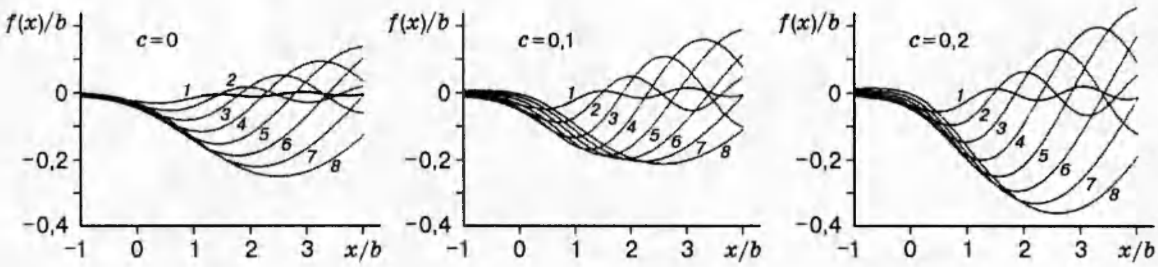

Рис. 6

от границы раздела при фиксированной толщине c (рис. 3, где $c = 0{,}1$, $\alpha = 5^0$, $\rho_* = 0$, $h = 0{,}5$; 0,75; 1 — линии *1–3*). Представляет интерес сравнительная оценка зависимости C_x, C_y, C_m от Fr при $\rho_* = 0$ (свободная поверхность) и $\rho_* = 0{,}97$ (граница раздела между соленой и пресной водой). Соответствующие результаты расчета для $c = 0{,}1$, $\alpha = 5^0$, $h = 1$, $v_* = 1$ приведены на рис. 4 ($\rho_* = 0$; 0,97 — линии *1, 2*). Влияние отношения скоростей набегающих потоков на зависимости C_x, C_y, C_m от Fr при $c = 0{,}1$, $\alpha = 5^0$, $h = 1$, $\rho_* = 0{,}97$, $v_* = 1{,}0$; 0,5; 0 (линии *1–3*) показано на рис. 5.

Влияние числа Фруда на форму границы раздела иллюстрирует рис. 6 для свободной поверхности при $c = 0$; 0,1; 0,2, $\alpha = 5^0$, $h = 1$ (Fr = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2 — линии *1–8*).

Результаты численного эксперимента позволяют сделать следующие выводы о влиянии параметров задачи на волновое сопротивление и подъемную силу профиля. Основной характеристикой является зависимость C_x, C_y, C_m от числа Фруда. Влияние других параметров наиболее сильно при Fr $\sim$ 1 и Fr $<$ 1. При этом увеличение относительной толщины профиля вызывает те же эффекты, что и приближение профиля к границе раздела. Увеличение отношения плотностей ρ_* от 0 до 1 приводит к снижению волнового сопротивления при всех значениях Fr и к смещению $\max C_x$ влево, тогда как зависимость подъемной силы и момента от числа Фруда при разных ρ_* оказывается более сложной. Что касается зависимости C_x, C_y, C_m от параметра v_*, то она проявляется существенно лишь при Fr $<$ 0,5.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01049).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Басин М. А., Шадрин В. П.** Гидроаэродинамика крыла вблизи границы раздела

сред. Л.: Судостроение, 1980.

2. **Келдыш М. В.** О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости // Избранные труды: Механика. М.: Наука, 1985. С. 120–151.
3. **Кочин Н. Е.** О влиянии рельефа земли на волны на поверхности раздела двух масс жидкости разной плотности (статья 2) / Собр. соч.: М.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 1. С. 467–477.
4. **Стурова И. В.** Влияние внутренних волн на гидродинамические характеристики погруженного тела // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. № 6. С. 732–738.
5. **Горлов С. И.** Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 127–132.
6. **Горелов Д. Н.** Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 173–177.
7. **Горелов Д. Н., Горлов С. И.** Движение профиля вблизи плоского экрана // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 47–52.
8. **Горелов Д. Н.** Расчет распределения давления вблизи передней кромки профиля в методе дискретных вихрей // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 1. С. 114–118.
9. **Целищев В. А.** Исследование влияния свободной поверхности тяжелой жидкости на стационарные гидродинамические характеристики тонкого профиля // Гидродинамика больших скоростей. Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т. 1990. С. 143–147.

Поступила в редакцию 24/IV 1995 г.,
в окончательном варианте — 16/VI 1995 г.