УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА НА РЕШЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

О. А. Киликовская, Н. В. Овчинникова

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва
E-mail: ovch-n@yandex.ru

Рассмотрена модельная задача о плоской деформации упругопластического материала. Показано, что вид напряженного состояния в плоскости нагружения влияет на зависимость решения от коэффициента Пуассона. Установлено, что для состояния, при котором величины главных напряжений в плоскости нагружения приближенно равны, влияние сжимаемости значительно, поэтому ее необходимо учитывать. Показано, что если главные напряжения в плоскости нагружения имеют разные знаки, то решения для сжимаемого и несжимаемого материалов практически совпадают.

Ключевые слова: плоская деформация, коэффициент Пуассона, пластичность, теория течения, сжимаемость материала.

Введение. Целью настоящей работы является анализ влияния упругой сжимаемости материала (коэффициента Пуассона ν) на решение упругопластической задачи о плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$). Часто при аналитическом решении задач о плоской деформации влияние сжимаемости не учитывается явно, что позволяет существенно упростить решение. В этом случае для определения осевого напряжения σ_z используется равенство

$$\sigma_z = 0{,}5(\sigma_1 + \sigma_2), \tag{1}$$

где σ_1, σ_2 — главные напряжения в плоскости нагружения Oxy.

Влияние сжимаемости не учитывается неявно, в случае если для сжимаемого материала ($0 \leqslant \nu < 0{,}5$) принимается гипотеза о промежуточном положении величины σ_z относительно σ_1, σ_2 [1]:

$$\sigma_1 \leqslant \sigma_z \leqslant \sigma_2. \tag{2}$$

Отсюда следует, что максимальное касательное напряжение выражается только через напряжения σ_1, σ_2:

$$\tau_{\max} = 0{,}5|\sigma_2 - \sigma_1|.$$

Тогда в главных осях условие пластичности Треска — Сен-Венана принимает вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4m^2. \tag{3}$$

Здесь $m = \sigma_s/2$; σ_s — предел текучести материала при растяжении.

С использованием соотношения (1) при $m = \sigma_s/\sqrt{3}$ условие пластичности Мизеса

$$\sigma_U \equiv \sqrt{(\sigma_z - (\sigma_1 + \sigma_2)/2)^2 + 3(\sigma_1 - \sigma_2)^2/4} = \sigma_s \tag{4}$$

(σ_U — интенсивность напряжений) сводится к (3).

Предположение о незначительном влиянии упругой сжимаемости материала на напряженно-деформированное состояние и соответственно о возможности использования для сжимаемого материала гипотез (1), (2) является следствием того, что сравнение численного решения для сжимаемого материала и аналитического для несжимаемого материала проводилось на примере задач, в которых различие этих решений незначительное (задача о трубе, находящейся под действием только внутреннего давления [1, 2], задача об одноосном сжатии бруса в условиях плоской деформации (опыт Бриджмена) [3]).

Выполненное в [4–6] численно-аналитическое исследование некоторых упругопластических задач о плоской деформации показало, что решения для сжимаемого и несжимаемого материалов могут существенно различаться; в частности, гипотеза (2) выполняется не всегда.

Ниже на примере задач, в которых реализуется однородное состояние, показано, что степень различия решений для сжимаемого и несжимаемого материалов, а также возможность применения гипотезы (2) зависят от соотношения между главными напряжениями в плоскости нагружения. Предварительную оценку влияния сжимаемости на решение упругопластической задачи можно получить с использованием решения задачи упругости.

1. Задача о двухосном растяжении пространства. Рассмотрим задачу о развитии однородных упругопластических деформаций при двухосном растяжении пространства в условиях плоской деформации усилиями σ_x, σ_y ($\sigma_x = k\sigma_y$, $-1 \leqslant k \leqslant 1$). Предположим, что усилия увеличиваются пропорционально увеличению некоторого параметра нагружения $t \geqslant 0$, т. е. $\sigma_y = q_0 t$. Можно принять, что $q_0 = \sigma_s/\sqrt{3}$.

Решение данной задачи получено лишь в случае $k = 0$ для идеально пластического материала [3]. Это решение моделирует эксперимент Бриджмена по одноосному сжатию бруса в условиях плоской деформации.

Заметим, что в упругом состоянии материала осевое напряжение σ_z не всегда является "промежуточным" главным напряжением. При

$$k > \nu/(1-\nu) \qquad (\nu \neq 0{,}5) \tag{5}$$

выполнены неравенства $\sigma_z < \sigma_x < \sigma_y$, и, следовательно,

$$\tau_{\max} = (\sigma_y - \sigma_z)/2 \tag{6}$$

(область I на рис. 1).

В остальных случаях, т. е. для любого k, если $\nu = 0{,}5$, и при

$$k \leqslant \nu/(1-\nu) \qquad \nu \neq 0{,}5, \tag{7}$$

справедливы неравенства

$$\sigma_x < \sigma_z < \sigma_y, \tag{8}$$

следовательно,

$$\tau_{\max} = (\sigma_y - \sigma_x)/2.$$

Покажем, что в случае (5) соотношение (6) выполняется и при упругопластическом деформировании материала в большом интервале изменения параметра нагружения t, при

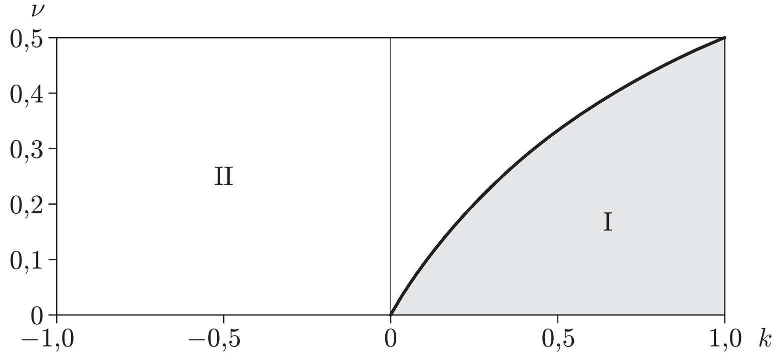

Рис. 1. Области параметров ν и k, в которых выполняются неравенства (5) (область I) и неравенства (7) (область II)

этом решение задачи существенно отличается от соответствующего решения для несжимаемого материала. В случае (7) соотношение (8) выполняется для любого t, причем решения для сжимаемого и несжимаемого материалов близки.

Значение параметра t_0, при котором появляются пластические деформации, определим из условия пластичности Мизеса (4):

$$t_0 = \frac{2\sigma_s}{q_0} \frac{1}{\sqrt{(1-2\nu)^2(1+k)^2 + 3(1-k)^2}}. \tag{9}$$

Примем, что при $t \geqslant t_0$ материал удовлетворяет уравнениям теории пластического течения с изотропным упрочнением:

$$\begin{gathered} E\dot{\varepsilon}_x = \dot{\sigma}_x - \nu(\dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z) + E\dot{\lambda}(\sigma_x - (\sigma_z + \sigma_y)/2), \\ E\dot{\varepsilon}_y = \dot{\sigma}_y - \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_z) + E\dot{\lambda}(\sigma_y - (\sigma_z + \sigma_x)/2), \\ 0 = E\dot{\varepsilon}_z = \dot{\sigma}_z - \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) + E\dot{\lambda}(\sigma_z - (\sigma_x + \sigma_y)/2) \end{gathered} \tag{10}$$

(дифференцирование ведется по параметру нагружения t). Начальное условие определяется из решения задачи теории упругости при $t = t_0$.

В случае линейно упрочняющегося материала имеем

$$E\dot{\lambda} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\dot{\sigma}_U}{\sigma_U} \tag{11}$$

($\alpha = E_1/E$; E_1 — коэффициент линейного упрочнения; E — модуль Юнга).

В случае идеально пластического материала $\dot{\lambda}$ — неизвестная конечная величина. При этом к системе (10) добавляется уравнение

$$\sigma_U = \sigma_s, \qquad t \geqslant t_0. \tag{12}$$

2. Случай нагружения при $k = 1$**.** Пусть $\sigma_x = \sigma_y = q_0 t$. При $\nu = 0{,}5$ в задаче упругости имеет место равенство $\sigma_z = \sigma_x = \sigma_y$ (случай всестороннего растяжения). Деформации равны нулю: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$. Поскольку $\tau_{\max} = 0$, $\sigma_U = 0$, пластические деформации отсутствуют и при любом значении параметра нагружения тело остается упругим.

При $\nu \neq 0{,}5$ в задаче упругости выполнены неравенства $\sigma_z < \sigma_x = \sigma_y$. Так как $\tau_{\max} = (\sigma_y - \sigma_z)/2 \neq 0$, $\sigma_U \neq 0$, то при $t_0 = \sigma_s/[q_0(1-2\nu)]$ возникают пластические деформации.

В случае линейно упрочняющегося материала решение системы (10), (11) при $t \geqslant t_0$, $\nu \neq 0{,}5$ имеет вид

$$\sigma_z = \sigma_y(1 - \alpha(1 - 2\nu)) - \sigma_s(1 - \alpha); \tag{13}$$

$$E\varepsilon_y = E\varepsilon_x = (0{,}5 - \nu)[\sigma_y(3 - \alpha(1 - 2\nu)) - \sigma_s(1 - \alpha)]. \tag{14}$$

Решение задачи (10), (12) для идеально пластического материала представляется формулами (13), (14) при $\alpha = 0$.

Оценим, насколько значение $\tilde{\nu} = \sigma_z/(\sigma_x + \sigma_y)$ отличается от 0,5. В случае упругого тела $\tilde{\nu} = \nu$. Для упругопластического тела при $t = nt_0$ $(n \geqslant 1)$ имеем

$$\tilde{\nu} = 0{,}5 - (0{,}5 - \nu)[(1 - \alpha)/n + \alpha].$$

Следовательно, величина $\tilde{\nu}$ стремится к предельному значению достаточно медленно (порядка $1/n$), причем если $\alpha \neq 0$, то значение $\tilde{\nu} = 0{,}5$ в пределе не достигается. Например, при $\alpha = 0{,}01$, $n = 5$ значение $\tilde{\nu}$ равно 0,458.

Для упругой ε^e, пластической ε^p и полной деформаций справедливы оценки

$$\varepsilon_x^e \approx n\varepsilon_x(t_0), \qquad \varepsilon_x^p \approx n\varepsilon_x(t_0)/2, \qquad \varepsilon_x \approx 3n\varepsilon_x(t_0)/2, \tag{15}$$

где $\varepsilon_x(t_0) = (1+\nu)\varepsilon_s$; $\varepsilon_s = \sigma_s/E$. Из (15) следует, что упругая деформация приблизительно в два раза больше пластической деформации.

Итак, при равенстве главных напряжений $(\sigma_x = \sigma_y)$ в плоскости нагружения решения для сжимаемого и несжимаемого материалов существенно различаются. В этом случае для сжимаемого материала гипотеза (2) не верна, так как σ_z меньше $\sigma_x = \sigma_y$ на всем пути нагружения. Пластическая деформация по модулю меньше соответствующей упругой деформации, поэтому модель жесткопластического тела, в которой упругие деформации не учитываются, тем более неприменима. Из решения задачи для $\nu = 0{,}5$ нельзя получить решение для $\nu \neq 0{,}5$.

В осесимметричной задаче о растяжении пространства с цилиндрической полостью усилиями p, приложенными на бесконечности, всюду, за исключением сравнительно небольшой области, прилегающей к отверстию, напряженно-деформированное состояние однородно и $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx p$. Решения задачи для сжимаемого и несжимаемого материалов существенно различаются [4], в частности значительно различаются размеры соответствующих пластических областей.

3. Случай нагружения при $k = -1$ (чистый сдвиг). При $k = -1$ величина σ_U для любого ν в течение всего процесса нагружения определяется по формуле $\sigma_U = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\sigma_y^2}$. Так как в случае упругого тела $\sigma_z \equiv 0$, то значение параметра t_0, при котором появляются пластические деформации, не зависит от ν:

$$t_0 = \sigma_s/(\sqrt{3}\,q_0), \qquad \sigma_y^0 = \sigma_s/\sqrt{3}. \tag{16}$$

В случае идеально пластического материала при $t > t_0$ решения задачи не существует, так как из (10), (12), (16) следует, что при $t > t_0$ напряжения могут быть только постоянными: $\sigma_y = \sigma_y^0$, $\sigma_z = 0$. Из системы уравнений (10), (12) величина $\dot{\lambda}$ в точке t_0 не определяется однозначно, т. е. может принимать любые значения, следовательно, величины $\dot{\varepsilon}_y(t_0)$, $\dot{\varepsilon}_x(t_0)$ могут быть сколь угодно большими. При этом в случае $t = t_0$ деформации могут принимать любые значения. (Этот вывод следует также из приведенного ниже решения задачи для упрочняющегося материала при $\alpha \to 0$.)

В случае упрочняющегося материала при $t \geqslant t_0$ решение (10), (11) существует и имеет вид

$$\sigma_z \equiv 0, \qquad E\varepsilon_y = -E\varepsilon_x = \sigma_y(1 + \nu) + 1{,}5(1/\alpha - 1)(\sigma_y - \sigma_s/\sqrt{3}\,).$$

Значения $t_0^{0,5}/t_0^\nu$ в зависимости от ν и k

ν	$t_0^{0,5}/t_0^\nu$			
	$k=-1$	$k=0$	$k=0{,}8$	$k=1$
0,1	1	1,102	4,276	∞
0,3	1	1,026	2,307	∞
0,5	1	1,000	1,000	—

Следовательно, чем меньше упрочнение материала, тем быстрее растут деформации с увеличением параметра t. Незначительное различие деформаций для сжимаемого и несжимаемого материалов определяется незначительным различием упругих деформаций. Соотношение (2) выполняется при любом t, максимальное касательное напряжение определяется по формуле (8).

Таким образом, в случае $k=-1$ решения задачи для сжимаемого и несжимаемого материалов близки.

Заметим, что случай чистого сдвига имеет место в задаче об упругом деформировании пространства с цилиндрической полостью под действием только внутреннего давления на полость, так как в любой точке пространства выполнено условие $\sigma_r = -\sigma_\theta$. В этой задаче при наличии пластических деформаций выполняется соотношение (2) [1], влияние сжимаемости оказывается незначительным; размер пластической области не зависит от ν.

4. Нагружение при $-1 < k < 1$. Ниже рассматриваются случаи деформирования сжимаемого и несжимаемого материалов.

4.1. *Несжимаемый материал.* Из (9) следует, что при $\nu = 0{,}5$ значение параметра t_0, при котором появляются пластические деформации, равно $t_0^{0,5} = 2\sigma_s/[\sqrt{3}\, q_0(1-k)]$. В случае идеально пластического материала при $t > t_0^{0,5}$ решения не существует; в точке $t = t_0^{0,5}$ деформации становятся сколь угодно большими (доказательство аналогично приведенному в п. **3** для случая идеально пластического материала).

В случае упрочняющегося материала при $t \geqslant t_0^{0,5}$ решение существует. Нетрудно показать, что при $\nu = 0{,}5$ из третьего уравнения системы (10) следует

$$\sigma_z = 0{,}5(\sigma_x + \sigma_y). \tag{17}$$

При $t \geqslant t_0^{0,5}$ решение системы (10), (11) имеет вид

$$E\varepsilon_x(t) = -E\varepsilon_y(t) = -0{,}75(1-k)q_0(t + (1/\alpha - 1)(t - t_0^{0,5})).$$

Таким образом, скорость роста пластических деформаций существенно больше (приблизительно в $1/\alpha$ раз) скорости роста упругих деформаций.

4.2. *Сжимаемый материал.* Следует отметить, что в случае сжимаемого материала началу пластической деформации соответствует меньшее значение параметра нагружения t_0^ν (9), чем в случае несжимаемого материала: $t_0^\nu < t_0^{0,5}$. При $k \to 1$ это различие существенно увеличивается. Значения величины $t_0^{0,5}/t_0^\nu = t_1/t_0^\nu$ при различных значениях ν, k приведены в таблице.

В случае идеально пластического материала решение системы уравнений (10), (12) имеет следующий вид:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\sigma_s^2 - \frac{3}{4}\,(\sigma_y - \sigma_x)^2} = \frac{(1+k)q_0 t}{2} - \sigma_s\sqrt{1 - \frac{t^2}{t_1^2}}\,; \tag{18}$$

$$E\varepsilon_x = q_0 t(1-2\nu)\Big(1 + \frac{k}{2}\Big) - \frac{\sqrt{3}}{4}\,\sigma_s \ln\Big(\frac{1 + t/t_1}{1 - t/t_1}\Big) + \frac{(1-2\nu)k}{1-k}\,\sigma_s\sqrt{1 - \frac{t^2}{t_1^2}} + C_1,$$

$$E\varepsilon_y = q_0 t(1-2\nu)\Big(k+\frac{1}{2}\Big) + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\sigma_s \ln\Big(\frac{1+t/t_1}{1-t/t_1}\Big) - \frac{1-2\nu}{1-k}\,\sigma_s\sqrt{1-\frac{t^2}{t_1^2}} + C_2 \qquad (19)$$

(значения констант C_1, C_2 находятся из начального условия при $t = t_0^\nu$). Можно показать, что из формул (19) путем предельного перехода получается формула (14) для случая $k = 1$, $\nu \neq 0{,}5$.

Решение (18), (19) существует при $t_0^\nu \leqslant t < t_1$, где $t_1 = 2\sigma_s/[\sqrt{3}\,q_0(1-k)]$. В случае идеально пластического материала в момент $t = t_1$ возникает состояние предельной пластичности, поскольку при $t = t_1$ выражения (19) имеют логарифмическую особенность (деформации становятся бесконечными). При этом соотношение (18) принимает вид (17). Величина t_1 не зависит от ν и совпадает с $t_0^{0,5}$.

При $k < \nu/(1-\nu)$ осевое напряжение является “промежуточным” главным напряжением при всех значениях $0 \leqslant t \leqslant t_1$. При $k > \nu/(1-\nu)$ осевое напряжение не является “промежуточным” не только при $0 \leqslant t \leqslant t_0^\nu$, но и при $t_0^\nu \leqslant t \leqslant t_{zx}$. В точке

$$t_{zx} = \frac{\sigma_s}{q_0(1-k)} = t_1\,\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866 t_1$$

напряжение σ_z становится равным σ_x. Равенство (8) выполняется только при $t_{zx} \leqslant t \leqslant t_1$.

В случае упрочняющегося материала для $k \neq \pm 1$ аналитическое решение получить не удается, так как при $\nu \neq 0{,}5$ задача (10), (11) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению относительно σ_z, решаемому только численно. Для удобства исследования задача решалась методом конечных элементов. Численное решение задачи, полученное для материала с очень малым упрочнением ($\alpha = 10^{-4}$), в интервале $t_0^\nu \leqslant t < t_1$ практически совпадает с аналитическим решением (18), (19) для идеально пластического материала. При $t > t_1$ для упрочняющегося материала решение существует, деформации увеличиваются с конечной, но большой “скоростью”, пропорциональной $1/\alpha$.

4.3. *Сравнение решений для сжимаемого и несжимаемого материалов.* В случае сжимаемого идеально пластического материала процесс развития деформаций можно разделить на два этапа, в случае сжимаемого упрочняющегося материала — на три этапа, которым соответствуют следующие интервалы значений параметра нагружения: 1) $0 \leqslant t \leqslant t_0^\nu$ — упругие деформации; 2) $t_0^\nu \leqslant t < t_1$ — упругопластические деформации, величины которых практически не зависят от α, но зависят от ν; 3) $t \geqslant t_1$ — упругопластические, быстрорастущие деформации (скорость роста определяется величиной $1/\alpha$). В случае несжимаемого материала при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ деформации являются упругими, а при $t \geqslant t_1$ они становятся быстрорастущими упругопластическими. При $k \to 1$ длина интервала $t_0^\nu \leqslant t < t_1$, в котором деформации для сжимаемого и несжимаемого материалов различаются, увеличивается (см. таблицу). Кроме того, при $k \to 1$ различие упругих деформаций для сжимаемого и несжимаемого материалов становится более существенным.

Пусть $k \approx 1$, например $k = 0{,}8$ (такое соотношение нагрузок рассматривалось в работе [7]). На рис. 2 для идеально пластического материала представлены функции напряжений (18) $\bar\sigma(t) = \sqrt{3}\,\sigma/\sigma_s$ и деформаций (19) $\bar\varepsilon_y(t) = \varepsilon_y/\varepsilon_s$ при $\nu = 0{,}3$. Поскольку при $\nu = 0{,}3$ материал переходит в пластическое состояние значительно быстрее, чем при $\nu = 0{,}5$ ($t_0^{0,5} \approx 2{,}3 t_0^{0,3}$), различие деформаций является существенным в большом интервале значений t. В случае упрочняющегося материала в точке t_1 выполняются следующие соотношения: при $\nu = 0{,}3$ $\varepsilon_y(t_1) \approx 9\varepsilon_s$ для $\alpha = 10^{-4}$, $\varepsilon_y(t_1) \approx 6\varepsilon_s$ для $\alpha = 10^{-2}$; при $\nu = 0{,}5$ деформации в 10 раз меньше: $\varepsilon_y(t_1) = 0{,}5\sqrt{3}\,\varepsilon_s \approx 0{,}9\varepsilon_s$. При $\nu = 0{,}3$ напряжение σ_z не является “промежуточным” при $0 \leqslant t \leqslant t_{zx}$, т. е. на значительном участке пути нагружения.

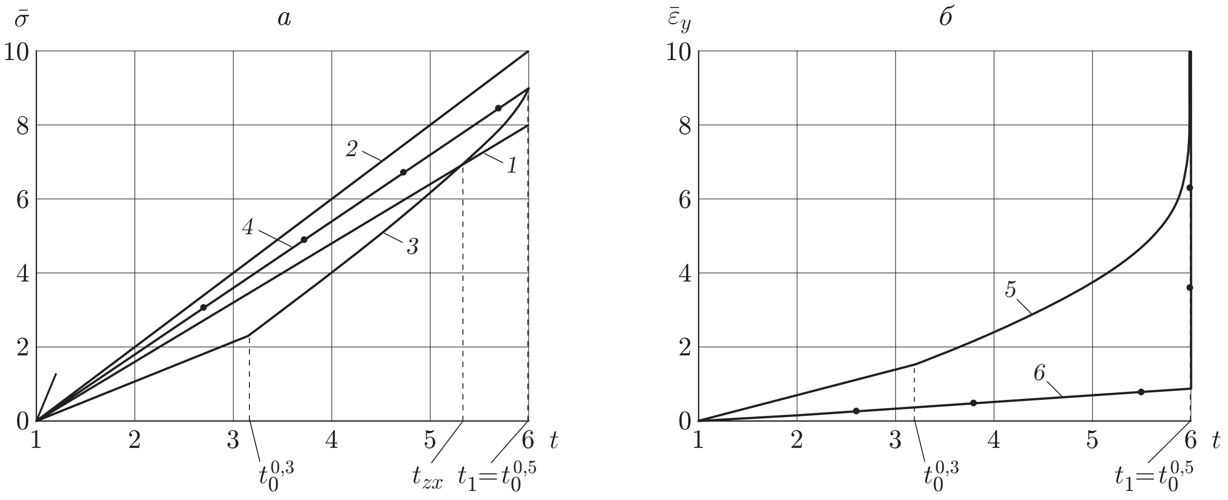

Рис. 2. Зависимости $\bar\sigma_x$, $\bar\sigma_y$, $\bar\sigma_z$ (*а*) и $\bar\varepsilon_y$ (*б*) от t при $k = 0{,}8$:
1 — $\bar\sigma_x$ ($\nu = 0{,}3$; $0{,}5$); *2* — $\bar\sigma_y$ ($\nu = 0{,}3$; $0{,}5$); *3, 4* — $\bar\sigma_z$ (*3* — $\nu = 0{,}3$, *4* — $\nu = 0{,}5$); *5, 6* — $\bar\varepsilon_y$ (*5* — $\nu = 0{,}3$, *6* — $\nu = 0{,}5$)

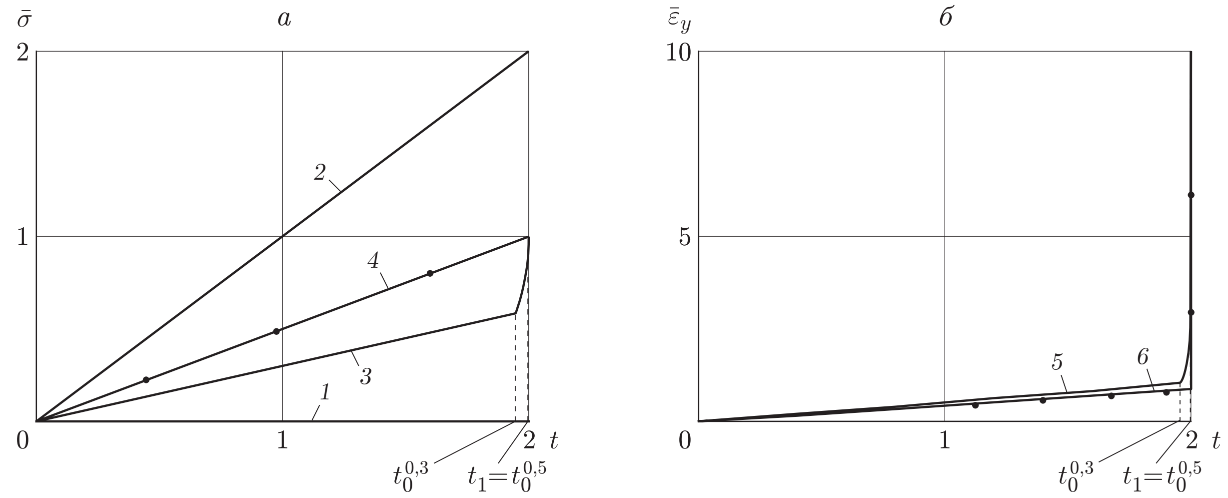

Рис. 3. Зависимости $\bar\sigma_x$, $\bar\sigma_y$, $\bar\sigma_z$ (*а*) и $\bar\varepsilon_y$ (*б*) от t при $k = 0$ (обозначения те же, что на рис. 2)

Пусть $k = 0$ (случай, соответствующий эксперименту Бриджмена). Решение для идеально пластического материала представлено на рис. 3. Пластические деформации для сжимаемого и несжимаемого материалов появляются при значениях параметра нагружения $t_0^{0,5} \approx 1{,}03 t_0^{0,3}$. Следовательно, различие значения $t_0^{0,3}$ и предельного значения t_1 составляет лишь 3 %. Это означает, что величина $\sigma_z/(\sigma_x + \sigma_y)$ изменяется от 0,3 до 0,5 на малом интервале изменения параметра нагружения. В случае сжимаемого материала деформации возрастают до бесконечности на малом интервале изменения параметра нагружения, а в случае несжимаемого материала — мгновенно в точке t_1. В случае упрочняющегося материала при $\nu = 0{,}3$, $\alpha = 10^{-2}$ имеет место равенство $\varepsilon_y(t_1) = 1{,}5\varepsilon_s$, а в случае несжимаемого материала — $\varepsilon_y(t_1) \approx 0{,}9\varepsilon_s$. На всем пути нагружения при $\nu = 0{,}3$; $0{,}5$ выполняются неравенства $\sigma_x < \sigma_z < \sigma_y$.

5. Выводы. В работе исследовано влияние сжимаемости материала на решение упругопластической задачи о плоской деформации. Решение рассмотренной задачи зависит от величины ν, но в том случае, когда главные напряжения в плоскости нагружения имеют разные знаки, эта зависимость является достаточно слабой, и при постановке задачи для упрощения можно считать материал несжимаемым. В случае, когда главные напряжения в плоскости нагружения близки по величине, а именно при $k > \nu/(1-\nu)$, влияние коэффициента Пуассона существенно. Оно проявляется в том, что для сжимаемого и несжимаемого материалов при увеличении параметра нагружения развитие деформаций имеет различный характер. В этом случае для сжимаемого материала не выполняется не только равенство $\sigma_z = 0{,}5(\sigma_x + \sigma_y)$, но и неравенства $\sigma_x < \sigma_z < \sigma_y$, т. е. те соотношения, которые обычно принимаются при постановке задачи. Поэтому при $k > \nu/(1-\nu)$ необходимо учитывать сжимаемость. Использование в постановке задачи для сжимаемых материалов гипотез о величине осевого напряжения (1), (2) и условия пластичности Треска — Сен-Венана в виде (3) не всегда правомерно.

Численно и аналитически показано, что для задач рассматриваемого класса случай идеальной пластичности является предельным для упрочняющегося материала при $\alpha \to 0$ (формулы аналитических решений справедливы при $\alpha = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
2. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
3. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
4. **Киликовская О. А., Овчинникова Н. В.** Влияние упрочнения и сжимаемости материала на решение упругопластических задач о деформировании пространства с цилиндрической полостью // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2012. № 1. С. 75–91.
5. **Киликовская О. А., Овчинникова Н. В., Пендюрина М. Н.** О влиянии упругой сжимаемости и упрочнения материала на решение упругопластической задачи для толстостенной трубы под действием внутреннего или внешнего давления // Вестн. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 16, вып. 1. С. 72–87.
6. **Киликовская О. А., Овчинникова Н. В., Пендюрина М. Н.** Задача о толстостенной трубе из сжимаемого упругопластического материала при совместном действии внутреннего и внешнего давления // Упругость и неупругость: Материалы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рожд. А. А. Ильюшина, Москва, 20–21 янв. 2011 г. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 155–158.
7. **Галин Л. А.** Плоская упругопластическая задача. Пластические области у круговых отверстий в пластинах и балках // Прикл. математика и механика. 1946. Т. 10, вып. 3. С. 367–386.

Поступила в редакцию 11/XI 2009 г.,
в окончательном варианте — 28/VI 2012 г.