

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНОВ НА ГРАНИЦЕ С ЭЛЕКТРОДОМ

И. П. Стаханов, П. П. Щербинин

(Обнинск)

Определяется функция распределения ионов в случае, когда ленгмюровский слой свободно пропускает ионы, падающие из плазмы, а обратный поток ионов равен нулю. Эти условия реализуются вблизи катода в дуговом разряде и у поверхности зонда, работающего на ионной ветви характеристики. Электрическое поле вне ленгмюровского слоя предполагается малым. Получены связь между ионным током и плотностью плазмы на границе с электродом, выражение для средней кинетической энергии иона и для средней энергии, выносимой ионом из плазмы, которые заметно отличаются от соответствующих выражений в случае максвелловского распределения.

Как известно, на границе плазмы с электродом возникает ленгмюровский слой, в котором напряженность электрического поля может достигать большей величины. В ряде важных случаев падение потенциала в ленгмюровском слое $e\Delta\phi$ оказывается значительно больше температуры электронов T_e или ионов T и направлено таким образом, что электроны, выходящие из плазмы на электрод, тормозятся полем. Это имеет место, например, около катода дуги или около зонда, когда последний работает на ионной ветви характеристики. Ионы, выходящие из плазмы, свободно проходят через ленгмюровский слой и рекомбинируют на поверхности электрода.

Обратный поток ионов из электрода в плазму можно в рассматриваемых случаях положить равным нулю. Действительно, во-первых, поверхностная ионизация, благодаря которой возникает этот поток, может отсутствовать, во-вторых, ионы, возникающие на стенке в результате поверхностной ионизации, тормозятся в ленгмюровском слое и в случае большого падения потенциала ($e\Delta\phi \gg T$) подавляющее большинство их не может выйти в плазму. Кроме того, в дуговом режиме объемная ионизация происходит столь интенсивно, что по сравнению с ней поверхностной ионизацией обычно можно пренебречь.

В большинстве важных случаев можно считать, что толщина ленгмюровского слоя пренебрежимо мала (по сравнению с длиной свободного пробега), и учитывать его влияние лишь в граничных условиях. Электрическое поле в ленгмюровском слое приводит к отражению падающих из плазмы электронов, поэтому их функция распределения практически совпадает с максвелловской, отличаясь от нее только в области больших энергий ($\sim e\Delta\phi \gg T_e$), где условие отражения не имеет места. С другой стороны, функция распределения ионов может существенно отличаться от максвелловской, поскольку обратный поток ионов из электрода отсутствует.

Ниже определяется распределение ионов на границе с электродом, что и представляет главную задачу предлагаемой работы.

1. Степень ионизации вблизи электродов, как правило, мала, поэтому необходимо учитывать прежде всего рассеяние ионов на нейтральных атомах. Так, для низковольтной дуги в цезии при $p = 2 \text{ тор}$ длина свободного пробега иона в атомах оказывается около 10 мк , в то время как кулоновская длина свободного пробега при плотности плазмы около электрода $1 \div 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и температуре 0.2 эв составляет $50\text{--}100 \text{ мк}$.

Вследствие малой степени ионизации влиянием ионов на функцию распределения атомов можно пренебречь. По той же причине можно считать, что падающий на стенку поток атомов практически равен отраженному. Вследствие этого функция распределения атомов должна совпадать с максвелловской с температурой, равной температуре стенки, причем на рассматриваемых расстояниях температура атомов практически не меняется. Таким образом, атомы играют роль резервуара, поглощающего энергию и импульс ионов; в результате соударений с атомами функция распределения ионов релаксирует к максвелловскому распределению с температурой электрода.

Пренебрегая кулоновским взаимодействием между ионами, запишем кинетическое уравнение в следующей форме:

$$v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{nf_0 - f}{\tau} \quad (1.1)$$

$$\left(n = n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, x) dv \right)$$

$$f_0 = \frac{1}{v_0 \sqrt{\pi}} \exp \frac{-Mv^2}{2T} \quad \left(v_0^2 = \frac{2T}{M} \right) \quad (1.2)$$

Здесь $f = f(v, x)$ — функция распределения ионов, x — координата, ортогональная электроду, v — компонента скорости вдоль оси, E — напряженность электрического поля, M — масса атома, τ — время релаксации функции распределения.

Поскольку распределение электронов равновесное, их плотность, которая вследствие квазинейтральности совпадает с плотностью плазмы n , связана с электрическим полем барометрической формулой

$$E = - \frac{T_e}{e} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \quad (1.3)$$

Таким образом, уравнение (1.1) оказывается нелинейным. Будем считать электрическое поле малым и линеаризуем уравнение (1.1), заменяя функцию распределения $f(v, x)$ в нелинейном члене на ее равновесное значение $n(x) f_0(v)$. В результате получаем

$$\left[\tau v \frac{\partial f}{\partial x} \right] + f = nf_0 - \tau \alpha v \frac{dn}{dx} f_0 \quad \left(\alpha = \frac{T_e}{T} \right) \quad (1.4)$$

Введем функцию

$$\psi(u, \xi) = \tau_0 f(-v, x) + \alpha v_0 n(x) f_0(v) \quad \left(u = -\frac{v}{v_0}, \quad \xi = \frac{x}{\tau v_0} \right) \quad (1.5)$$

Тогда уравнение (1.4) можно представить в следующем виде:

$$-u \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \psi = \beta n \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u, \xi) du = \beta n(\xi), \quad \beta = 1 + \alpha \right) \quad (1.6)$$

Заметим, что уравнение, аналогичное (1.6), исследовалось в работе [1] в связи с расчетом коэффициента скольжения разряженного газа.

2. Решение уравнения (1.6) ищем в области $\xi > 0$. Производя преобразование Фурье по ξ , получаем

$$\Psi(u, k) = \frac{1}{1 + iku} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} N(k) - \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \Psi(u, 0) \right) \quad (2.1)$$

где $\Psi(u, k)$ и $N(k)$ — фурье-трансформанты функций $\psi(u, \xi)$ и $\beta n(\xi)$ соответственно. Предполагается, что $\psi(u, \xi)$ имеет алгебраический рост при $\xi \rightarrow \infty$ и, таким образом, равенство (2.1) имеет место при $\text{Im } k > 0$. Поскольку в этой области $\Psi(u, k)$ должна быть аналитической функцией, то, как это следует из (2.1), при $k = i/u$ ($u > 0$) должно иметь место равенство

$$\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} N\left(\frac{i}{u}\right) = \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \Psi(u, 0) \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.1) по u и вводя новую комплексную переменную $\eta = i/k$, получим

$$N\left(\frac{i}{\eta}\right) = N\left(\frac{i}{\eta}\right) \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{\eta-t} dt - \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\psi(t, 0)}{\eta-t} dt \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) справедливо в области $\operatorname{Re} \eta \equiv u > 0$. Производя в (2.3) предельный переход на действительную ось в соответствии с равенством

$$\lim_{\operatorname{Im} \eta \rightarrow 0} \frac{1}{t-\eta} = P \frac{1}{t-u} \pm \pi i \delta(t-u),$$

и используя (2.2), получим

$$\psi(u, 0) \lambda(u) = \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\psi(t, 0)}{t-u} dt \quad \left(\lambda(u) = 1 + \frac{u}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-u} dt \right) \quad (2.4)$$

Заменяя в (2.4) функцию $\psi(u, 0)$ согласно (1.5) через функцию распределения $f(v, 0)$ и вводя

$$f(u) = v_0 f_0(-v, 0) \quad (2.5)$$

получим неоднородное сингулярное интегральное уравнение для функции $f(u)$ при $0 \leq u \leq \infty$

$$\lambda(u) f(u) = \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t f(t)}{t-u} dt + \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} g(u) \quad \left(g(u) = \int_0^{\infty} \frac{t f(-t)}{t+u} dt \right) \quad (2.6)$$

Заметим, что согласно (2.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = n(0) \quad (2.7)$$

Функция $f(u)$ при отрицательных значениях аргумента описывает входящие частицы и определяется граничными условиями. В частности, в рассматриваемой задаче входящий поток отсутствует и, таким образом, $g(u) \equiv 0$.

3. Для решения уравнения (2.6) при $g(u) \equiv 0$ введем функцию

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t f(t)}{t-\eta} dt \quad (3.1)$$

Для предельных значений этой функции сверху Φ_+ и снизу Φ_- линии разреза $[0, \infty)$ имеем следующие соотношения [2]:

$$\Phi_+(u) - \Phi_-(u) = \pi i u f(u), \quad \Phi_+(u) + \Phi_-(u) = \int_0^{\infty} \frac{t f(t)}{t-u} dt \quad (3.2)$$

Используя (3.2), запишем сингулярное интегральное уравнение (2.6) в виде

$$\Phi_+ = \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} \Phi_- \quad (3.3)$$

причем функция распределения выражается через предельные значения функции Φ на действительной оси

$$f(u) = \frac{2e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_+}{\Lambda_-}, \quad \Lambda_{\pm}(u) = \lambda(u) \pm i\sqrt{\pi}ue^{-u^2} \quad (3.4)$$

Функции $\Lambda_{\pm}(u)$ можно рассматривать как предельные значения функции

$$\Lambda(\eta) = 1 + \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-\eta} dt \quad (3.5)$$

соответственно сверху и снизу на линии разреза ($-\infty < u < \infty$). Как видно из (3.5), (3.4) и (2.4)

$$\Lambda(\eta) = \Lambda(-\eta), \quad \Lambda_+(u)^* = \Lambda_-(u) \quad (3.6)$$

Функция

$$\text{Ln} \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} = \text{Arg} \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} = 2i \text{Arc tg} \frac{\sqrt{\pi}ue^{-u^2}}{\lambda(u)} + 2i\pi m \quad (3.7)$$

(выбирается та ветвь Arc tg , которая равна нулю при $u = 0$) удовлетворяет условию Гельдера на интервале $[0, \infty)$, поэтому решение уравнения (3.3) можно представить в виде

$$\Phi(\eta) = c \frac{e^{\Gamma(\eta)}}{\eta^k}, \quad \Gamma(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t-\eta} \left(\text{Ln} \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} + 2m\pi i \right) \quad (3.8)$$

$(k=0, \pm 1, \dots)$

Заметим, что

$$\lambda(u) = 1 - \sqrt{\pi}uv(u) \quad (3.9)$$

причем функция $v(u)$ затабулирована в [3]. Пользуясь таблицами функции $v(u)$, можно показать, что $\lambda(u)$ обращается в нуль лишь в одной точке интервала $[0, \infty)$. При $u = 0$, $\lambda(u) = 1$, а при $u \rightarrow \infty$, как это видно из (2.4)

$$\lambda(u) = -\frac{1}{2u^2} + O\left(\frac{1}{u^3}\right) \quad (3.10)$$

Таким образом, когда u пробегает значения от 0 до ∞ , функция

$$\text{Ln} \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} = 2i \text{Arc tg} \frac{\sqrt{\pi}ue^{-u^2}}{\lambda(u)}$$

меняется в интервале от нуля до $2\pi i$. Вследствие этого, для того чтобы интеграл (3.8) существовал, необходимо положить $m = -1$. В результате получим

$$\Gamma(\eta) = -\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\pi} \text{Arc tg} \frac{\sqrt{\pi}te^{-t^2}}{\lambda(t)} \right) \frac{dt}{t-\eta} \quad (3.11)$$

Для определения показателя степени k в (3.8) разложим $\Phi(\eta)$ по степеням $1/\eta$. Из (3.1) следует

$$\Phi(\eta) = -\frac{\langle u \rangle}{2\eta} - \frac{\langle u^2 \rangle}{2\eta^2} - \frac{\langle u^3 \rangle}{2\eta^3} - \dots \quad (3.12)$$

где $\langle u^k \rangle$ — момент функции распределения $f(u)$

$$\langle u^k \rangle = \int_0^{\infty} f(u) u^k du \quad (3.13)$$

первый момент ($k = 1$) обозначим $\langle u \rangle$. Из (2.5) следует, что поток ионов, выходящих из плазмы, равен

$$I = -\langle u \rangle v_0 \quad (3.14)$$

С другой стороны, при $\eta \rightarrow \infty \exp \Gamma(\eta) \rightarrow 1$ и, таким образом, в (3.8) надо положить

$$k = 1, \quad c = -1/2\langle u \rangle \quad (3.15)$$

Покажем, что функция $\Phi(\eta)$ остается ограниченной при $\eta = 0$. Действительно, при $\eta \rightarrow 0$ получим из (3.11)

$$\begin{aligned} \Gamma(\eta) &= \frac{1}{\pi} \int_A^\infty \text{Arc tg} \frac{\sqrt{\pi} u e^{-u^2}}{\lambda(u)} \frac{dt}{t-\eta} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^A \text{Arc tg} \frac{\sqrt{\pi} u e^{-u^2}}{\lambda(u)} \frac{dt}{t-\eta} - \ln \frac{A-\eta}{\eta} \rightarrow \text{const} + \ln \eta \end{aligned} \quad (3.16)$$

и, таким образом, $\Phi(\eta)$ при $\eta = 0$ ограничена и не равна нулю. То же самое можно сказать и о значении функции распределения $f(u)$ при $u = 0$. Сопоставляя (3.8) и (3.15), получим

$$\Phi(\eta) = \frac{\langle u \rangle}{2} X(\eta) \quad \left(X(\eta) = -\frac{e^{\Gamma(\eta)}}{\eta} \right) \quad (3.17)$$

откуда согласно (3.4) получим

$$f(u) = \frac{\langle u \rangle}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \frac{X_+(u)}{\Lambda_+(u)} \quad (3.18)$$

Функции $\Gamma(\eta)$ и $\Lambda(\eta)$ заданы (3.11) и (3.5) соответственно.

4. Уравнение (3.18), в принципе, представляет искомую функцию распределения ионов при $\xi = 0$. Однако функция $X_+(u)$ содержит интеграл в смысле главного значения, получающийся при предельном переходе в (3.11) на действительную ось, что затрудняет анализ полученного результата. Покажем, что решение можно записать в другой форме, в которой эта трудность устраняется.

Полагая $m = -1$ в (3.8) и учитывая, что

$$\Lambda_+(t) = \Lambda_-(-t) \quad (4.1)$$

запишем

$$\begin{aligned} 2\pi i \{ \Gamma(\eta) + \Gamma(-\eta) \} &= \int_0^\infty \frac{\ln \Lambda_+(t) - \pi i}{t-\eta} dt + \\ &+ \int_{-\infty}^0 \frac{\ln \Lambda_+(t) + \pi i}{t-\eta} dt - \int_0^\infty \frac{\ln \Lambda_-(t) + \pi i}{t-\eta} dt - \int_{-\infty}^0 \frac{\ln \Lambda_- - \pi i}{t-\eta} dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрим две вспомогательные функции

$$P(\eta) = \Lambda(\eta) \frac{\eta^2}{|\eta|^2} e^{-\pi i}, \quad Q(\eta) = \Lambda(\eta) \frac{\eta^2}{|\eta|^2} e^{\pi i} \quad (4.3)$$

первую из которых определим в верхней, а вторую — в нижней полуплоскости комплексного переменного η . Считая, что логарифм действительного положительного числа действителен, получим

$$\ln P_+(u) = \ln \Lambda_+(u) - \pi i, \quad \ln Q_-(u) = \ln \Lambda_-(u) + \pi i \quad (4.4)$$

$(u > 0)$

$$\ln P_+(u) = \ln \Lambda_+(u) + \pi i, \quad \ln Q_-(u) = \ln \Lambda_-(u) - \pi i \quad (4.5)$$

$(u < 0)$

Учитывая (4.4) и (4.5), запишем (4.2) в следующем виде:

$$2\pi i \{ \Gamma(\eta) - \Gamma(-\eta) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln P_+(t)}{t-\eta} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln Q_-(t)}{t-\eta} dt \quad (4.6)$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \ln P_+(t) &= \ln \{ 2\Lambda_+ t^2 e^{-\pi i} \} - \ln 2|t|^2 \\ \ln Q_-(t) &= \ln \{ 2\Lambda_- t^2 e^{-\pi i} \} - \ln 2|t|^2 \end{aligned}$$

получим из (4.6)

$$2\pi i \{ \Gamma(\eta) + \Gamma(-\eta) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(2\Lambda_+ t^2 e^{-\pi i})}{t-\eta} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(2\Lambda_- t^2 e^{-\pi i})}{t-\eta} dt \quad (4.7)$$

Вычислим интеграл Коши от функции

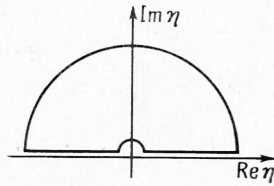
$$\ln [2\Lambda(\eta) \eta^2 e^{-\pi i}] \quad (4.8)$$

по контуру, изображенному на фиг. 1. Согласно (3.5)

$$\Lambda(\eta) \approx -1/2\eta^2, \quad \eta \rightarrow \infty$$

и поэтому на окружности большого радиуса

$$\ln [2\Lambda(\eta) \eta^2 e^{-\pi i}] \sim 0$$



Фиг. 1

Вследствие этого интеграл по этой части контура исчезает. Интеграл по полуокружности вокруг точки $\eta = 0$ также обращается в нуль, когда радиус окружности стремится к нулю. Таким образом, интеграл по рассматриваемому контуру совпадает с интегралом вдоль действительной оси. С другой стороны,

можно показать, что при обходе рассматриваемого контура годограф функции $\Lambda(\eta)$ не охватывает начала координат и, следовательно, $\Lambda(\eta)$ не имеет нулей внутри контура. Отсюда следует, что функция (4.8) аналитична внутри контура и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(2\Lambda_+ t^2 e^{-\pi i})}{t-\eta} dt = \begin{cases} 0 & \text{при } \text{Im } \eta < 0 \\ 2\pi i \ln [2\Lambda(\eta) \eta^2 e^{-\pi i}] & \text{при } \text{Im } \eta > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно вычислить и второй интеграл, входящий в правую часть (4.7). В результате получаем

$$[\Gamma(\eta) + \Gamma(-\eta)] = \begin{cases} \ln [2\Lambda(\eta) \eta^2 e^{-\pi i}] & \text{при } \text{Im } \eta > 0 \\ \ln [2\Lambda(\eta) \eta^2 e^{\pi i}] & \text{при } \text{Im } \eta < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Отсюда

$$X(\eta)X(-\eta) = 2\Lambda(\eta) \quad (4.11)$$

где функция $X(\eta)$ определена согласно (3.17).

Используя равенство (4.11), можно исключить $X(\eta)$ из (3.17) и записать (3.18) в форме

$$f(u) = \frac{2\langle u \rangle}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \frac{1}{X(-u)} \quad (4.12)$$

Поскольку $u > 0$, эта форма записи искомой функции распределения не содержит интегралов в смысле главного значения.

5. Рассмотрим поведение функции распределения $f(u)$ при $u \rightarrow 0$ и $u \rightarrow \infty$. Как следует из (2.6) и (2.7)

$$f(0) = \frac{n(0)}{\sqrt{\pi}} \quad (5.1)$$

и используя (4.12), получим

$$\langle u \rangle = \frac{n(0)}{\sqrt{2}} \quad (5.2)$$

Полагая $\eta = 0$ в (4.11), найдем, что $X(0) = \sqrt{2}$. Таким образом

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{\pi^{-1/2} n(0) \exp(-u^2)} = 1, \quad u \rightarrow 0$$

Дифференцируя (4.12), можно показать, что производная от функции распределения ионов при $u \rightarrow 0$ логарифмически обращается в $+\infty$, т. е. в отличие от максвелловской функции максимум функции распределения ионов сдвинут вправо. При $u \rightarrow \infty$ согласно (3.11)

$$\Gamma(-u) \approx \frac{l_0}{u}, \quad l_0 = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \text{Arc tg} \frac{\sqrt{\pi} t e^{-t^2}}{\lambda(t)} \right\} dt$$

и учитывая (4.12), найдем

$$f(u) \approx \frac{2 \langle u \rangle}{\sqrt{\pi}} (u + l_0) e^{-u^2} \quad (5.3)$$

Значение l_0 , полученное численным интегрированием, оказалось равным 1.016.

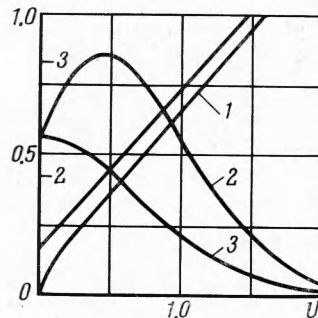
Таким образом, при достаточно больших значениях u

$$\frac{f(u)}{\pi^{-1/2} n(0) \exp(-u^2)} \approx \sqrt{2} (u + l_0)$$

т. е. функция распределения ионов обогащена быстрыми частицами. На фиг. 2 приведены результаты численного расчета функции $\sqrt{2} / X(-u)$, равной отношению функции распределения ионов к максвелловскому распределению с плотностью $n(0)$ и температурой T (кривая 1). Погрешность расчета менее 0.1%. Из фиг. 2 видно, что отличие функции $1 / X(-u)$ от асимптотического значения $u + l_0$ невелико и, таким образом, формула хорошо описывает функцию распределения практически во всем интервале скоростей $u > 0$. На той же фигуре приведен график функции распределения ионов, нормированный на единичную плотность (кривая 2).

$$\frac{1}{n(0)} f(u) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} e^{-u^2} \frac{1}{X(-u)}$$

Фиг. 2. Функция распределения ионов на границе с электродом. 1-отношение функции распределения ионов к функции Максвелла (масштаб справа), 2-функция распределения ионов (масштаб слева), 3-функция Максвелла (масштаб слева)



Для сравнения там же дано распределение Максвелла $\pi^{-1/2} \exp(-u^2)$.

Перейдем к вычислению моментов функции распределения. Формула (5.2) вместе с (3.14) позволяет найти связь между потоком ионов и плотностью плазмы на границе с электродом

$$I = -\frac{n(0)}{\sqrt{2}}v_0 = -\frac{1}{4}n(0)\langle v \rangle \sqrt{2\pi} \left(\langle v \rangle = \left[\frac{8T}{\pi M} \right]^{1/2} \right) \quad (5.4)$$

Таким образом, величина потока при заданной плотности плазмы приблизительно в 2.5 раза больше, чем поток, вычисленный в предположении максвелловского распределения. Используя функцию распределения (5.3), получаем, что $I = -0.75n(0)v_0$ этот результат очень близок к (5.4). Разлагая функцию $X(\eta)$ по степеням $1/\eta$, получим

$$X(\eta) = -\frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{l_0}{\eta} + \frac{l_1 + l_0^2/\eta}{\eta^2} + \dots \right) \quad (5.5)$$

$$l_1 = -\int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc tg} \frac{\sqrt{\pi} t e^{-t^2}}{\lambda(t)} \right) t dt$$

Подставляя в (3.17) разложения (3.12) и (5.5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $1/\eta$, найдем

$$\langle u^2 \rangle = l_0 \langle u \rangle, \quad \langle u^3 \rangle = \left(\frac{l_0^2}{2} + l_1 \right) \langle u \rangle$$

Значение l_1 равно 0.749. Средняя кинетическая энергия, соответствующая x -компоненте скорости, выражается через $\langle u^2 \rangle$ и равна

$$\frac{T}{n(0)} \langle u^2 \rangle = \frac{l_0}{\sqrt{2}} T$$

Таким образом, средняя энергия иона около электрода оказывается $\sim 0.7T$, в то время как на больших расстояниях она равна $1/2T$. Средняя энергия, выносимая ионом в электрод, равна

$$\left(1 + \frac{v_0}{|I|} \langle u^3 \rangle \right) T = \left(1 + l_1 + \frac{l_0^2}{2} \right) T$$

что дает $2.27T$ вместо $2T$ в случае максвелловского распределения.

Численные расчеты коэффициентов l_0 , l_1 и функции $X(-u)$ выполнены на машине М-20.

Поступила 22 VII 1968

ЛИТРАТУРА

1. S e r c i g n a n i C. Elementary Solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their application to the slip—slow problem. Ann. Phys USA, 1962, vol. 20, No. 2.
2. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
3. Ф а д д е в а В. Н., Т е р е н т ъ е в Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М., Гостехиздат, 1954.