

**ОБОСНОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ,
РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ**

А. А. Золочевский
(Харьков)

1. Построение определяющих уравнений для изотропных сред с неодинаковыми свойствами при растяжении и сжатии связано с выбором связи между компонентами тензоров h_{ij} и σ_{ij} , характеризующих кинематический и силовой факторы. Самая общая связь между этими тензорами получена в [1]. Предложенные в [2—9] определяющие уравнения можно считать различными формами конкретизации зависимостей В. В. Новожилова.

Рассмотрим построение физических уравнений, содержащих первый $I_1 = \sigma_{ij}\delta_{ij}$ и второй $I_2 = (\sigma_{ij}\sigma_{ij} - I_1^2)/2$ инварианты тензора σ_{ij} (δ_{ij} — символ Кронекера). Для этого примем существование потенциала

$$(1.1) \quad W = \sigma_e^2/2,$$

где $\sigma_e \geq 0$;

$$(1.2) \quad \sigma_e = \sigma + \sigma_0, \quad \sigma = BI_1, \quad \sigma_0^2 = AI_1^2 + 4CI_2$$

(A, B, C — постоянные). Тогда компоненты тензора h_{ij} определяются законом $h_{ij} = \lambda \partial W / \partial \sigma_{ij}$, где λ — скалярный множитель. Далее, используя соотношения (1.1), (1.2) и зависимости

$$\begin{aligned} \partial W / \partial \sigma &= \partial W / \partial \sigma_0 = \sigma_e, \quad \partial \sigma / \partial \sigma_{ij} = B\delta_{ij}, \\ \partial \sigma_0 / \partial \sigma_{ij} &= [(A - 2C)I_1\delta_{ij} + 2C\sigma_{ij}] / \sigma_0, \end{aligned}$$

имеем

$$(1.3) \quad h_{ij} = \lambda \sigma_e \left[\frac{(A - 2C)I_1\delta_{ij} + 2C\sigma_{ij}}{\sigma_0} + B\delta_{ij} \right].$$

Для нахождения множителя λ образуем смешанный инвариант $L = \sigma_{ij}h_{ij}$ и получим из (1.3) $L = \lambda \sigma_e^2$.

Затем приходим к тензорно-линейным зависимостям

$$(1.4) \quad h_{ij} = \frac{L}{\sigma_e} \left[\frac{(A - 2C)I_1\delta_{ij} + 2C\sigma_{ij}}{\sigma_0} + B\delta_{ij} \right],$$

определяющим поведение материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.

2. Рассмотрим упругое деформирование. В этом случае в (1.4) $h_{ij} \equiv e_{ij}$ и σ_{ij} — компоненты тензоров упругих деформаций и напряжений соответственно, $\lambda = 1$, и, следовательно, $L = \sigma_e^2$. Физические уравнения (1.4) содержат три упругие постоянные: $A \equiv A^0$, $B \equiv B^0$, $C \equiv C^0$, которые можно найти, например, на основе базовых одноосных испытаний на растяжение (+) и сжатие (−) с определением модулей упругости E_+ и E_- и коэффициента Пуассона ν_+ :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} A^0 &= [(E_+)^{-1/2} + (E_-)^{-1/2}]^2/4, \\ B^0 &= [(E_+)^{-1/2} - (E_-)^{-1/2}]/2, \quad C^0 = (A^0 + B^0 \sqrt{A^0})(1 + \nu_+)/2. \end{aligned}$$

Для материалов с одинаковыми свойствами при растяжении и сжатии справедливо равенство $E_+ = E_-$. Тогда в (2.1) $B^0 = 0$, а в (1.2) $\sigma = 0$. При этом определяющие уравнения (1.4) сводятся к закону Гука

$$(2.2) \quad e_{ij} = (A^0 - 2C^0)I_1\delta_{ij} + 2C^0\sigma_{ij}.$$

3. Получим связь между компонентами тензоров скоростей пластических деформаций p_{ij} и напряжений σ_{ij} в упругопластическом теле. Точка

над символом обозначает производную по параметру нагружения t . Воспользуемся зависимостями (1.4), где $h_{ij} \equiv \dot{p}_{ij}$; $A \equiv A_0$, $B \equiv B_0$, $C \equiv C_0$ — скалярные параметры; L — удельная мощность рассеиваемой при пластическом деформировании энергии; σ_e — эквивалентное напряжение.

В качестве меры упрочнения примем $q = \int_0^t \frac{L}{\sigma_e} dt$. Условие пластичности запишем в виде

$$(3.1) \quad \sigma_e = \varphi(q).$$

При $\sigma_e = \varphi(q)$ происходит упругое деформирование, поэтому $L = 0$. Если выполняется условие (3.1) и дополнительно $\dot{\sigma}_e > 0$, то имеет место нагружение, и $L > 0$. Если справедливо (3.1) и выполняется соотношение $\dot{\sigma}_e \leq 0$, то $L = 0$, и происходит разгрузка либо нейтральное нагружение.

Далее рассмотрим случай простого нагружения, когда компоненты тензора напряжений возрастают пропорционально параметру $t \in [0, 1]$: $\sigma_{ij} = t\sigma_{ij}^*$. Звездочкой отмечены значения в конце нагружения. Выполняя операцию интегрирования, преобразуем уравнения (1.4) к виду

$$p_{ij}^* = \left[\frac{(A_0 - 2C_0) I_1^* \delta_{ij} + 2C_0 \sigma_{ij}^*}{\sigma_0^*} + B_0 \delta_{ij} \right] \int_0^1 \frac{L}{\sigma_e} dt.$$

Используя определение меры упрочнения, получим $q^* = \int_0^1 \frac{L}{\sigma_e} dt$ и далее

на основе (3.1) $q^* = v(\sigma_e^*)$. Поэтому окончательно приходим для деформационного варианта теории к следующим физическим зависимостям (звездочку опускаем):

$$(3.2) \quad p_{ij} = v(\sigma_e) \left[\frac{(A_0 - 2C_0) I_1 \delta_{ij} + 2C_0 \sigma_{ij}}{\sigma_0} + B_0 \delta_{ij} \right].$$

Функция $v(\sigma_e)$ может быть определена таблично или аналитически. Наиболее простые способы задания этой функции — степенная зависимость σ_e^n , закон гиперболического синуса $\text{sh}(\sigma_e/a)$, экспоненциальная зависимость $\exp(\sigma_e/b)$ (n, a, b — константы материала). Хотя для последнего представления не выполняется естественное условие $v(0) = 0$, эта функция часто используется при аппроксимации кривых деформирования.

Обсудим методику определения постоянных в полученных уравнениях (3.2) на основе данных базовых экспериментов. Пусть при одноосном растяжении образцов установлена зависимость

$$(3.3) \quad p_{11} = D\sigma_{11}^n.$$

Считаем также, что проведены испытания на кручение с касательными напряжениями σ_{12} и экспериментально найдена связь главных напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{12}$ и $\sigma_{33} = -\sigma_{12}$ ($\sigma_{22} = 0$) с соответствующими главными деформациями, т. е. в главных направлениях

$$(3.4) \quad p_{11} = T_+ \sigma_{11}^n, \quad p_{33} = -T_- |\sigma_{33}|^n.$$

Затем, зная константы материала D, T_+, T_-, n и сравнивая формулы (3.3), (3.4) с аналогичными соотношениями, следующими из (3.2), определяем, полагая $v(\sigma_e) = \sigma_e^n$, три скалярных параметра:

$$(3.5) \quad C_0 = (T_+ + T_-)^{\frac{2}{n+1}} / 4, \quad B_0 = (T_+ - T_-) / \left(2^{n+1} C_0^{\frac{n}{2}} \right), \quad A_0 = \left(D^{\frac{1}{n+1}} - B_0 \right)^2.$$

Для материалов, у которых $T_+ = T_- = 3^{\frac{n+1}{2}} D/2$, получаем из (3.5) $B_0 = 0, 4C_0 = 3A_0$. Тогда из (1.2) следует, что $\sigma = 0$ и эквивалентное на-

пряжение совпадает с точностью до постоянной с интенсивностью напряжений σ_i , т. е. $\sigma_e = \sqrt{A_0} \sigma_i$. В этом случае физические зависимости (3.2) принимают вид

$$p_{ij} = \frac{3}{2} (\sqrt{A_0})^{n+1} \sigma_i^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_{1ij} \right),$$

известный в классической теории пластичности.

Для обоснования определяющих уравнений (3.2) выполним сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными при сложном напряженном состоянии. Поэтому рассмотрим упругопластическое деформирование серого чугуна, близкого к марке СЧ 15-32 [6]. Базовые эксперименты — одноосное растяжение и чистое кручение (с измерением главных деформаций ϵ_{11} , ϵ_{33} образцов из этого материала). В этих испытаниях установлены изотропия упругопластических свойств, независимость упругих деформаций чугуна от вида нагружения и разносопротивляемость при пластическом деформировании. На рис. 1 показаны диаграммы деформирования серого чугуна: 1 — одноосное растяжение, 2 и 3 — кручение (3 соответствует направлению максимального главного напряжения σ_{11} , 2 — минимального главного напряжения $|\sigma_{33}|$). Обработка кривых деформирования позволяет принять такие зависимости: при одноосном растяжении

$$\epsilon_{11} = e_{11} + p_{11}, \quad e_{11} = M \sigma_{11}, \quad p_{11} = D_{11} \sigma_{11}^n,$$

при кручении

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= e_{11} + p_{11}, \quad e_{11} = Q \sigma_{11}, \quad p_{11} = T_+ \sigma_{11}^n, \\ \epsilon_{33} &= e_{33} + p_{33}, \quad e_{33} = -Q |\sigma_{33}|, \quad p_{33} = -T_- |\sigma_{33}|^n. \end{aligned}$$

Значения констант материала: $n = 4,5$, $M = 10^{-4}$ мм²/кг, $Q = 1,40 \cdot 10^{-4}$, $D = 1,32 \cdot 10^{-8}$ (мм²/кг)ⁿ, $T_+ = 4,06 \cdot 10^{-8}$, $T_- = 1,59 \cdot 10^{-8}$. Затем по этим значениям можно найти параметры закона Гука (2.2) и физических уравнений (3.2) и для любого напряженного состояния вычислять значения деформаций $\epsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$.

Обсудим результаты испытания тонкостенных трубчатых образцов из исследуемого материала, нагруженных внутренним давлением и осевым усилием [6]. На рис. 2 сплошными линиями 1 и 2 показаны установленные экспериментально зависимости $\epsilon_{11} - \sigma_{11}$ и $\epsilon_{22} - \sigma_{22}$ при соотношении $\sigma_{11}/\sigma_{22} = 2,3$. Здесь же для сравнения штриховыми линиями изображены аналогичные теоретические результаты. Как видно из рис. 2, совпадение расчетных и экспериментальных данных можно считать удовлетворительным.

4. Получим определяющие уравнения ползучести упрочняющихся материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Для этого воспользуемся зависимостями (1.4), считая, что $h_{ij} \equiv \dot{\epsilon}_{ij}$ и σ_{ij} — компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений соот-

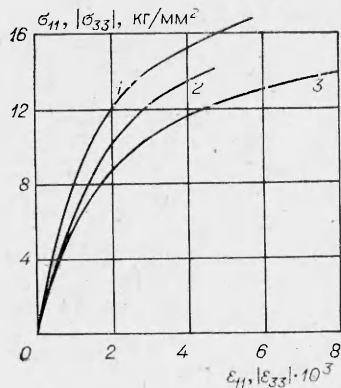


Рис. 1

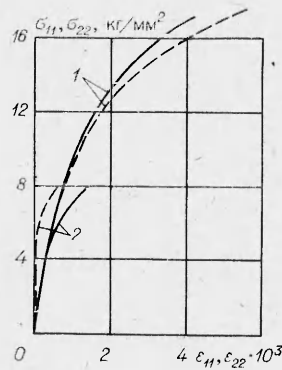


Рис. 2

ветственно; $A \equiv A^*$, $B \equiv B^*$, $C \equiv C^*$ — постоянные; L — удельная мощность рассеиваемой при ползучести энергии; σ_e — эквивалентное напряжение. Точка над символом обозначает дифференцирование по времени t . Для описания упрочнения материалов введем параметр q , характеризующийся кинетическим уравнением,

$$(4.1) \quad dq/dt = R.$$

Правая часть в (4.1) определяется не единственным образом. Можно, например, принять $R = 1$, $R = L$ или $R = L/\sigma_e$.

Полагаем, что удельная мощность рассеяния — функция эквивалентного напряжения и структурного параметра q

$$L = \psi(\sigma_e, q).$$

Примем $L = \sigma_e v(\sigma_e) \chi(q)$. Тогда физические уравнения (1.4) записываются как

$$(4.2) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = v(\sigma_e) \chi(q) \left[\frac{(A^* - 2C^*) I_1 \delta_{ij} + 2C^* \sigma_{ij}}{\sigma_0} + B^* \delta_{ij} \right].$$

Функция $v(\sigma_e)$ может быть взята в одной из форм: степенная зависимость σ_e^n , закон гиперболического синуса $\text{sh}(\sigma_e/a)$, с известными оговорками экспоненциальная зависимость $\exp(\sigma_e/b)$. Для функции $\chi(q)$ возможны представления q^m или $\exp(q/c)$. Здесь n , a , b , m , c — постоянные. Надлежащий выбор функций $v(\sigma_e)$ и $\chi(q)$ связан с вопросами наилучшей аппроксимации кривых ползучести и проводится на основе данных базовых экспериментов. Для неупрочняющихся материалов следует считать $\chi = 1$. В этом случае определяющие уравнения (4.2) превращаются в зависимости, предложенные и экспериментально обоснованные в [9].

Рассмотрим методику определения параметров, входящих в ползученные уравнения (4.2). Для этого используем серию независимых базовых опытов при растяжении, сжатии и кручении образцов из исследуемого упрочняющегося материала в условиях ползучести при постоянных напряжениях. Пусть из обработки кривых ползучести установлена связь между скоростью деформации $\dot{\epsilon}$ и напряжением σ_* , т. е., например, $\dot{\epsilon} = K_+ m t^{m-1} \sigma_*^n$ при одноосном растяжении, $\dot{\epsilon} = -K_- m t^{m-1} |\sigma_*|^n$ ($K_- > 0$) при одноосном сжатии. Считаем, что аналогичный закон связи между скоростью сдвиговой деформации ползучести $\dot{\gamma}$ и касательным напряжением τ имеет место при кручении: $\dot{\gamma} = K m t^{m-1} \tau^n$. Здесь K_+ , K_- , K , m , n — константы материала.

Тогда в физических зависимостях (4.2) можно принять $v(\sigma_e) = \sigma_e^n$ и $\chi(q) = m q^{m-1}$, а в (4.1) $R = 1$, т. е. $q = t$. Записывая затем уравнения (4.2) для каждого из трех рассмотренных случаев одномерного напряженного состояния и сравнивая с приведенными выше аналогичными соотношениями, находим постоянные

$$(4.3) \quad \begin{aligned} A^* &= [K_+^{1/(n+1)} + K_-^{1/(n+1)}]^2 / 4, \\ B^* &= [K_+^{1/(n+1)} - K_-^{1/(n+1)}] / 2, \quad C^* = K^{2/(n+1)} / 4. \end{aligned}$$

Если на основе базовых экспериментов установлено, что $K_+ = K_-$, $K = 3^{\frac{n+1}{2}} K_+$, то из (4.3) определяем

$$A^* = K_+^{2/(n+1)}, \quad B^* = 0, \quad C^* = 3K_+^{2/(n+1)} / 4.$$

В этом случае $\sigma = 0$, $\sigma_0 = \sqrt{A^*} \sigma_i$, σ_i — интенсивность напряжений. Тогда определяющие зависимости (4.2) превращаются в известные уравнения

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} m (\sqrt{A^*})^{n+1} \sigma_i^{n-1} q^{m-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \right),$$

описывающие ползучесть неразносопротивляющихся материалов.

Например, обработка экспериментальных данных ползучести титанового сплава ВТ-9 при температуре 400°C [7] на растяжение, сжатие и кручение приводит к значениям $n = 5,91$, $m = 0,265$, $K_+ = 1,45 \cdot 10^{-14}$ (кг/мм²)^{-nч^{-m}, $K_- = 5,10 \cdot 10^{-15}$, $K = 3,20 \cdot 10^{-13}$. Видно, что данный упрочняющийся материал проявляет существенную разнсопротивляемость растяжению и сжатию.}

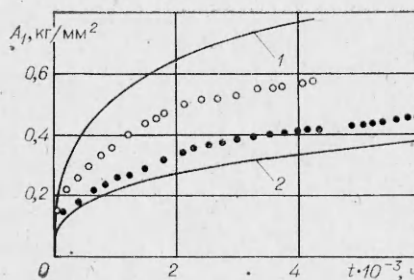


Рис. 3

Далее на основе формул (4.3) можно найти параметры A^* , B^* , C^* и использовать зависимости (4.2) для описания ползучести рассматриваемого титанового сплава при сложном напряженном состоянии. Для этого проведем сравнение теоретических результатов с данными экспериментов [7] на тонкостенных трубках, нагруженных крутящим моментом и осевым (растягивающим или сжимающим) усилием. На рис. 3 показано изменение удельной работы $A_1 = \sigma_{11}\epsilon_{11} + 2\sigma_{12}\epsilon_{12}$ с течением времени. Экспериментальные данные нанесены кружками. Светлые кружки относятся к растяжению с кручением ($\sigma_{11} = 56$ кг/мм², $\sigma_{12} = 26,5$), темные — к сжатию с кручением ($\sigma_{11} = -56$, $\sigma_{12} = 26,5$). Линии 1, 2 — аналогичные расчетные результаты. Учитывая заметную разнсопротивляемость материала и естественный разброс данных при ползучести, совпадение теоретических и экспериментальных результатов можно считать удовлетворительным.

Таким образом, предложенные физические зависимости могут использоваться при описании упругости, пластичности и ползучести изотропных материалов, разнсопротивляющихся растяжению и сжатию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О принципе обработки результатов статических испытаний изотропных материалов.— ПММ, 1951, т. 15, № 6.
2. Ломакин Е. В. Разномодульность композитных материалов.— Механика композит. материалов, 1981, № 1.
3. Цвелодуб И. Ю. К разномодульной теории упругости изотропных материалов.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1977, вып. 32.
4. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости.— М.: Наука, 1982.
5. Никитенко А. Ф. О влиянии третьего инварианта девиатора напряжений на ползучесть неупрочняющихся материалов.— ПМТФ, 1969, № 5.
6. Паняев В. А. Экспериментальное исследование деформации серого чугуна.— В кн.: Сложная деформация твердого тела. Фрунзе: Илим, 1969.
7. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие.— ПМТФ, 1979, № 4.
8. Цвелодуб И. Ю. О некоторых возможных путях построения теории установившейся ползучести сложных сред.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 2.
9. Золочевский А. А. Об учете разнсопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов.— ПМТФ, 1982, № 4.

Поступила 27/IX 1985 г.

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ОДНОМЕРНОГО СТРОЕНИЯ С ЗАДАНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. Г. Колпаков, С. И. Ракин

(Новосибирск)

Задача создания композиционных материалов с заданными свойствами привлекает в настоящее время определенное внимание. В данной работе приводится решение указанной задачи применительно к теплофизическим и жесткостным характеристикам композиционных материа-