Теплофизика и аэромеханика, 2007, том 14, № 3

УДК 534.222.2:533.6.011

ПОВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА ВИХРЯ СКОРОСТИ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ ЗА ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗРЫВОВ*

В.А. ЛЕВИН, Г.А. СКОПИНА

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Изучается поведение вектора вихря скорости на поверхности разрыва, возникающей при обтекании тела сверхзвуковым, неоднородным потоком горючего газа с образованием ударной или детонационной волны. Набегающий поток в общем случае является вихревым с заданным распределением параметров. Получены формулы для компонент вектора вихря в специальной системе координат, связанной с волной. Показано, что в этом случае нормальная по отношению к волне компонента вихря остается непрерывной при переходе через поверхность разрыва, а в случае осесимметричных течений так же остается непрерывной и величина, равная отношению касательной компоненты вихря к плотности, хотя по отдельности сами величины терпят разрыв.

Выражение для вихря за искривленной стационарной ударной волной для течений с постоянными параметрами впервые получено в работе [1] и позже — другими авторами. В общем случае формулы для компонент вектора вихря за произвольной искривленной волной были получены в работе [2] в предположении, что ударная волна имеет бесконечную интенсивность. В работе [3] получена обобщенная формула, в работах [4, 5] — формулы для компонент вектора вихря за ударной волной любой интенсивности при постоянных значениях параметров набегающего потока. В настоящей работе определяется завихренность непосредственно за криволинейной стационарной детонационной волной, находящейся в вихревом сверхзвуковом потоке.

Пусть в стационарном сверхзвуковом вихревом потоке горючего газа расположена детонационная волна. Детонационная волна рассматривается как поверхность сильного разрыва, на которой при сгорании единицы массы газа выделяется величина тепла Q, которая в общем случае может зависеть от параметров набегающего потока (при Q = 0 имеем обычную ударную волну). Движение газа в этом случае описывается следующей системой уравнений:

$$\rho\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i}+\upsilon_i\frac{\partial \rho_i}{\partial x_i}=0,\ \ \frac{\partial p}{\partial x_k}+\rho\upsilon_i\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}=0,\ \ \upsilon_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0. \qquad (1)$$

Здесь $\upsilon_1,\ \upsilon_2,\ \upsilon_3$ — соответствующие компоненты скорости в декартовой системе координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, ρ — плотность, p — давление газа, γ — показатель адиабаты, индексы i, k принимают значение 1, 2, 3, суммирование по i.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00004) и Дальневосточного отделения РАН (проект 2-С0-009).

Соотношения (1) справедливы во всей области течения газа, на самой же поверхности разрыва выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\rho\upsilon_\nu = \rho_0\upsilon_\nu,$$

$$p + \rho\upsilon_\nu^2 = p_0 + \rho_0\upsilon_{0\nu}^2,$$

$$\frac{1}{2}\upsilon_\nu^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\upsilon_{0\nu}^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} + Q, \tag{2}$$

$$\upsilon_\beta = \upsilon_{0\beta},\ \upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau}.$$

Здесь величины с индексом “0” обозначают значения параметров газа перед волной, а величины без индекса — за волной, $\upsilon_\nu = \upsilon_i\nu_i$ — нормальная компонента скорости, $\upsilon_\beta = \upsilon_i\beta_i$ и $\upsilon_\tau = \upsilon_i\tau_i$ — касательные компоненты скорости, ν_i, β_i, τ_i — компоненты вектора нормали и касательных векторов к поверхности разрыва.

Вектор вихря $2\boldsymbol{\omega} = rot\boldsymbol{\upsilon}$ в декартовой системе координат имеет компоненты $2\omega_i = \upsilon_{k,j} - \upsilon_{j,k}$, где индексы *i, j, k* образуют круговую перестановку из 1, 2, 3. Здесь запятая означает производную $\upsilon_{i,j} = \partial\upsilon_i/\partial x_j$ — *i*-й компоненты скорости по *j*-й координате, индексы *i, j* принимают значения 1, 2, 3. Т. е. в декартовой системе координат компоненты вектора вихря вычисляются по формулам:

$$\omega_1 = (\upsilon_{3,2} - \upsilon_{2,3})/2,\ \omega_2 = (\upsilon_{1,3} - \upsilon_{3,1})/2,\ \omega_3 = (\upsilon_{2,1} - \upsilon_{1,2})/2. \tag{3}$$

Для нахождения компонент вектора вихря введем на поверхности разрыва криволинейную ортогональную систему координат, связанную с волной.

Пусть Σ — поверхность детонационной волны, определяемая уравнением

$$x_i = x_i(y^1, y^2), \tag{4}$$

где y^1, y^2 — криволинейные координаты на поверхности, x_1, x_2, x_3 — координаты в декартовой системе.

Векторы с координатами $\partial x_i/\partial y^\alpha = x_{i,\alpha}$ (α = 1, 2) являются векторами, касательными к поверхности Σ.

Пусть в каждой точке поверхности Σ можно построить единичный вектор нормали $\boldsymbol{\nu}$ к этой поверхности, направленный в сторону течения за фронтом. Введем локальную декартову систему координат (q_1, q_2, q_3), такую, что ось q_3 направлена по нормали к Σ, а оси q_1, q_2 совпадают с главными направлениями в касательной плоскости. Пусть Λ_1, Λ_2 – линии пересечения Σ с плоскостями $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ соответственно, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы, касательные к этим линиям, *l, s* — длины дуг линий Λ_1, Λ_2, отсчитываемых в направлении $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, в (4) в качестве параметров y^1, y^2 можно взять параметры *l* и *s* соответственно. Тогда поверхность будет определяться уравнением вида $x_i = x_i(l, s)$.

В этом случае метрический тензор поверхности представляет собой единичную матрицу

$$g_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha}x_{i,\beta} = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, \text{ при } \alpha = \beta \\ 0, \text{ при } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

Здесь и в дальнейшем принято суммирование по повторяющимся индексам, латинские индексы принимают значение 1, 2, 3, греческие — 1, 2.

Вектора **β, τ, ν** являются единичными ортами по осям q_1, q_2, q_3, а $\upsilon_\beta, \upsilon_\tau, \upsilon_\nu$ — соответствующие компоненты скорости $\boldsymbol{\upsilon}$. Введенные таким образом вектора **β**, **τ**, **ν** образуют правую систему координат и для них справедливы соотношения:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}, \ \ \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}, \ \ \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}.$$

Касательные вектора определяются как $\beta = \mathbf{r}_{,l}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_{,s}$, $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ или покомпонентно: $\beta_i = x_{i,\,l}$, $\tau_i = x_{i,\,s}$, где $x_{i,\,l} = \partial x_i / \partial l$, $x_{i,\,s} = \partial x_i / \partial s$.

Вектор нормали $\boldsymbol{\nu}$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$\nu_i \nu_i = 1, \ \ x_{i,\,\alpha} \nu_i = 0. \tag{5}$$

Из дифференциальной геометрии известно, что

$$\nu_{i,\,\alpha} = -\kappa_\alpha x_{i,\,\alpha}, \ \ \alpha = (l, s), \tag{6}$$

где κ_l, κ_s — главные кривизны поверхности Σ. Кривизна κ_α будет положительна, если кривая Λ_α обращена выпуклостью по направлению набегающего потока. Здесь и в дальнейшем принято суммирование по повторяющимся символам, греческие символы принимают значение *l* и *s*.

Проектируя тождество (6) на ν_i и $x_{i,\,\beta}$, найдем:

$$\nu_{i,\,\alpha} \nu_i = 0, \ \ \nu_{i,\,\alpha} x_{i,\,\beta} = -b_{\alpha\beta}, \tag{7}$$

где $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности Σ:

$$\begin{aligned} b_{11} &= x_{i,\,ll} \nu_i = \beta_{i,\,l} \nu_i = \kappa_l, \\ b_{12} &= b_{21} = x_{i,\,ls} \nu_i = \beta_{i,\,s} \nu_i = \tau_{i,\,l} \nu_i = 0, \\ b_{22} &= x_{i,\,ss} \nu_i = \tau_{i,\,s} \nu_i = \kappa_s. \end{aligned} \tag{8}$$

Производная касательного вектора вдоль главных направлений имеет вид

$$x_{i,\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \nu_i. \tag{9}$$

Пусть в пространстве x_i определена некоторая функция $f(x_i)$. Тогда на поверхности Σ определена функция

$$f(x_i(l, s)) = f(l, s).$$

Частные производные функции f по координатам пространства x_i связаны с производными по криволинейным координатам *l* и *s* соотношениями

$$f_{,i} = f_{,n} \nu_i + f_{,\alpha} x_{i,\alpha} = f_{,n} \nu_i + f_{,l} \beta_i + f_{,s} \tau_i, \tag{10}$$

где $f_{,n} = f_{,i} \nu_i$ — производная по нормали.

Вектор завихренности в системе координат, связанной с главными направлениями имеет координаты $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_\beta, \omega_\tau, \omega_\nu\}$, где $\omega_\beta = \omega_i \beta_i$, $\omega_\tau = \omega_i \tau_i$, $\omega_\nu = \omega_i \nu_i$.

Если перейти от производных по декартовым координатам, к производным по поверхностным координатам с помощью соотношения (10), то для i-ой производной компоненты скорости по j-ой координате имеем

$$\upsilon_{i,\,j} = \upsilon_{i,\,n}\nu_i + \upsilon_{i,\,\alpha}x_{i,\,\alpha},$$

и тогда компоненты завихренности (3) примут вид:

$$2\omega_i = \upsilon_{k,n}\nu_j - \upsilon_{j,n}\nu_k + \upsilon_{k,\alpha}x_{j,\alpha} - \upsilon_{j,\alpha}x_{k,\alpha}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Компоненты завихренности в системе координат **β**, **τ**, **ν**:

$$2\omega_\beta = \upsilon_{i,n}\varepsilon_{ijk}x_{j,l}\nu_k + \upsilon_{i,\sigma}\varepsilon_{ijk}x_{j,l}x_{k,\sigma},$$

$$2\omega_\tau = \upsilon_{i,n}\varepsilon_{ijk}x_{j,s}\nu_k + \upsilon_{i,\sigma}\varepsilon_{ijk}x_{j,s}x_{k,\sigma}, \tag{11}$$

$$2\omega_\nu = \upsilon_{i,n}\varepsilon_{ijk}\nu_j\nu_k + \upsilon_{i,\sigma}\varepsilon_{ijk}\nu_j x_{k,\sigma},$$

где ε_{ijk} — тензор Леви–Чивита

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } i, j, k \text{ образуют четную перестановку из } 1, 2, 3, \\ -1, \text{ если } i, j, k \text{ образуют нечетную перестановку из } 1, 2, 3, \\ 0, \text{ если среди } i, j, k \text{ есть два одинаковых индекса.} \end{cases}$$

В соотношениях (11) свертка с ε_{ijk} представляет собой i-ю компоненту следующих векторных произведений:

$$\varepsilon_{ijk}\nu_j\nu_k = (\mathbf{\nu}\times\mathbf{\nu})_i = 0,$$

$$\varepsilon_{ijk}\nu_j x_{k,\,\alpha} = (\mathbf{\nu}\times\mathbf{r}_{,\alpha})_i = -\varepsilon_{ijk}x_{j,\,\alpha}\nu_k = -(\mathbf{r}_{,\alpha}\times\mathbf{\nu})_i = \begin{cases} \tau_i, \text{ при } \alpha = l, \\ -\beta_i, \text{ при } \alpha = s, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk}x_{j,\,\alpha}x_{k,\,\sigma} = (\mathbf{r}_{,\alpha}\times\mathbf{r}_{,\sigma})_i = \begin{cases} 0, \text{ при } \alpha = \sigma, \\ \nu_i, \text{ при } \alpha = l,\ \sigma = s, \\ -\nu_i, \text{ при } \alpha = s,\ \sigma = l. \end{cases}$$

С учетом этих соотношений перепишем (11) в следующем виде:

$$\omega_\beta = (-\upsilon_{i,\,n}\tau_i + \upsilon_{i,\,s}\nu_i)/2, \quad \omega_\tau = (\upsilon_{i,\,n}\beta_i - \upsilon_{i,\,l}\nu_i)/2, \quad \omega_\nu = (\upsilon_{i,\,l}\tau_i - \upsilon_{i,\,s}\beta_i)/2. \tag{12}$$

Таким образом, компоненты вектора вихря в системе координат, связанной с волной, зависят от производных компонент скорости по нормали к ней и главным направлениям. Производные по нормали к волне определяются из уравнения движения, записанного за поверхностью разрыва. Вычислим производные вдоль главных направлений в проекции на **ν**, **β**, **τ**:

$$\upsilon_{i,\alpha}\nu_i = (\upsilon_\nu\nu_i + \upsilon_\sigma x_{i,\sigma})_{,\alpha}\nu_i = \upsilon_{\nu,\alpha}\nu_i\nu_i + \upsilon_{\sigma,\alpha}x_{i,\sigma}\nu_i + \upsilon_\nu\nu_{i,\alpha}\nu_i + \upsilon_\sigma x_{i,\sigma\alpha}\nu_i.$$

Учитывая формулы (5)–(9) получим

$$\upsilon_{i,\alpha}\nu_i = \upsilon_{\nu,\alpha} + \kappa_\alpha\upsilon_\alpha. \tag{13}$$

Аналогично для $\upsilon_{i,\,\alpha}x_{i,\,\beta}$:

$$\upsilon_{i,\alpha}x_{i,\beta} = \upsilon_{\nu,\alpha}\nu_i x_{i,\beta} + \upsilon_{\sigma,\alpha}x_{i,\sigma}x_{i,\beta} + \upsilon_\nu\nu_{i,\alpha}x_{i,\beta} + \upsilon_\sigma x_{i,\sigma\alpha}x_{i,\beta} = \upsilon_{\sigma,\alpha}x_{i,\sigma}x_{i,\beta} - \upsilon_\nu\kappa_\alpha x_{i,\alpha}x_{i,\beta}.$$

Свертка $x_{i,\alpha}x_{i,\beta}$ равна нулю, если индексы $\alpha,\ \beta$ не совпадают, и равна единице при совпадающих индексах. Таким образом

$$\upsilon_{i,\alpha}x_{i,\beta}=\begin{cases}\upsilon_{\beta,\alpha}-\kappa_\alpha\upsilon_\nu,\ \text{при}\ \alpha=\beta,\\ \upsilon_{\beta,\alpha},\ \text{при}\ \alpha\neq\beta.\end{cases} \tag{14}$$

Учитывая соотношения (13), (14) и то, что касательные компоненты скорости не изменяются при переходе через волну детонации, компоненты вектора вихря (12) в системе координат, связанной с волной, определяются следующим образом, перед волной:

$$\begin{gathered}\omega_{0\nu}=(\upsilon_{0\tau,l}-\upsilon_{0\beta,s})/2,\\ \omega_{0\beta}=(-\tau_i\upsilon_{0i,n}+\upsilon_{0\nu,s}+\kappa_s\upsilon_{0\tau})/2,\\ \omega_{0\tau}=(\beta_i\upsilon_{0i,n}-\upsilon_{0\nu,l}-\kappa_l\upsilon_{0\beta})/2;\end{gathered} \tag{15}$$

за волной:

$$\begin{gathered}\omega_{\nu}=(\upsilon_{0\tau,l}-\upsilon_{0\beta,s})/2,\\ \omega_{\beta}=(-\tau_i\upsilon_{i,n}+\upsilon_{\nu,s}+\kappa_s\upsilon_{0\tau})/2,\\ \omega_{\tau}=(\beta_i\upsilon_{i,n}-\upsilon_{\nu,l}-\kappa_l\upsilon_{0\beta})/2.\end{gathered} \tag{16}$$

Производные $\upsilon_{i,n}$ определяются из уравнения движения, записанного на поверхности разрыва,
перед волной

$$\upsilon_{0i,n}=-\left(p_{0,n}\nu_i+p_{0,l}\beta_i+p_{0,s}\tau_i\right)/\rho_0\upsilon_{0\nu}-\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0i,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{i,s}\right)/\upsilon_{0\nu}, \tag{17}$$

за волной

$$\upsilon_{i,n}=-\left(p_{,n}\nu_i+p_{,l}\beta_i+p_{,s}\tau_i\right)/\rho\upsilon_{\nu}-\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{i,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{i,s}\right)/\upsilon_{\nu}. \tag{18}$$

Проектируя (17), (18) на $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\tau}$ и учитывая формулы (14), получим
перед волной:

$$\begin{gathered}\upsilon_{0i,n}\beta_i=-p_{0,l}/\rho_0\upsilon_{0\nu}-\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\beta,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\beta,s}\right)/\upsilon_{0\nu}+\kappa_l\upsilon_{0\beta},\\ \upsilon_{0i,n}\tau_i=-p_{0,s}/\rho_0\upsilon_{0\nu}-\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\tau,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s}\right)/\upsilon_{0\nu}+\kappa_s\upsilon_{0\tau};\end{gathered}$$

за волной:

$$\begin{gathered}\upsilon_{i,n}\beta_i=-p_{,l}/\rho\upsilon_{\nu}-\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\beta,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\beta,s}\right)/\upsilon_{\nu}+\kappa_l\upsilon_{0\beta},\\ \upsilon_{i,n}\tau_i=-p_{,s}/\rho\upsilon_{\nu}-\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\tau,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s}\right)/\upsilon_{\nu}+\kappa_s\upsilon_{0\tau}.\end{gathered}$$

Подставляя эти соотношения в выражения для касательных компонент вихря (15), (16), получим перед волной:

$$\begin{gathered}2\omega_{0\beta}=p_{0,s}/\rho_0\upsilon_{0\nu}+\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\tau,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s}\right)/\upsilon_{0\nu}+\upsilon_{0\nu,s},\\ 2\omega_{0\tau}=-p_{0,l}/\rho_0\upsilon_{0\nu}-\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\beta,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\beta,s}\right)/\upsilon_{0\nu}-\upsilon_{0\nu,l},\end{gathered} \tag{19}$$

за волной:

$$\begin{gathered}2\omega_{\beta}=p_{,s}/\rho\upsilon_{\nu}+\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\tau,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s}\right)/\upsilon_{\nu}+\upsilon_{\nu,s},\\ 2\omega_{\tau}=-p_{,l}/\rho\upsilon_{\nu}-\left(\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\beta,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\beta,s}\right)/\upsilon_{\nu}-\upsilon_{\nu,l}.\end{gathered} \tag{20}$$

Для нахождения касательных компонент вихря за волной воспользуемся законами сохранения массы и импульса на поверхности разрыва (3) и выражением для $\omega_{0\beta}$, $\omega_{0\tau}$ из (19):

$$\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\tau,\,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,\,s}=2\omega_{0\beta}\upsilon_{0\nu}-p_{0,s}/\rho_0+\upsilon_{0\nu}\upsilon_{0\nu,s},$$

$$\upsilon_{0\beta}\upsilon_{0\beta,\,l}+\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\beta,\,s}=2\omega_{0\tau}\upsilon_{0\nu}-p_{0,l}/\rho_0+\upsilon_{0\nu}\upsilon_{0\nu,l},$$

$$p_{,\alpha}/\rho\upsilon_\nu=p_{0,\alpha}/\rho_0\upsilon_{0\nu}+\upsilon_{0\nu,\alpha}-\upsilon_{\nu,\alpha}+(\upsilon_{0\nu}-\upsilon_\nu)\left(\rho_0\upsilon_{0\nu,\alpha}+\upsilon_{0\nu}\rho_{0,\alpha}\right)/\upsilon_{0\nu}\rho_0,$$

$$\upsilon_\nu=\rho_0\upsilon_{0\nu}/\rho.$$

Подставив эти соотношения в выражение (20), получим для компонент вектора вихря следующие формулы:

$$\omega_\nu=\left(\upsilon_{0\tau,\,l}-\upsilon_{0\beta,\,s}\right)/2,$$

$$\omega_\beta=\frac{\rho}{\rho_0}\omega_{0\beta}-\frac{(\rho_0-\rho)^2}{2\rho\rho_0}\upsilon_{0\nu,s}+\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\upsilon_{0\nu}\rho_{0,s}}{2\rho_0}+\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{p_{0,s}}{2\upsilon_{0\nu}\rho_0},$$

$$\omega_\tau=\frac{\rho}{\rho_0}\omega_{0\tau}+\frac{(\rho_0-\rho)^2}{2\rho\rho_0}\upsilon_{0\nu,l}-\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\upsilon_{0\nu}\rho_{0,l}}{2\rho_0}-\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{p_{0,l}}{2\upsilon_{0\nu}\rho_0}.$$

Таким образом нормальная компонента завихренности остается непрерывной функцией $\omega_\nu=\omega_{0\nu}$ при переходе через поверхность разрыва, а компонента вихря в любом из двух основных направлений линий главных кривизн зависит от начальной завихренности в этом же направлении, производных параметров газа в перпендикулярном направлении, самих параметров газа и отношения плотностей ρ/ρ_0.

В случае осесимметричного потока, когда производная вдоль одного из главных направлений равна нулю $(\partial/\partial s)$, для компоненты вихря в перпендикулярном направлении выполняется закон сохранения величины $\omega_\beta/\rho=\omega_{0\beta}/\rho_0$, хотя сами величины ω_β и ρ терпят разрыв, как и в случае нестационарных течений [6].

Если параметры газа перед волной являются постоянными, то завихренность перед волной также равна нулю, соответственно и нормальная компонента вектора вихря будет равна нулю, а касательные компоненты вектора вихря будут зависеть от произведения кривизны на касательную компоненту скорости в перпендикулярном направлении и на множитель, зависящий от отношения плотностей, который в свою очередь является функцией параметров, определяющих состояние среды и величины тепла, подведенного к единице массы газа.

$$\omega_\beta=\frac{1}{2}\kappa_s\upsilon_{0\tau}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\Big/\frac{\rho}{\rho_0},$$

$$\omega_\tau=-\frac{1}{2}\kappa_l\upsilon_{0\beta}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\Big/\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Результаты полностью совпадают с формулами для вычисления величины вихря за криволинейной стационарной ударной волной при постоянных значениях начальных параметров газа, полученными в работах [1–5]. Из этих формул следует, что с возрастанием числа Маха, завихренность также будет увеличиваться и что при прочих равных условиях величина завихренности за волной детонации будет меньше, чем за ударной волной, поскольку величина ρ/ρ_0 уменьшается с увеличением энерговыделения в волне.

Рассмотрим осесимметричное течение за детонационной волной с постоянными параметрами газа перед волной детонации. В этом случае отлична от нуля только нормальная вектору скорости составляющая вихря

$$\omega_\tau = -\frac{1}{2}\kappa u_0 \cos\alpha \left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \bigg/ \frac{\rho}{\rho_0},$$

где u_0 — скорость невозмущенного потока, α — угол наклона скачка относительно направления невозмущенного потока, κ — кривизна скачка. Кривизна скачка является убывающей функцией и будет равна нулю в точке перехода детонационной волны в волну Чепмена–Жуге для осесимметричных течений или стремиться к нулю для течений с плоскими волнами [7]. В точке, где скачок является прямым ($\cos\alpha = 0$), вихрь равен нулю. Соответственно где-то на промежутке вихрь будет достигать максимума.

Отношения плотностей ρ/ρ_0 определяются из законов сохранения на поверхности разрыва (2)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1+\gamma M_{0n}^2 + \sqrt{\left(M_{0n}^2 - 1\right)^2 - qM_{0n}^2}}{(\gamma-1)M_{0n}^2 + q/(\gamma+1) + 2}. \qquad (21)$$

Здесь $M_{0n} = M_0 \sin\alpha$, $M_0 = u_0/a_0$ — число Маха, a_0 — скорость звука, $q = 2Q(\gamma^2-1)\big/a_0^2$ — безразмерная величина тепла подведенного к единице массы газа, для ударной волны $q = 0$.

В соотношении (21) подкоренное выражение должно быть неотрицательным, что в свою очередь дает пределы, в которых возможно обтекание тела $\alpha_J \le \alpha \le \pi/2$, где α_J — угол наклона касательной к волне в точке перехода волны в режим Чепмена–Жуге

$$\alpha_J = \arcsin\left(\frac{1}{M_0}\sqrt{\frac{2+q+\sqrt{q(4+q)}}{2}}\right). \qquad (22)$$

Соотношение (22) в свою очередь позволяет найти ограничения для параметров задачи $0 \le q \le q_*$, где $q_* = \left(M_0 - \frac{1}{M_0}\right)^2$, $M_{0*} \le M_0 \le \infty$ при $M_{0*} = \sqrt{(2+q+\sqrt{q(4+q)})/2}$.

Тангенс угла наклона касательной к волне равен

$$tg\alpha_J = \sqrt{\frac{2+q+\sqrt{q(4+q)}}{2\left(M_0^2-1\right)-q-\sqrt{q(4+q)}}}.$$

При критических значениях параметров задачи $q = q_*$ или $M_0 = M_{0*}$, $tg\alpha_J \to \infty$, $\alpha \to \pi/2$. С ростом M_0 угол наклона касательной к волне уменьшается, тепловыделение же увеличивает угол наклона касательной.

Рассмотрим течение за участком волны детонации, предшествующее наступлению режима Чепмена–Жуге, когда параметры газа являются постоянными. В качестве примера предположим, что при обтекании некоего тела образуется волна вида $R^2 = \dfrac{1}{a-x} - b,$ которая в точке x_J переходит в режим Чепмена–Жуге. Функция R равна нулю в точке $x_0 = a - 1/b,$ за точкой $x = x_J$ волна является прямолинейной.

Условия в точке перехода в режим Чепмена–Жуге выполняются при следующих значениях параметров функции:

$$a = 3tg^{-2/3}\alpha_J \big/ 2, \quad b = 3tg^{2/3}\alpha_J \big/ 4, \quad x_J = tg^{-2/3}\alpha_J \big/ 2.$$

Тогда во всей области течения волну можно представить как следующую функцию:

$$R(x) = \begin{cases} \pm \dfrac{tg^{\frac{1}{3}}\alpha_J}{2}\sqrt{\dfrac{6tg^{\frac{2}{3}}\alpha_J x - 1}{3 - 2tg^{\frac{2}{3}}\alpha_J x}}, & \text{при } x_0 \le x \le x_J, \\ \pm tg\alpha_J x, & \text{при } x \ge x_J. \end{cases}$$

График волны детонации $R(x)$ и касательной к волне при различных значениях числа Маха приведен на рис. 1. Точками на графике показаны точки перехода волны в режим Чепмена–Жуге. За этими точками волна представляет собой прямую линию. Из рисунка видно, что чем больше число Маха, тем меньше угол наклона касательной к волне и тем волна ближе к поверхности тела.

На рис. 2 представлен график завихренности для детонационной осесимметричной волны простейшей формы, дающий представление о распределении завихренности $\omega = -2\omega_\tau / u_0$ при различных значениях числа Маха для $q = 10, \quad \gamma = 1,4.$

Вихрь равен нулю в точке, в которой волна является прямой и в точке перехода волны в характеристику. На этом промежутке вихрь достигает максимума. С ростом числа Маха, завихренность также возрастает.

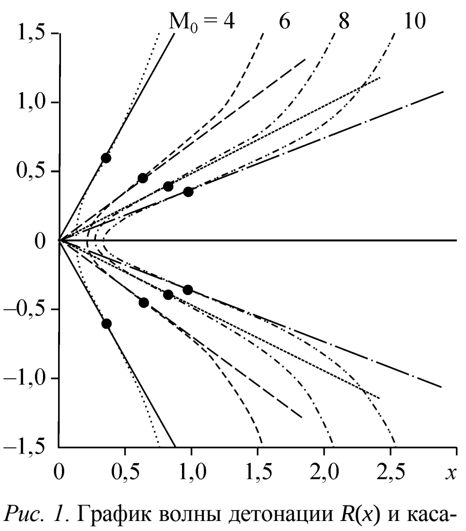

Рис. 1. График волны детонации $R(x)$ и касательной к волне при различных значениях числа Маха M_0 для $q = 10$, $\gamma = 1,4$.

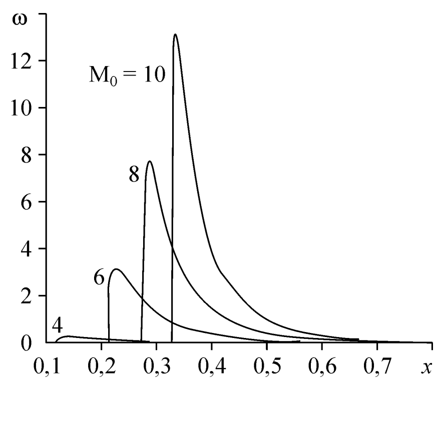

Рис. 2. График завихренности $\omega = -2\omega_\tau/u_0$ при различных значениях числа Маха для $q = 10$, $\gamma = 1,4$.

Таким образом, в работе исследована зависимость величины завихренности потока непосредственно за стационарной детонационной волной. Получены формулы для компонент вектора вихря в сопутствующей системе координат. Показано, что в этом случае нормальная компонента вектора вихря остается непрерывной функцией при переходе через поверхность разрыва.

Для осесимметричных течений выполняется закон сохранения величины ω_β / ρ при любых распределениях параметров газа в набегающем потоке, независимо от того является ли волна ударной или детонационной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Truesdell C.** On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // J. Aeronaut Sci. — 1952. — No. 19. — P. 826–828.
2. **Лайтхилл М.** Динамика диссоциирующего газа // Вопросы ракетной техники: Сб. науч. тр. — М.: Изд-во иностр. лит-ры. — 1957. — № 6. — С. 41–60.
3. **Hayes W.D.** The vortycity jump across a gasdynamic discontinuities // J. Fluid Mech. — 1957. — No. 2. — P. 595–600.
4. **Майкапар Г.И.** Вихри за головной ударной волной // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1968. — № 4. — С. 162–165.
5. **Русанов В.В.** Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. — Москва, 1973. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 18).
6. **Левин В.А., Скопина Г.А.** Распространение волн детонации в закрученных потоках газа // ПМТФ. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 3–6.
7. **Левин В.А., Черный Г.Г.** Асимптотические законы поведения детонационных волн // Прикладная математика и механика. — 1967. — Т. 31, № 3. — С. 393–405.

Статья поступила в редакцию 22 января 2007 г.