

УДК 536.24

## **Кольцевые ребра с пошаговым изменением толщины и зависящими от температуры коэффициентами теплопроводности и теплоотдачи в условиях конвективно-радиационного теплообмена**

**М.С.М. Барфоруш, С. Саедодин**

*Университет Семнана, Иран*

E-mail: ms.motaghedi@yahoo.com

Анализируется распределение температуры в кольцевых ребрах с пошаговым уменьшением их локального поперечного сечения при конвективно-радиационном теплообмене. Предполагается, что теплопроводность материала ребра линейно зависит от температуры, а коэффициент теплоотдачи является степенной функцией температуры поверхности. Уравнение энергии в рассматриваемой математической модели учитывает ненулевые температуры конвекции и теплоотвод излучением. Для получения аналитического решения применяется метод дифференциальных преобразований. Для доказательства достоверности результатов приведено точное аналитическое решение для частного случая. Представленная модель более реалистично отображает задачу эффективности использования кольцевых ребер с пошаговым уменьшением локального поперечного сечения по сравнению с другими моделями, применяемыми в существующих инженерных приложениях. В настоящей работе исследуется влияние кондуктивно-конвекционного и кондуктивно-радиационного параметров, температуры теплоотдачи на распределение температуры в различных сечениях при изменении их толщины и расположения. Предполагается, что полученные результаты будут способствовать разработке и оценке эффективности применения кольцевых ребер с пошаговым уменьшением локального поперечного сечения для изменения теплоотдачи.

**Ключевые слова:** кольцевые ребра с пошаговым уменьшением локального поперечного сечения, конвективно-радиационные потери тепла, аналитическое решение.

### **Введение**

Изучение оребренных поверхностей или ребер всегда было актуальной темой исследований в области теплообмена. Такие поверхности способствуют отводу тепла с первичной горячей поверхности. Они находят применение в рефрижераторах, упрощая отвод тепла в окружающую среду, кроме того, широко используются во многих практических приложениях, таких как системы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха, в двигателях внутреннего сгорания, компрессорах, автомобилях, солнечных коллекторах, в оборудовании для химического производства, в электронных приборах и др. Как упоминалось ранее, основной целью оребрения является интенсификация теплообмена (конвективного, радиационного и конвективно-радиационного) между поверхностью, к которой примыкает основание ребра, являющейся в большинстве случаев горячей, и окружающей его жидкостью. Всестороннее обсуждение этой проблемы можно найти в учебнике [1]. Кроме того, критический обзор анализа эффективности этих распространенных элементов представлен в работе [2]. Анализируя изменение температуры в ребрах, обычно полагают, что по поперечному сечению ребра оно незначительно.

Таким образом, дифференциальное уравнение энергии в частных производных, записанное для ребра, можно упростить до обыкновенного дифференциального уравнения, которое имеет однозначное решение [3]. В дополнение к этому упрощению предположение о постоянстве теплофизических свойств и/или неизменности коэффициента теплопередачи уменьшают сложность решения математической модели уравнения энергии для ребер, и это дает исследователям шанс найти замкнутые аналитические решения для некоторых случаев, описанных и исследованных в [1].

Из фундаментальных исследований по теплопереносу известно, что теплопроводность материалов не является постоянной [4]. При большом перепаде температур в ребре теплопроводность может существенно изменяться от его основания до вершины, при этом разброс сильно зависит от материала, из которого изготовлено ребро. Кроме того, в реальной среде коэффициент теплоотдачи также изменяется вдоль ребра. Здесь имеют место два предположения, которые представляется желательным учитывать при моделировании уравнения энергии для ребер. Первое заключается в том, что коэффициент теплоотдачи является функцией пространственной координаты вдоль ребра. Второе подразумевает, что коэффициент может варьироваться в зависимости от разности локальных температур между поверхностью ребер и окружающей жидкостью. Эти предположения обсуждались во многих статьях, касающихся анализа эффективности ребер [5–10], и не нуждаются в рассмотрении в настоящей работе.

Одна из разновидностей оребренных поверхностей, имеющих широкое применение, — поверхность с кольцевыми (радиальными) ребрами прямоугольного сечения. В последнее время появилось много аналитических решений для задач с этим типом ребер [11–15]. Однако при практическом применении кольцевое ребро с пошаговым уменьшением локального поперечного сечения (ПУС) по сравнению с кольцевым ребром с постоянной площадью поперечного сечения может значительно увеличить скорость передачи тепла и, таким образом, способствовать эффективному использованию материала ребра. Существует ряд публикаций, посвященных изучению свойств ребер с пошаговым уменьшением локального поперечного сечения [16–20]. В одной из пионерских работ в этом направлении [16] рассматривалась оптимизация ступенчатых прямоугольных ребер при конвективном теплообмене. Авторы работы [17] разработали численное решение для распределения температуры в конвективно-радиационном ребре с ПУС с зависимой от температуры теплопроводностью и с конвективным нагревом донной части. В работе [18] для оценки распределения температуры с учетом излучения в прямых ребрах со ступенчатым изменением толщины использовалась приближенная аналитическая схема метода гомотопического возмущения. Авторами [19] исследовалось температурное поле в таком же профиле, что и в работе [18], но для радиальных ребер. В работе [20] были предложены точные и приближенные аналитические методы анализа теплотехнических характеристик и оптимизации массивов кольцевых ребер с ПУС при конвективном теплоотводе. Также в работе [21] был реализован метод дифференциальных преобразований для анализа температурного поля и соответствующих тепловых напряжений в кольцевом диске с переменной толщиной и зависимыми от температуры коэффициентом теплоотдачи и внутренним тепловыделением.

Несмотря на достигнутые успехи, совершенствование прогнозирования теплообмена в кольцевых ребрах, в частности, в ребрах с ПУС и с нелинейными параметрами по-прежнему остается актуальным. Представленная работа посвящена анализу распределения температуры в кольцевых ребрах с ПУС с температурозависимой теплопроводностью, степенным коэффициентом теплоотдачи и ненулевыми температурами конвективного стока и теплоотода излучением. Предлагаемая модель до сих пор не исследовалась. Кроме того, она охватывает более широкий диапазон условий ее применения. Метод дифференциальных преобразований (МДП) используется как аналитический инструмент. Он основан на разложении в ряд Тейлора и впервые был предложен Чжоу [22] в 1986 году для решения линейных и нелинейных задач с начальными условиями, которые

возникают в электрических цепях. Этот метод затем использовался другими исследователями [6, 14, 23–25], доказавшими его способность обеспечивать достаточно хорошее приближение для нелинейного дифференциального уравнения, особенно в области теплообмена [26]. Решение дифференциального уравнения, полученное МДП, записывается в виде полинома. В разделе 2 будет кратко описана концепция дифференциальных преобразований.

В настоящем исследовании результаты для распределения температуры представлены в виде функций девяти параметров, описывающих тепловые характеристики кольцевых ребер с ПУС. К ним относятся: параметр теплопроводности  $A$ , показатель  $m$ , связанный с коэффициентом конвективной теплоотдачи, конвективно-кондуктивный параметр  $Nc$ , радиационно-кондуктивный параметр  $Nr$ , безразмерная температура теплоотдачи  $\theta_a$ , безразмерный параметр примыкания  $\lambda$ , показатель толщины  $\beta$ , отношение внутреннего и наружного радиусов ребра  $R_b$ , отношение толщины ребра к радиусу  $t_b$ .

### 1. Постановка задачи

Кольцевое ребро с сечением  $t$  у основания и дальнейшим ступенчатым изменением толщины, с внутренним радиусом ребра  $r_b$ , радиусом соединения в ребре  $r_j$  и внешним радиусом  $r_l$  показано на рис. 1. Ребро примыкает к контактной поверхности, имеющей фиксированную температуру  $T_b$ , и отводит тепло путем одновременной конвекции и излучения в окружающую среду. Обе температуры конвективного и радиационного теплоотвода обозначаются  $T_a$ . Уравнения энергетического баланса для дифференциального элемента ребра будут иметь вид

$$\frac{t}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[ k(T_1) r \frac{dT_1}{dr} \right] - 2h(T_1)(T_1 - T_a) - 2\sigma\varepsilon(T_1^4 - T_a^4) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\beta t}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[ k(T_2) r \frac{dT_2}{dr} \right] - 2h(T_2)(T_2 - T_a) - 2\sigma\varepsilon(T_2^4 - T_a^4) = 0, \quad (2)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — температуры ребер с ПУС в толстом и тонком сечениях соответственно. Тепловые граничные условия, описывающие нагрев внутренних и наружных радиусов диска, можно записать следующим образом:

$$r = r_b \quad T_1 = T_b, \quad (3)$$

$$r = r_j \quad T_1 = T_2, \quad (4)$$

$$r = r_j, \quad \beta k(T_2) \frac{dT_2}{dr} = k(T_1) \frac{dT_1}{dr} -$$

$$-h(T_1)(1 - \beta)(T_1 - T_a) -$$

$$-2\sigma\varepsilon(1 - \beta)(T_1^4 - T_a^4), \quad (5)$$

$$r = r_l, \quad \frac{dT_2}{dr} = 0. \quad (6)$$

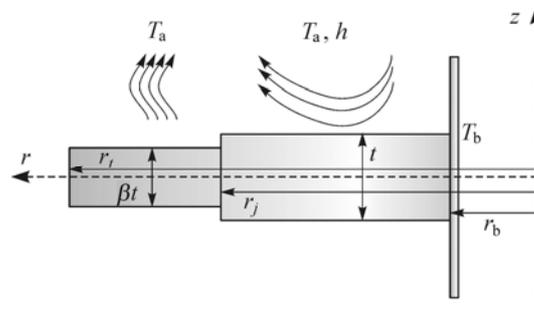


Рис. 1. Геометрия кольцевого ребра с ПУС.

Теплопроводность материала ребра и коэффициент теплоотдачи считаются функциями температуры и записываются в виде

$$k(T_1) = k_0 [1 + a(T_1 - T_a)], \quad (7)$$

$$k(T_2) = k_0 [1 + a(T_2 - T_a)], \quad (8)$$

$$h(T_1) = h_b \left[ \frac{T_1 - T_a}{T_b - T_a} \right]^m, \quad (9)$$

$$h(T_2) = h_b \left[ \frac{T_2 - T_a}{T_b - T_a} \right]^m, \quad (10)$$

где  $k_0$  — коэффициент теплопроводности ребра при температуре конвективного теплоотвода,  $h_b$  — коэффициент конвективного теплопереноса, соответствующий основной температуре ребра; константа  $a$  является мерой изменения теплопроводности в зависимости от температуры. Введем следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \theta = \frac{T}{T_b}, \quad \theta_1 = \frac{T_1}{T_b}, \quad \theta_2 = \frac{T_2}{T_b}, \quad \theta_a = \frac{T_a}{T_b}, \quad R_b = \frac{r_b}{r_i}, \quad R = \frac{r - r_i}{r_b - r_i}, \quad A = aT_b, \\ t_b = \frac{t}{r_i}, \quad Nc = \frac{r_i h_b T_b^m}{k_0 (T_b - T_a)^m}, \quad Nr = \frac{r_i \sigma \varepsilon T_b^3}{k_0}, \quad \lambda = \frac{r_j - r_i}{r_b - r_i}, \end{aligned} \quad (11)$$

тогда постановка задачи для ребра сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(R_b - 1) + 1} \cdot \frac{1}{(R_b - 1)^2} \cdot \frac{d}{dR} \left\{ (R(R_b - 1) + 1) [1 + A(\theta_1 - \theta_a)] \frac{d\theta_1}{dR} \right\} - \\ - \frac{2Nc}{t_b} (\theta_1 - \theta_a)^{m+1} - \frac{2Nr}{t_b} (\theta_1^4 - \theta_a^4) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(R_b - 1) + 1} \cdot \frac{1}{(R_b - 1)^2} \cdot \frac{d}{dR} \left\{ (R(R_b - 1) + 1) [1 + A(\theta_2 - \theta_a)] \frac{d\theta_2}{dR} \right\} - \\ - \frac{2Nc}{\beta t_b} (\theta_2 - \theta_a)^{m+1} - \frac{2Nr}{\beta t_b} (\theta_2^4 - \theta_a^4) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

со следующими граничными условиями:

$$R = 0, \quad \frac{d\theta_2}{dR} = 0, \quad (14)$$

$$R = \lambda, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} R = \lambda, \quad \beta(1 + A(\theta_2 - \theta_a)) \frac{d\theta_2}{dR} = (1 + A(\theta_1 - \theta_a)) \frac{d\theta_1}{dR} + \\ + Nc(1 - \beta)(R_b - 1)(\theta_1 - \theta_a)^{m+1} + Nr(1 - \beta)(R_b - 1)(\theta_1^4 - \theta_a^4), \end{aligned} \quad (16)$$

$$R = 1, \quad \theta_1 = 1. \quad (17)$$

## 2. Метод дифференциальных преобразований

Пусть  $x(t)$  — аналитическая функция в области  $D$ ,  $t = t_i$  — произвольная точка в этой области. Функция  $x(t)$  представлена степенным рядом с центром в  $t_i$ . Функция разложения в ряд Тейлора  $x(t)$  имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=t_i}, \quad \forall t \in D. \quad (18)$$

Частный случай уравнения (18), когда,  $t_i = 0$ , представляет собой разложение  $x(t)$  в ряд Маклорена и имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0}. \quad (19)$$

Дифференциальные преобразования функции  $x(t)$  определяется следующим образом:

$$X(k) = \frac{(H)^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad (20)$$

где  $x(t)$  — исходная функция, а  $X(k)$  — преобразованная функция, известная как Т-функция. Дифференциальный спектр  $X(k)$  заключен в интервале  $t \in [0, H]$ , где  $H$  — константа. Дифференциальное обратное преобразование  $X(k)$  определяется следующим образом:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t}{H} \right)^k X(k). \quad (21)$$

Функция  $x(t)$  состоит из Т-функций  $X(k)$ , и ее значение определяется суммой Т-функций и их коэффициентов  $(t/H)^k$ . В реальных приложениях при правильном выборе постоянной  $H$  дискретный элемент спектра быстро уменьшается для больших значений аргумента  $k$ , поэтому функция  $x(t)$  выражается посредством конечного ряда, а уравнение (21) можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{t}{H} \right)^k X(k). \quad (22)$$

Математические операции, выполняемые с помощью метода дифференциального преобразования, приведены в таблице.

**Таблица**  
**Фундаментальные операции метода дифференциального преобразования**

Исходная функция	Преобразованная функция
$x(t) = \alpha f(t) \pm \beta g(t)$	$X(k) = \alpha F(k) \pm \beta G(k)$
$x(t) = df(t)/dt$	$X(k) = (k+1)F(k+1)$
$x(t) = d^2 f(t)/dt^2$	$X(k) = (k+1)(k+2)F(k+2)$
$x(t) = t^m$	$X(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$
$x(t) = \exp(\lambda t)$	$X(k) = \lambda^k / k!$
$x(t) = f(t)g(t)$	$X(k) = \sum_{l=0}^k F(l)G(k-l)$

### 3. Решение методом дифференциальных преобразований

Используем дифференциальное преобразование уравнений (12, 13), принимая во внимание  $R$  и учитывая, что  $H = 1$ , и получаем в соответствии с таблицей:

— для кольцевых ребер с ПУС при  $m = 0$

$$\begin{aligned}
 & (1 - A\theta_a)(k+2)(k+1)\Theta_1(k+2) + A \left( \sum_{l=0}^k \Theta_1(l)(k+2-l)(k+1-l)\Theta_1(k+2-l) \right) + \\
 & \quad + A \left( \sum_{l=0}^k (l+1)\Theta_1(l+1)(k+1-l)\Theta_1(k+1-l) \right) + \\
 & \quad + (1 - A\theta_a)(R_b - 1) \left( \sum_{l=0}^k (l+2)(l+1)\Theta_1(l+2)\delta(k-1-l) \right) + \\
 & \quad + A(R_b - 1) \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_1(v)(m+2-v)(m+1-v)\Theta_1(m+2-v) \right) \right) + \\
 & \quad + A(R_b - 1) \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m (v+1)\Theta_1(v+1)(m+1-v)\Theta_1(m+1-v) \right) \right) + \\
 & \quad + (1 - A\theta_a)(R_b - 1)(k+1)\Theta_1(k+1) + A(R_b - 1) \left( \sum_{l=0}^k \Theta_1(l)(k+1-l)\Theta_1(k+1-l) \right) - \\
 & \quad - \frac{2Nr(R_b - 1)^2}{t_b} \left( \sum_{m=0}^k \Theta_1(k-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_1(m-v) \left( \sum_{w=0}^v \Theta_1(v-w)\Theta_1(w) \right) \right) \right) + \quad (23) \\
 & \quad + \left( -\frac{2Nc}{t_b} \right) (R_b - 1)^3 \left( \sum_{l=0}^k \Theta_1(l)\delta(k-1-l) \right) + \left( -\frac{2Nc}{t_b} \right) (R_b - 1)^2 \Theta_1(k) - \\
 & \quad - \frac{2Nr(R_b - 1)^3}{t_b} \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_1(m-v) \left( \sum_{w=0}^v \Theta_1(v-w) \left( \sum_{u=0}^w \Theta_1(w-u)\Theta_1(u) \right) \right) \right) \right) + \\
 & \quad + \left( \frac{2Nc\theta_a}{t_b} + \frac{2Nr\theta_a^4}{t_b} \right) (R_b - 1)^2 \delta(k) + \left( \frac{2Nc\theta_a}{t_b} + \frac{2Nr\theta_a^4}{t_b} \right) (R_b - 1)^3 \delta(k-1) = 0, \\
 & (1 - A\theta_a)(k+2)(k+1)\Theta_2(k+2) + A \left( \sum_{l=0}^k \Theta_2(l)(k+2-l)(k+1-l)\Theta_2(k+2-l) \right) + \\
 & \quad + A \left( \sum_{l=0}^k (l+1)\Theta_2(l+1)(k+1-l)\Theta_2(k+1-l) \right) + \\
 & \quad + (1 - A\theta_a)(R_b - 1) \left( \sum_{l=0}^k (l+2)(l+1)\Theta_2(l+2)\delta(k-1-l) \right) + \\
 & \quad + A(R_b - 1) \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_2(v)(m+2-v)(m+1-v)\Theta_2(m+2-v) \right) \right) + \\
 & \quad + A(R_b - 1) \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m (v+1)\Theta_2(v+1)(m+1-v)\Theta_2(m+1-v) \right) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - A\theta_a)(R_b - 1)(k + 1)\Theta_2(k + 1) + A(R_b - 1)\left(\sum_{l=0}^k \Theta_2(l)(k + 1 - l)\Theta_2(k + 1 - l)\right) - \\
& - \frac{2Nr(R_b - 1)^2}{\beta t_b}\left(\sum_{m=0}^k \Theta_2(k - m)\left(\sum_{v=0}^m \Theta_2(m - v)\left(\sum_{w=0}^v \Theta_2(v - w)\Theta_2(w)\right)\right)\right) + \quad (24) \\
& + \left(-\frac{2Nc}{\beta t_b}\right)(R_b - 1)^3\left(\sum_{l=0}^k \Theta_2(l)\delta(k - 1 - l)\right) + \left(-\frac{2Nc}{\beta t_b}\right)(R_b - 1)^2\Theta_2(k) - \\
& - \frac{2Nr(R_b - 1)^3}{\beta t_b}\left(\sum_{m=0}^k \delta(k - 1 - m)\left(\sum_{v=0}^m \Theta_2(m - v)\left(\sum_{w=0}^v \Theta_2(v - w)\left(\sum_{u=0}^w \Theta_2(w - u)\Theta_2(u)\right)\right)\right)\right) + \\
& + \left(\frac{2Nc\theta_a}{\beta t_b} + \frac{2Nr\theta_a^4}{\beta t_b}\right)(R_b - 1)^2\delta(k) + \left(\frac{2Nc\theta_a}{\beta t_b} + \frac{2Nr\theta_a^4}{\beta t_b}\right)(R_b - 1)^3\delta(k - 1) = 0;
\end{aligned}$$

— для кольцевых ребер с ПУС при  $m = 2$

$$\begin{aligned}
& (1 - A\theta_a)(k + 2)(k + 1)\Theta_1(k + 2) + A\left(\sum_{l=0}^k \Theta_1(l)(k + 2 - l)(k + 1 - l)\Theta_1(k + 2 - l)\right) + \\
& + A\left(\sum_{l=0}^k (l + 1)\Theta_1(l + 1)(k + 1 - l)\Theta_1(k + 1 - l)\right) + \\
& + (1 - A\theta_a)(R_b - 1)\left(\sum_{l=0}^k (l + 2)(l + 1)\Theta_1(l + 2)\delta(k - 1 - l)\right) + \\
& + A(R_b - 1)\left(\sum_{m=0}^k \delta(k - 1 - m)\left(\sum_{v=0}^m \Theta_1(v)(m + 2 - v)(m + 1 - v)\Theta_1(m + 2 - v)\right)\right) + \\
& + A(R_b - 1)\left(\sum_{m=0}^k \delta(k - 1 - m)\left(\sum_{v=0}^m (v + 1)\Theta_1(v + 1)(m + 1 - v)\Theta_1(m + 1 - v)\right)\right) + \\
& + (1 - A\theta_a)(R_b - 1)(k + 1)\Theta_1(k + 1) + A(R_b - 1)\left(\sum_{l=0}^k \Theta_1(l)(k + 1 - l)\Theta_1(k + 1 - l)\right) - \\
& - \frac{2Nr(R_b - 1)^2}{t_b}\left(\sum_{m=0}^k \Theta_1(k - m)\left(\sum_{v=0}^m \Theta_1(m - v)\left(\sum_{w=0}^v \Theta_1(v - w)\Theta_1(w)\right)\right)\right) + \quad (25) \\
& + \left(-\frac{6Nc\theta_a^2}{t_b}\right)(R_b - 1)^3\left(\sum_{l=0}^k \Theta_1(l)\delta(k - 1 - l)\right) + \left(-\frac{6Nc\theta_a^2}{t_b}\right)(R_b - 1)^2\Theta_1(k) - \\
& - \frac{2Nr(R_b - 1)^3}{t_b}\left(\sum_{m=0}^k \delta(k - 1 - m)\left(\sum_{v=0}^m \Theta_1(m - v)\left(\sum_{w=0}^v \Theta_1(v - w)\left(\sum_{u=0}^w \Theta_1(w - u)\Theta_1(u)\right)\right)\right)\right) - \\
& - \frac{2Nc(R_b - 1)^3}{t_b}\left(\sum_{m=0}^k \delta(k - 1 - m)\left(\sum_{v=0}^m \Theta_1(m - v)\left(\sum_{w=0}^v \Theta_1(v - w)\Theta_1(w)\right)\right)\right) + \\
& + \frac{6Nc\theta_a^2(R_b - 1)^3}{t_b}\left(\sum_{m=0}^k \delta(k - 1 - m)\left(\sum_{v=0}^m \Theta_1(m - v)\Theta_1(v)\right)\right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2Nc(R_b-1)^2}{t_b} \left( \sum_{m=0}^k \Theta_1(k-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_1(m-v) \Theta_1(v) \right) \right) + \\
 & \quad + \frac{6Nc\theta_a^2(R_b-1)^2}{t_b} \left( \sum_{m=0}^k \Theta_1(k-m) \Theta_1(m) \right) + \\
 & + \left( \frac{2Nc\theta_a^3}{t_b} + \frac{2Nr\theta_a^4}{t_b} \right) (R_b-1)^2 \delta(k) + \left( \frac{2Nc\theta_a^3}{t_b} + \frac{2Nr\theta_a^4}{t_b} \right) (R_b-1)^3 \delta(k-1) = 0, \\
 & (1-A\theta_a)(k+2)(k+1)\Theta_2(k+2) + A \left( \sum_{l=0}^k \Theta_2(l)(k+2-l)(k+1-l)\Theta_2(k+2-l) \right) + \\
 & \quad + A \left( \sum_{l=0}^k (l+1)\Theta_2(l+1)(k+1-l)\Theta_2(k+1-l) \right) + \\
 & \quad + (1-A\theta_a)(R_b-1) \left( \sum_{l=0}^k (l+2)(l+1)\Theta_2(l+2)\delta(k-1-l) \right) + \\
 & + A(R_b-1) \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_2(v)(m+2-v)(m+1-v)\Theta_2(m+2-v) \right) \right) + \\
 & + A(R_b-1) \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m (v+1)\Theta_2(v+1)(m+1-v)\Theta_2(m+1-v) \right) \right) + \\
 & + (1-A\theta_a)(R_b-1)(k+1)\Theta_2(k+1) + A(R_b-1) \left( \sum_{l=0}^k \Theta_2(l)(k+1-l)\Theta_2(k+1-l) \right) - \\
 & - \frac{2Nr(R_b-1)^2}{\beta t_b} \left( \sum_{m=0}^k \Theta_2(k-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_2(m-v) \left( \sum_{w=0}^v \Theta_2(v-w)\Theta_2(w) \right) \right) \right) + \quad (26) \\
 & + \left( -\frac{6Nc\theta_a^2}{\beta t_b} \right) (R_b-1)^3 \left( \sum_{l=0}^k \Theta_2(l)\delta(k-1-l) \right) + \left( -\frac{6Nc\theta_a^2}{\beta t_b} \right) (R_b-1)^2 \Theta_2(k) - \\
 & - \frac{2Nr(R_b-1)^3}{\beta t_b} \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_2(m-v) \left( \sum_{w=0}^v \Theta_2(v-w) \left( \sum_{u=0}^w \Theta_2(w-u)\Theta_2(u) \right) \right) \right) \right) - \\
 & - \frac{2Nc(R_b-1)^3}{\beta t_b} \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_2(m-v) \left( \sum_{w=0}^v \Theta_2(v-w)\Theta_2(w) \right) \right) \right) + \\
 & + \frac{6Nc\theta_a^2(R_b-1)^3}{\beta t_b} \left( \sum_{m=0}^k \delta(k-1-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_2(m-v)\Theta_2(v) \right) \right) - \\
 & - \frac{2Nc(R_b-1)^2}{\beta t_b} \left( \sum_{m=0}^k \Theta_2(k-m) \left( \sum_{v=0}^m \Theta_2(m-v)\Theta_2(v) \right) \right) + \\
 & + \frac{6Nc\theta_a^2(R_b-1)^2}{\beta t_b} \left( \sum_{m=0}^k \Theta_2(k-m)\Theta_2(m) \right) + \\
 & + \left( \frac{2Nc\theta_a^3}{\beta t_b} + \frac{2Nr\theta_a^4}{\beta t_b} \right) (R_b-1)^2 \delta(k) + \left( \frac{2Nc\theta_a^3}{\beta t_b} + \frac{2Nr\theta_a^4}{\beta t_b} \right) (R_b-1)^3 \delta(k-1) = 0.
 \end{aligned}$$

Полагая, что

$$\Theta_1(0) = a_1, \quad (27)$$

$$\Theta_1(1) = b_1, \quad (28)$$

$$\Theta_2(0) = a_2, \quad (29)$$

$$\Theta_2(1) = 0 \quad (30)$$

можно получить  $\Theta_1(2), \Theta_1(3), \Theta_1(4), \dots$  и  $\Theta_2(2), \Theta_2(3), \Theta_2(4), \dots$  последовательно из уравнений (23) и (24) или уравнений (25) и (26). Наконец, можно найти следующие решения путем обратного дифференциального преобразования  $\Theta_1(k)$  и  $\Theta_2(k)$ :

$$\theta_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k \Theta_1(k), \quad (31)$$

$$\theta_2(k) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k \Theta_2(k). \quad (32)$$

С помощью уравнений (31), (32) значения  $a_1$ ,  $b_1$  и  $a_2$  могут быть определены из граничных уравнений (14)–(17) с помощью команды «fsolve» в программе Maple 14. Результаты, представленные в настоящей работе, основаны на оценке двадцати членов ряда, т.е.  $n = 20$ . Такой усеченный ряд обеспечил достаточно точное решение по сравнению со строгим точным аналитическим решением, которое будет представлено в разделе 4.

#### 4. Аналитическое решение для частного случая

Для случая с постоянной теплопроводностью ( $A = 0$ ), постоянным коэффициентом теплоотдачи ( $m = 0$ ), постоянным поперечным сечением ребра ( $\beta = 1$ ) и при незначительном излучении от внешней поверхности, которым можно пренебречь ( $Nr = 0$ ), уравнения (12), (13) имеют следующее замкнутое аналитическое решение:

$$\begin{aligned} \theta(R) = & C_1 e^{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{Nc}(R_b-1)R}{\sqrt{t_b}}} M\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2}\sqrt{Nc}(R(R_b-1)+1)}{\sqrt{t_b}}\right) + \\ & + C_2 e^{-\frac{2\sqrt{2}\sqrt{Nc}(R_b-1)R}{\sqrt{t_b}}} U\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2}\sqrt{Nc}(R(R_b-1)+1)}{\sqrt{t_b}}\right) + \theta_a, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $M$  и  $U$  — функции Куммера первого и второго рода соответственно. Константы  $C_1$  и  $C_2$  могут быть получены путем применения граничных условий постоянной температуры основания и изолированной вершины. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} F(M, U) = & \left( \left( \frac{\sqrt{t_b}}{2} - \sqrt{2Nc} \right) U\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}}\right) + \sqrt{t_b} U\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}}\right) \right) M\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2R_b\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}}\right) + \\ & + U\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2R_b\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}}\right) \left( \left( \frac{-\sqrt{t_b}}{2} + \sqrt{2Nc} \right) M\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}}\right) + \frac{\sqrt{t_b}}{2} M\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}}\right) \right), \quad (34) \\ C_1 = & -(\theta_a - 1) \frac{\left( \frac{-\sqrt{t_b}}{2} + \sqrt{2Nc} \right) M\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}}\right) + \frac{\sqrt{t_b}}{2} M\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}}\right)}{F(M, U) \cdot e^{\frac{\sqrt{2Nc}(R_b-1)}{\sqrt{t_b}}}}, \end{aligned}$$

$$C_2 = (\theta_a - 1) \frac{\left( \frac{-\sqrt{t_b} + \sqrt{2Nc}}{2} \right) U \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}} \right) - \sqrt{t_b} U \left( -\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2Nc}}{\sqrt{t_b}} \right)}{F(M, U) \cdot e^{\frac{\sqrt{2Nc}(R_b-1)}{\sqrt{t_b}}}}. \quad (35)$$

Подставляя уравнения (34), (35) в уравнение (33), можно найти точное аналитическое решение для этого случая. Таким образом, получено новое выражение для распределения температуры в ребре. Представленное аналитическое решение может служить критерияльным инструментом для проверки новых численных решений в области теплообмена с использованием оребренных поверхностей.

### 5. Результаты и обсуждение

Метод дифференциальных преобразований применялся для получения приближенного аналитического решения в условиях конечного степенного ряда. Проверка осуществлялась путем сравнения результатов МДП с точным аналитическим решением, представленным в предыдущем разделе. Кроме того, для всех численных результатов, которые здесь приводятся, используются следующие значения переменных, если не указано иное на графиках:

$$A = 0,2, \theta_a = 0,3, Nc = 0,5, Nr = 0,5, t_b = 1/8, R_b = 1/3, \beta = 0,5, \lambda = 0,5.$$

Результаты, полученные МДП (сплошные линии), сравниваются на рис. 2 с точным решением из раздела 5 (символы). Результаты МДП и точного решения хорошо согласуются. Тот факт, что результаты аналитического решения совпадают с кривыми МДП, подтверждает достоверность и точность численных расчетов.

На рис. 3 показано влияние безразмерной температуры теплоотдачи на распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС. Как и ожидалось [14], увеличение значения температуры теплоотдачи увеличивает температурное поле в ребре с ПУС. Кривые 1 соответствующие  $m = 0$ , представляют собой распределение температуры в ребре с постоянным коэффициентом теплоотдачи  $h_b$ , при этом кривые 2, соответствующие  $m = 2$ , отвечают

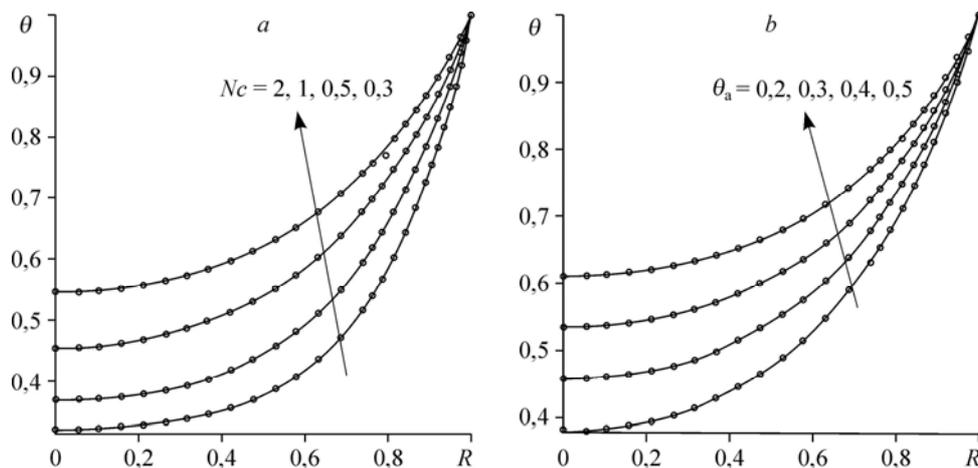


Рис. 2. Сравнение результатов МДП (сплошная линия) с аналитическим решением (символы) для распределения температуры в кольцевых ребрах (а) при различных конвективно-кондуктивных параметрах (б) при разных температурах конвективной теплоотдачи.

$$a — A = 0, \theta_a = 0,5, Nr = 0, m = 0, R_b = 1/3, t_b = 1/8, \beta = 1, \lambda = 0,5;$$

$$b — A = 0, Nc = 0,5, Nr = 0, m = 0, R_b = 1/3, t_b = 1/8, \beta = 1, \lambda = 0,5.$$

Рис. 3. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция безразмерной температуры теплоотдачи.  $m = 0$  (1), 2 (2);  $A = 0,2$ ,  $Nc = 0,5$ ,  $Nr = 0,5$ ,  $R_b = 1/3$ ,  $t_b = 1/8$ ,  $\beta = 1$ ,  $\lambda = 0,5$ .

условиям, когда коэффициент конвективной теплоотдачи имеет вид  $h = h_b \left[ \frac{T - T_a}{T_b - T_a} \right]^2$

в уравнениях (1), (2). Влияние температурозависимого коэффициента теплоотдачи выражается в повышении температуры в обоих сечениях ребра. Это связано с тем, что  $h$  в этом случае ( $m = 2$ ) непрерывно уменьшается от основания кольцевого ребра с ПУС к краям, давая меньший пространственно усредненный коэффициент теплоотдачи по сравнению с постоянным значением  $h_b$  при  $m = 0$ .

Влияние параметров конвекции и излучения на тепловые характеристики кольцевых ребер с ПУС показано на рис. 4 и 5 соответственно. На рис. 4 видно, что увеличение значения конвективно-кондуктивного параметра уменьшает значение температуры. Рисунок 5 также показывает, что, как и ожидалось, увеличение значения радиационно-кондуктивного параметра уменьшает распределение температуры в ребрах. Кроме того, видно, что при меньшей конвекции, т.е. при  $m = 2$ , температура в ребре становится выше, а влияние радиационного теплообмена становится более сильным. Это связано с тем, что при  $m = 2$  конвективный теплоперенос выражен слабее по сравнению с излучением, и, следовательно, радиационный теплоотвод может быть более эффективным.

Рисунок 6 отражает влияние температурозависимой теплопроводности на распределение температуры в кольцевом ребре с ПУС. Представленные на нем результаты показывают, что при увеличении значения  $A$  распределение температуры в обоих сечениях увеличивается. Этот вывод был опубликован в предыдущих работах о продольных прямых ребрах с ПУС [27, 28].

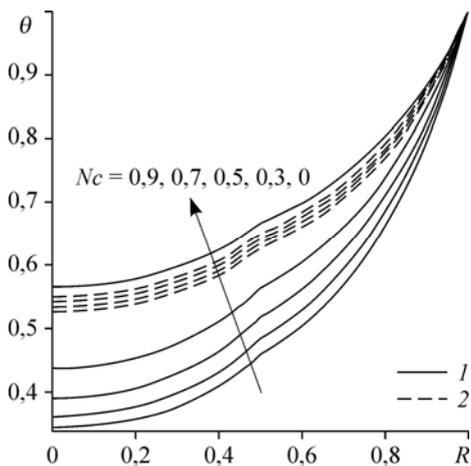


Рис. 4. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция безразмерного конвективно-кондуктивного параметра.  $m = 0$  (1), 2 (2);  $A = 0,2$ ,  $\theta_a = 0,5$ ,  $Nr = 0,5$ ,  $R_b = 1/3$ ,  $t_b = 1/8$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\lambda = 0,5$ .

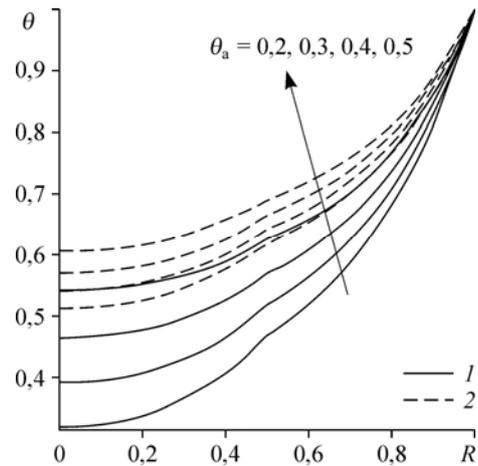


Рис. 5. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция безразмерного кондуктивно-радиационного параметра.  $m = 0$  (1), 2 (2);  $A = 0,2$ ,  $\theta_a = 0,5$ ,  $Nc = 0,5$ ,  $R_b = 1/3$ ,  $t_b = 1/8$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\lambda = 0,5$ .

Рисунок 6 отражает влияние температурозависимой теплопроводности на распределение температуры в кольцевом ребре с ПУС. Представленные на нем результаты показывают, что при увеличении значения  $A$  распределение температуры в обоих сечениях увеличивается. Этот вывод был опубликован в предыдущих работах о продольных прямых ребрах с ПУС [27, 28].

Рисунок 6 отражает влияние температурозависимой теплопроводности на распределение температуры в кольцевом ребре с ПУС. Представленные на нем результаты показывают, что при увеличении значения  $A$  распределение температуры в обоих сечениях увеличивается. Этот вывод был опубликован в предыдущих работах о продольных прямых ребрах с ПУС [27, 28].

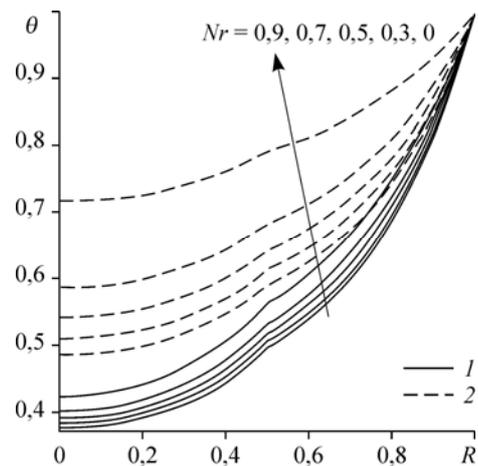


Рис. 5. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция безразмерного кондуктивно-радиационного параметра.  $m = 0$  (1), 2 (2);  $A = 0,2$ ,  $\theta_a = 0,5$ ,  $Nc = 0,5$ ,  $R_b = 1/3$ ,  $t_b = 1/8$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\lambda = 0,5$ .

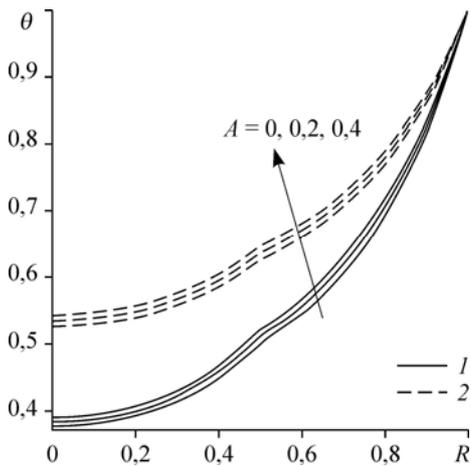


Рис. 6. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция температурозависимого параметра теплопроводности.  
 $m = 0$  (1), 2 (2);  $\theta_a = 0,5$ ,  $Nc = 0,5$ ,  $Nr = 0,5$ ,  
 $R_b = 1/3$ ,  $t_b = 1/8$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\lambda = 0,5$ .

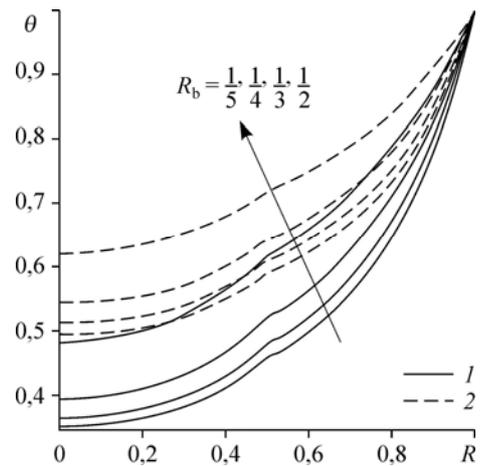


Рис. 7. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция безразмерного параметра  $R_b$ .  
 $m = 0$  (1), 2 (2);  $A = 0,2$ ,  $\theta_a = 0,5$ ,  $Nc = 0,5$ ,  $Nr = 0,5$ ,  
 $t_b = 1/8$ ,  $\lambda = 0,5$ .

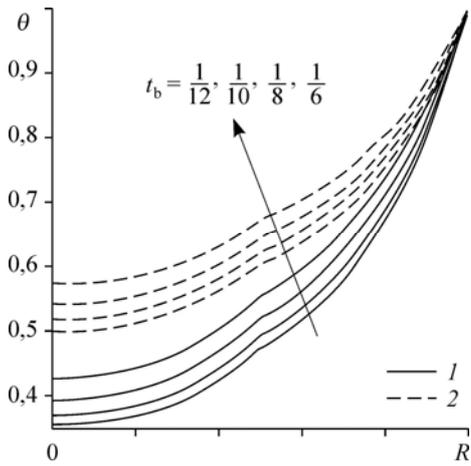


Рис. 8. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция безразмерного параметра  $t_b$ .  
 $m = 0$  (1), 2 (2);  $A = 0,2$ ,  $\theta_a = 0,5$ ,  $Nc = 0,5$ ,  $Nr = 0,5$ ,  
 $R_b = 1/3$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\lambda = 0,5$ .

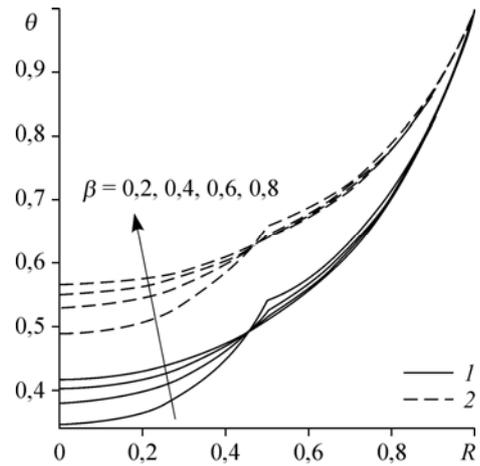


Рис. 9. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция параметра толщины.  
 $m = 0$  (1), 2 (2);  $A = 0,2$ ,  $\theta_a = 0,5$ ,  $Nc = 0,5$ ,  $Nr = 0,5$ ,  
 $R_b = 1/3$ ,  $t_b = 1/8$ ,  $\lambda = 0,5$ .

Важным конструктивным параметром ребер рассматриваемого типа является отношение радиусов  $R_b = r_b/r_i$ . Рисунок 7 иллюстрирует влияние этого параметра на температуру кольцевого ребра с ПУС. Чем меньше его значение для конкретного ребра, тем ниже температура в обоих сечениях ребра. Кроме того, рис. 8, который дополняет рис. 7, показывает влияние отношения толщины стенки ребра к его радиусу, обозначаемое  $t_b$ . Подобно предыдущему рисунку увеличение значения отношения толщины стенки ребра к его радиусу увеличивает коэффициент распределения температуры в обоих сечениях ребра.

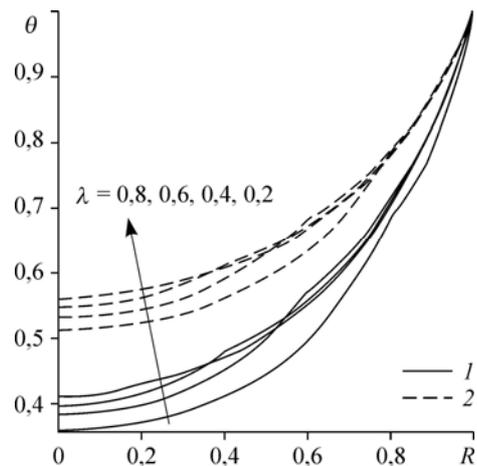
Влияние толщины ребра на распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС показано на рис. 9. Нижняя кривая соответствует  $\beta = 0,2$ , верхняя кривая —  $\beta = 0,8$ . По мере того как параметр  $\beta$  увеличивается, т.е. увеличивается соотношение толщин тонкого

Рис. 10. Распределение температуры в кольцевых ребрах с ПУС как функция параметра  $\lambda$ .

$$m = 0 (1), 2 (2); A = 0,2, \theta_a = 0,5, Nc = 0,5, Nr = 0,5, \\ R_b = 1/3, t_b = 1/8, \beta = 0,5.$$

и толстого сечений, наклон профиля температуры в точке примыкания уменьшается, а температурный профиль ребра становится более гладким. Это происходит в силу того, что конвективный и радиационный теплоотвод от области примыкания ребра уменьшается, когда увеличивается  $\beta$ . Наконец, рис. 10 иллюстрирует влияние параметра  $\lambda$  на распределение температуры в ребрах с ПУС.

По мере увеличения  $\lambda$ , т.е. когда длина тонкого сечения увеличивается, колебания температуры в тонком сечении ребра уменьшаются.



### Заключение

В настоящей работе исследованы тепловые характеристики кольцевых ребер с пошаговым уменьшением локального поперечного сечения. В модели учтены множественные нелинейности, а именно: температурозависимая теплопроводность, степенной коэффициент теплоотдачи, одновременный конвективно-радиационный теплообмен и ненулевые температуры конвективного и радиационного теплоотвода. Известные аналитические процедуры усреднения по методу дифференциальных преобразований успешно применены для обработки сильно нелинейного уравнения энергии для кольцевого ребра с уменьшением поперечного сечения. Полученные результаты сравнивались с аналитическим решением для частного случая, служившим в качестве критериального для проверки численных кодов, которые могут быть использованы для более сложных случаев. Замечено, что зависимый от температуры коэффициент теплоотдачи оказывает значительное влияние на распределение температуры в материале ребер с пошаговым уменьшением их поперечного сечения. Кроме того, было показано, что распределение температурного поля в ребре сильно зависит от конвективного и радиационного теплообменов. Представленная модель ориентирована на гораздо более близкие к реальности условия эксплуатации таких ребер по сравнению с предлагаемыми в литературе. Таким образом, результаты изложенной здесь работы являются фундаментальными и могут быть использованы при решении многих инженерных задач.

### Используемые обозначения

$A$  — безразмерный параметр, описывающий изменение теплопроводности,  
 $a$  — параметр изменения теплопроводности в зависимости от температуры,  $K^{-1}$ ,  
 $B$  — безразмерный параметр, описывающий изменение внутреннего тепловыделения,  
 $b$  — параметр изменения внутреннего тепловыделения в зависимости от температуры,  $K^{-1}$ ,  
 $C_1$  — константа,  
 $C_2$  — константа,  
 $H$  — константа,  
 $h(T)$  — коэффициент конвективной теплоотдачи в окружающую среду,  $Вт/м^2 \cdot K$ ,  
 $h_b$  — коэффициент конвективной теплоотдачи

$Nc$  — безразмерный конвективно-кондуктивный параметр,  
 $Nr$  — безразмерный конвективно-радиационный параметр,  
 $r_t$  — внешний радиус ребра, м,  
 $r_b$  — внутренний радиус ребра, м,  
 $r_j$  — радиус соединения в ребре, м,  
 $R$  — безразмерный радиус,  
 $R_b$  — коэффициент отношения внутреннего и внешнего радиусов,  
 $T$  — температура ребра, К,  
 $T_1$  — температура в толстом сечении ребра, К,  
 $T_2$  — температура в тонком сечении ребра, К,

основания ребра, Вт/м <sup>2</sup> ·К,	$T_a$ — температура окружающей среды, К,
$k(T)$ — температурозависимая теплопроводность, Вт/м <sup>2</sup> ·К,	$T_b$ — температура основания ребра, К,
$k_0$ — теплопроводность при температуре конвективной теплоотдачи, Вт/м <sup>2</sup> ·К,	$T_s$ — эффективная температура теплоотвода излучением, К,
$X(k)$ — преобразованная аналитическая функция,	$t$ — толщина неуменьшения сечения ребра, м,
$x(t)$ — исходная аналитическая функция,	$t_b$ — отношение толщины сечения ребра к его радиусу.

### Греческие символы

$\beta$ — параметр толщины,	$\theta_1$ — безразмерная температура в толстом сечении ребра,
$\varepsilon$ — коэффициент излучения,	$\theta_2$ — безразмерная температура в тонком сечении ребра,
$\lambda$ — безразмерный параметр, описывающий примыкание ребра,	$\theta_a$ — безразмерная температура конвективной теплоотдачи.
$\sigma$ — постоянная Стефана–Больцмана, Вт/м <sup>2</sup> ·К <sup>4</sup> ,	
$\theta$ — безразмерная температура ребра,	

### Список литературы

1. Kraus A.D., Aziz A., Welty J. Extended surface heat transfer. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001. 1120 p.
2. Razelos P. A critical review of extended surface heat transfer // Heat Transf. Eng. 2003. Vol. 24. P. 11–28.
3. Torabi M., Zhang Q.B. Analytical solution for evaluating the thermal performance and efficiency of convective–radiative straight fins with various profiles and considering all non-linearities // Energy Convers. Manag. 2013. Vol. 66. P. 199–210.
4. Bergman T.L., Lavine A.S., Incropera F.P., DeWitt D.P. Introduction to Heat Transfer, 6th ed. N.-Y.: John Wiley and Sons, Inc., 2011.
5. Kundu B., Wongwises S. A decomposition analysis on convecting–radiating rectangular plate fins for variable thermal conductivity and heat transfer coefficient // J. Franklin Inst. 2012. Vol. 349. P. 966–984.
6. Torabi M., Aziz A. Thermal performance and efficiency of convective–radiative T-shaped fins with temperature dependent thermal conductivity, heat transfer coefficient and surface emissivity // Int. Commun. Heat Mass Transf. 2012. Vol. 39. P. 1018–1029.
7. Sadri S., Raveshi M.R., Amiri S. Efficiency analysis of straight fin with variable heat transfer coefficient and thermal conductivity // J. Mech. Sci. Technol. 2012. Vol. 26. P. 1283–1290.
8. Khani F., Raji M.A., Nejad H.H. Analytical solutions and efficiency of the nonlinear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2009. Vol. 14. P. 3327–3338.
9. Khani F., Aziz A. Thermal analysis of a longitudinal trapezoidal fin with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2010. Vol. 15. P. 590–601.
10. Aziz A., Torabi M. Convective–radiative fins with simultaneous variation of thermal conductivity, heat transfer coefficient, and surface emissivity with temperature // Heat Transf. – Asian Res. 2012. Vol. 41. P. 99–113.
11. Aziz A., Fang T. Thermal analysis of an annular fin with (a) simultaneously imposed base temperature and base heat flux and (b) fixed base and tip temperatures // Energy Convers. Manag. 2011. Vol. 52. P. 2467–2478.
12. Hassanzadeh R., Pekel H. Heat transfer enhancement in annular fins using functionally graded material // Heat Transf. – Asian Res. 2013. Vol. 42. P. 603–617.
13. Peng H.-S., Chen C.-L. Hybrid differential transformation and finite difference method to annular fin with temperature-dependent thermal conductivity // Int. J. Heat Mass Transf. 2011. Vol. 54. P. 2427–2433.
14. Aziz A., Torabi M., Zhang K. Convective–radiative radial fins with convective base heating and convective–radiative tip cooling: Homogeneous and functionally graded materials // Energy Convers. Manag. 2013. Vol. 74. P. 366–376.
15. Hatami M., Ganji D.D. Thermal performance of circular convective–radiative porous fins with different section shapes and materials // Energy Convers. Manag. 2013. Vol. 76. P. 185–193.
16. Aziz A. Optimum design of a rectangular fin with a step change in cross-sectional area // Int. Commun. Heat Mass Transf. 1994. Vol. 21. P. 389–401.
17. Kundu B., Aziz A. Performance of a convectively heated rectangular fin with a step change in cross-sectional area and losing heat by simultaneous convection and radiation (step fins under radiation environment) // J. Heat Transfer. 2010. Vol. 132. P. 104502-1–104502-6.
18. Arslanturk C. Performance analysis and optimization of radiating fins with a step change in thickness and variable thermal conductivity by homotopy perturbation method // Heat Mass Transf. 2010. Vol. 47. P. 131–138.
19. Kundu B., Das P.K. Performance analysis and optimization of annular fin with a step change in thickness // J. Heat Transfer. 2001. Vol. 123. P. 601–604.
20. Kundu B., Lee K.-S., Campo A. Exact and approximate analytic methods to calculate maximum heat flow in annular fin arrays with a rectangular step profile // Int. J. Thermophys. 2012. Vol. 33. P. 1314–1333.
21. Chiba R. Application of differential transform method to thermoelastic problem for annular disks of variable thickness with temperature-dependent parameters // Int. J. Thermophys. 2012. Vol. 33. P. 363–380.

22. **Zhou J.K.** Differential Transform and Its Applications for Electrical Circuits. Wuhan: Huarjung University Press, 1986.
23. **Ndlovu P.L., Moitsheki R.J.** Application of the two-dimensional differential transform method to heat conduction problem for heat transfer in longitudinal rectangular and convex parabolic fins // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2013. Vol. 18. P. 2689–2698.
24. **Torabi M., Aziz A., Zhang K.** A comparative study of longitudinal fins of rectangular, trapezoidal and concave parabolic profiles with multiple nonlinearities // Energy. 2013. Vol. 51. P. 243–256.
25. **Torabi M., Yaghoobi H.** Accurate solution for convective–radiative fin with variable thermal conductivity and nonlinear boundary condition by DTM // Arab. J. Sci. Eng. 2013. Vol. 38. P. 3575–3585.
26. **Yaghoobi H., Torabi M.** The application of differential transformation method to nonlinear equations arising in heat transfer // Int. Commun. Heat Mass Transf. 2011. Vol. 38. P. 815–820.
27. **Torabi M., Yaghoobi H., Kiani M.R.** Thermal analysis of the convective-radiative fin with a step change in thickness and temperature dependent thermal conductivity // J. Theor. Appl. Mech. 2013. Vol. 51. P. 593–602.
28. **Torabi M., Yaghoobi H.** Analytical approaches for thermal analysis of radiative fin with a step change in thickness and variable thermal conductivity // Heat Transf. — Asian Res. 2012. Vol. 41, Iss. 4. P. 354–370.

*Статья поступила в редакцию 18 мая 2015 г.,  
после доработки — 28 июня 2016 г.*