

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cook M. A. The Science of High Explosives, chapter initiation of Explosive Deflagration and Detonation, Peinhold Publishing Corporation, 1958.
2. By Griffiths N. and Groosock I. M. The Burning to Detonation of Solid Explosives. J. Chem. Soc., 1960, II, 4154.
3. Chaiken R. F. Comments on Hypervelocity wave in Condensed Explosives J. Chem. Phys., 1960, 33, 3, 760.
4. Holland T. E., Campbell A. W. and Malin M. E. Phenomena Associated with Detonation in Large Single Crystals. J. Appl. Phys. 1957, 28, 1212.
5. Campbell A. W., Davis W. C., Ramsay I. B. and Travis I. R. Shock Initiation of Solid Explosives. J. Phys. Fluids, 1961, 4, 511.
6. Campbell A. W., Davis N. C. and Travis J. R. Shock Initiation of Detonation in Liquid Explosives. J. Phys. Fluids, 1961, 4, 498.
7. Seay G. E. and Seely L. B. Initiation of a Low-Density PETN Pressing by a Plane Shock Wave. J. Appl. Phys., 1961, 32, 61.
8. By Iohansson C. H., Lundborg N. and Sjolun I. The Initiation of Solid Explosives by shock waves. Erghth Simposium (International) on Combustion, Baltimore, 1962.
9. Гальперин Л. Н., Шведов К. К. Метод и установка для исследования переходных детонационных процессов. Физ. химия, 1963, т. XXXVII, № 5.
10. Бриш А. А., Тарасов М. С., Цукерман З. А. Электропроводность продуктов взрыва конденсированных ВВ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1959, 37, № 6 (19), 1543.
11. Зайцев В. М., Похил П. Ф., Шведов К. К. Электромагнитный метод измерения скорости продуктов взрыва. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 6.
12. Зельдович Я. В., Компанец А. С. Теория детонации, 1955.
13. Дремин А. Н., Шведов К. К., Веретенников В. А. Исследование детонации предохранительного аммонита «ПЖВ-20». Сб. Взрывное дело, ГОНТИ.

## К ДИФФУЗИОННОЙ ТЕОРИИ ПОДВИЖНЫХ СТРАТОВ

И. В. Каменев, В. А. Погосян

(Москва)

При изучении положительного столба как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения большой интерес представляет определение глубины модуляции концентрации электронов, т. е. изменение концентрации по длине страты. Сравнительно мало теоретических работ посвящено этой проблеме. Так, например, в работе [1] задается функция ионизации  $s = nz$  в виде тригонометрического ряда и определяется отношение функции ионизации  $s$  к электронной концентрации  $n$ , там же приведены следующие кривые: концентрация электронов, электронной температуры, а также кривая скорости ионизации  $z$ . Ниже рассматривается задача об определении глубины модуляции концентрации электронов и в отличие от работы [1] задается не  $s$ , а  $z$ . Доказывается существование решения этой задачи, а также сравнивается приближение с экспериментальными данными для He.

## Обозначения

$n$ — концентрация электронов,	$k$ — постоянная Больцмана,
$z$ — скорость ионизации,	$U_i$ — потенциал ионизации,
$S$ — функция ионизации,	$\alpha$ — постоянная для данного газа,
$R$ — радиус трубки,	$D$ — коэффициент амбиполярной диффузии,
$\lambda$ — длина свободного пробега ионов,	$\omega$ — циклическая частота,
$T_e$ — электронная температура,	$l$ — длина страты,
$U_e$ — электронная температура в электрон-вольтах,	$A_0$ — средняя концентрация электронов.
$e$ — заряд электрона,	

1. Имеется цилиндрическая трубка с непроводящими стенками радиусом  $R$ , которая заполнена каким-нибудь инертным газом, например He, при давлении 1 мм Hg. Будем считать, что имеет место диффузионный режим, т. е. длина свободного пробега ионов  $\lambda$  значительно меньше радиуса трубки, а также предположим, что распределение электронов по скоростям максвелловское. Так как электронная температура  $T_e = e U_e / k$  в бегущих стратах периодически меняется, то будем считать ее периодической функцией по  $x$  и по  $t$  ( $x$  — ось трубки,  $t$  — время).

Предположим, что ступенчатая ионизация в объеме отсутствует, а рекомбинация происходит только у стенки трубки, т. е. для концентрации электронов имеет место приближенное граничное условие Шоттки.

Согласно [2]

$$z = \alpha \sqrt{u_e} \exp \frac{-U_i}{U_e} \quad \left( U_e = \frac{kT_e}{e} \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $U_i$  — потенциал ионизации,  $U_e$  — электронная температура, выраженная в эл. вольтах,  $\alpha$  — постоянная для данного газа,  $e$  — заряд электрона,  $k$  — постоянная Больцмана.

При этих предположениях для концентрации электронов получается следующая краевая задача

$$\partial n / \partial t - D \Delta n = zn, \quad n = 0 \quad \text{при } r = R \quad (1.2)$$

Здесь  $D$  — коэффициент амбиполярной диффузии, считается постоянным;  $z$  — монотонно возрастающая функция  $U_e$ ; электронная температура предполагается непрерывно дифференцируемой периодической функцией

$$w = \omega t + qx \quad (\omega = 2\pi / T, q = 2\pi / l)$$

Следовательно,  $z$  — есть периодическая (с тем же периодом) непрерывно дифференцируемая функция  $w$ .

2. Ищем  $n$ , нетривиальное решение этой краевой задачи, в следующем виде

$$n = \left\{ A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kw + B_k \sin kw \right\} J_0 \left( \frac{2.4r}{R} \right) = \quad (2.1)$$

$$= \left\{ A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k(\omega t + qx) + B_k \sin k(\omega t + qx) \right\} J_0 \left( \frac{2.4r}{R} \right)$$

Здесь  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка, а 2.4 — первый корень уравнения  $J_0(ur) = 0$ ; коэффициент  $A_0$  — средняя концентрация электронов — известная константа. Представляя  $z$  в виде ряда Фурье

$$z = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k(\omega t + qx) + b_k \sin k(\omega t + qx) \quad (2.2)$$

и подставляя (2.1) и (2.2) в (1.2), после несложных преобразований получим следующие соотношения между коэффициентами

$$\left[ D(mq)^2 + D \left( \frac{2.4}{R} \right)^2 - a_0 \right] A_m + m\omega B_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(A_{k+m} + A_{k-m}) + b_k(B_{k+m} + B_{k-m})] \quad (2.3)$$

$$\left[ D(mq)^2 + D \left( \frac{2.4}{R} \right)^2 - a_0 \right] B_m - m\omega A_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(B_{k+m} + B_{k-m}) - b_k(A_{k+m} + A_{k-m})] \quad (2.4)$$

$$\left[ D \left( \frac{2.4}{R} \right)^2 - a_0 \right] A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k A_k + b_k B_k \quad (2.5)$$

Введем следующие обозначения

$$p_m = D(mq)^2 + D \left( \frac{2.4}{R} \right)^2 - a_0, \quad A_k = \xi_{2k-1}, \quad B_k = \xi_{2k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.3), (2.4), получим запись этих соотношений в следующем развернутом виде:

$$\begin{aligned} \xi_1 - 1/2 p_1^{-1} \{ -2\omega \xi_2 + a_1 \xi_1 + b_1 \xi_4 + a_2 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \dots \} &= 1/2 A_0 a_1 p_1^{-1} \\ \xi_2 - 1/2 p_1^{-1} \{ 2\omega \xi_1 + a_1 \xi_4 - b_1 \xi_3 + a_2 \xi_6 - a_2 \xi_2 - b_2 \xi_5 + \dots \} &= 1/2 A_0 b_1 p_1^{-1} \\ \xi_3 - 1/2 p_2^{-1} \{ -4\omega \xi_4 + a_1 \xi_5 + a_1 \xi_1 + b_1 \xi_8 - b_1 \xi_2 + a_2 \xi_7 + \dots \} &= 1/2 A_0 a_2 p_2^{-1} \\ \xi_4 - 1/2 p_2^{-1} \{ 4\omega \xi_3 + a_1 \xi_6 + a_1 \xi_2 - b_1 \xi_5 - b_1 \xi_1 + a_2 \xi_8 + \dots \} &= 1/2 A_0 b_2 p_2^{-1} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, соотношения (2.3), (2.4) записаны в виде бесконечной системы линейных уравнений второго рода. В работе [3] доказывается следующая общая теорема существования и единственности для таких систем: для существования и единственности решения системы вида

$$\xi_j - (\alpha_{j1}^* \xi_1 + \alpha_{j2} \xi_2 + \alpha_{j3} \xi_3 + \dots) = \beta_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.8)$$

удовлетворяющего условию  $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + \dots < \infty$  достаточно выполнения условий

$$\sum_{j, k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j|^2 < \infty \quad (2.9)$$

Следовательно, чтобы установить существование единственного решения системы (2.7), достаточно проверить выполнение этих условий. Заметим, что из непрерывности первой производной функции вытекают следующие оценки для ее коэффициентов Фурье:

$$|a_k| < \frac{2M}{k}, \quad |b_k| < \frac{2M}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.10)$$

где постоянная  $M$  есть максимум производной. Кроме того

$$p_k = D(kq)^2 + D(2.4R^{-1}) - a_0 = Nk^2 [1 + O(k^{-2})] \quad (N = \text{const}) \quad (2.11)$$

Введем обозначения (аналогичные обозначениям теоремы), а именно будем считать, что  $\beta_j$  есть правая часть  $j$ -го уравнения системы (2.7), а  $\alpha_{jk}$  — коэффициент при  $k$ -ом неизвестном от начала в фигурных скобках  $j$ -го уравнения системы (2.7). При этих обозначениях, учитывая (2.10), (2.11), для системы (2.7) очевидно

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j|^2 \leq Q \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^6 [1 + O(j^{-2})]}$$

т. е. второе условие теоремы выполнено.

Чтобы проверить первое условие, рассмотрим сначала двойной ряд (2.9). Из (2.7) легко усмотреть, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 = \frac{c_1 j^2 + c_2 s_0}{p_j^2} \quad s_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad c_1, c_2 = \text{const}$$

Поэтому имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_1 j^2 + c_2 s_0}{p_j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_1 j^2 + c_2 s_0}{j^4 [1 + O(j^{-2})]} < \infty$$

т. е. двойной ряд сходится и, следовательно, сходится простой ряд, составленный из него, причем при любом порядке расположений членов. Заметим, что все рассматриваемые ряды суть знакоположительные, поэтому из сходимости простого ряда следует сходимость двойного ряда (2.9) и, следовательно, выполнение первого условия теоремы. Таким образом, условия общей теоремы выполнены. Поэтому существует единственное решение системы (2.7), которое может быть найдено методом редукции (т. е. последовательного решения усеченных систем). Для приближенного численного решения задачи поступали следующим образом. По имеющимся экспериментальным данным для электронной температуры  $U_e$ , приведенным на стр. 137, вычислялись по формуле (1.1) соответствующие значения скорости ионизации  $z$ , после чего  $z$  аппроксимировалась тригонометрическим полиномом, т. е. фактически получалось приближенное разложение (2.2) с конечным числом членов. Вместо бесконечной системы (2.7) решалась первая усеченная система из десяти уравнений с десятью неизвестными  $A_k^{(10)}, B_k^{(10)}$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) и вторая усеченная система из двенадцати уравнений с двенадцатью неизвестными  $A_k^{(12)}, B_k^{(12)}$  ( $k = 1, \dots, 6$ ), причем все разности  $|A_k^{(12)} - A_k^{(10)}|, |B_k^{(12)} - B_k^{(10)}|$  имели порядок не выше 0.006, т. е. находились в пределах точности экспериментальных измерений, а коэффициенты  $A_6^{(12)}, B_6^{(12)}$ , полученные из второй усеченной системы, по модулю не превосходили 0.0002, т. е. являлись практически нулями.

Полученное приближенное решение, соответствующее системе десяти уравнений, приведено на фигуре (кривая 3). Заметим, что кривая, полученная при решении системы из двенадцати уравнений в пределах точности чертежа, сливается с кривой 3.

Это показывает, что для практического применения вышеизложенной теории можно ограничиваться решением усеченных систем из десяти-двенадцати уравнений. Из системы (2.7) вытекает, что с увеличением коэффициента амбиполярной диффузии уменьшается амплитуда колебания, и когда  $D \rightarrow \infty$  колебания полностью исчезают; это показывает, что длина свободного пробега  $\lambda$  становится значительно больше, чем размеры трубки.

3. Для проверки теории сопоставим изложенный метод и метод, указанный в работе [1], с имеющимися экспериментальными данными [4].

В работе [4] приводятся данные изменения температуры и концентрации электронного газа в Ag при  $p = 2 \text{ мм Hg}$  на длине страта; минимальная температура  $36\,000^\circ \text{K}$ , максимальная температура  $47\,000^\circ \text{K}$ . При этих данных вычисления по нашему методу показали, что концентрация на длине страта меняется три-четыре раза, в то время как по методу автора [1] для тех же самых значений концентрация изменяется на длине страта примерно в десять раз. Эксперименты, изложенные в [4], показывают, что для данных температур глубина модуляции имеет порядок 2.5. Отсюда следует, что наш метод дает удовлетворительное совпадение с экспериментом.

Что касается сильного расхождения теоретического результата, полученного по методу автора [1], с экспериментом, то на наш взгляд это объясняется не корректной постановкой задачи в работе [1]. Именно, автор [1] задает функцию ионизации  $s = nz$ , куда входит неизвестная функция  $n$ , в то время как правильно было бы задавать  $z$ , которая не зависит от  $n$ , что и делается в настоящей статье. Кроме того, заметим, что в экспериментах определяется не функция ионизации  $S$ , а электронная температура  $U_e$ , поэтому, исходя из работы [1], невозможно точно определить изменение концентрации по длине страта. Для Ag были использованы экспериментальные данные работы [4]. А. А. Зайцев любезно предоставил нам свои экспериментальные данные для He.

Данные А. А. Зайцева следующие: давление  $1 \text{ мм}$ , радиус трубки  $1 \text{ см}$ , длина страта  $l = 6 \text{ см}$ , период страта  $T = 1/15000$ . В целочисленных точках по длине страта замечены следующие значения электронной температуры:

$$U_{e1} = 2.59, \quad U_{e2} = 3.45, \quad U_{e3} = 4.10 \quad A_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$$

$$U_{e4} = 3.66, \quad U_{e5} = 3.02, \quad U_{e6} = 2.59 \text{ эв.}$$

Приближенное решение, получающееся при подстановке в (1.1) в виде тригонометрического полинома, аппроксимированного по значениям  $z$ , соответствующим экспериментальным значениям, показывает, что  $U_e$  и  $z$  имеют максимальные значения при  $x \approx 1.8 \text{ см}$ , кривые 1 и 2 на фигуре.

Максимум для электронной концентрации достигается на длине  $\approx 3.5 \text{ см}$ . Разность расстояния  $\Delta x$  между максимумами электронной температуры, скоростью ионизации и электронной концентрацией приблизительно равняется  $1.5 \text{ см}$ . Глубина модуляции для  $n$  получается  $\approx 2$  раза.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность Г. А. Любимову за внимание к работе.

Поступила 13 V 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F a r r i s V. D. Diffusion on Moring Srief. Proc. Phys. Soc., 1955, В 68, p. 381.
2. Г р а н о в с к и й В. Л. Электрический ток в газе. Гостехтеоретиздат, М.— Л., 1952, т. 1.
3. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
4. Д ж р п е т о в Х. А., Б у л к и н П. С., А х м е д о в А. Р. Исследование пространственного распределения параметров высокочастотного разряда в He и Ag. Вестник МГУ, 1959, № 3, стр. 71.