

Для вывода интегрального соотношения домножим (4.1) на ρ_i для свободной струи и на $\rho_i^2(\eta + b_i)$ для полуограниченной, затем проинтегрируем в соответствующих пределах и сложим. В дальнейших преобразованиях используем условия (4.2), а для полуограниченной струи еще и соотношения (2.6), (2.7), а также дополнительное предположение $w_i(\xi, \eta) = \sigma(\xi)u_i(\xi, \eta)$, справедливость которого подтверждается видом найденного решения. В итоге $\rho_1 \xi \int_0^q w_1 d\eta + \rho_2 \xi \int_q^{\eta_\infty(\xi)} w_2 d\eta = L$ (свободная струя), $\rho_1^2 \xi \int_0^q \eta w_1 d\eta + \rho_2^2 \xi \int_q^{\eta_\infty(\xi)} (\eta + b_2) w_2 d\eta = M$ (полуограниченная струя).

Решения уравнений (4.1) ищутся в виде $w_i = \xi^i G_i(\varphi_i)$, $\varphi_i = (\eta + b_i)/\xi^n$. Опуская подробности вычислений, выпишем окончательные выражения для азимутальной компоненты скорости: $w_i = (2L/J)x^{-1} \times u_i(x, y)$ (свободная струя), $w_i = (2M/E)x^{-1} u_i(x, y)$ (полуограниченная струя).

ЛИТЕРАТУРА

1. Генкин А. Л., Кукес В. И., Ярин Л. П. О распространении струи несмешивающихся жидкостей // Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. — Алма-Ата: Наука, 1973. — Вып. 9.
2. Yu H., Scheele G. F. Laminar jet contraction and velocity distribution in immiscible liquid-liquid systems // Intern. J. Multiphase Flow. — 1975. — V. 2, N 2.
3. Penchev I. P., Radev S. P., Rakadjiev R. K. Velocity profile relaxation of jet in a liquid-liquid system // Теор. и прикл. механика: 3-й Национ. конгр., Варна, 1977. — София: Болг. Акад. науките, 1977. — Кн. 1.
4. Anwar M. M., Bright A. et al. Laminar liquid jets in immiscible liquid systems // Trans. Inst. Chem. Engng. — 1982. — V. 60, N 5.
5. Елисеев В. И. Истечение ламинарных струй несмешивающихся несжимаемых жидкостей // Гидроаэромеханика и теория упругости. — Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1976. — Вып. 21.
6. Елисеев В. И. Асимптотическое решение задачи об истечении тяжелых ламинарных струй несмешивающихся жидкостей // ПМТФ. — 1977. — № 2.
7. Елисеев В. И., Сухих Л. И., Флеер Л. А. Асимптотический метод решения задачи об истечении радиальных ламинарных струй несмешивающихся жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1980. — № 3.
8. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. — М.: Физматгиз, 1962.

Поступила 27/II 1987 г.

УДК 532

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКИХ ТЕЛ, ОБТЕКАЕМЫХ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. П. Михайлов

(Новосибирск)

При обтекании упругих покрытий тел потоком жидкости представляют интерес режимы, когда за счет энергии потока возбуждаются и (или) поддерживаются незатухающие колебания в материале покрытия. Изучение таких гидроупругих колебаний важно как для расчета на прочность конструкций, так и для решения проблемы уменьшения сопротивления обтекаемых тел. По последней проблеме проведены многочисленные в основном экспериментальные исследования. В ряде теоретических работ (см., например, [1, 2]) направление изучения, учитывающее взаимодействие вихревых структур потока с поверхностными волнами обтекаемого упругого тела, представляется наиболее перспективным.

Современная вычислительная методика и техника в принципе позволяют ставить и решать задачи о гидроупругих колебаниях в достаточно полной (нелинейной) постановке. Однако это приводит к громоздким и дорогим численным исследованиям амплитудных и энергетических параметров. Линеарная постановка задачи дает возможность продвинуть аналитическое изучение вплоть до получения так называемых «критических параметров» задачи. Так, в [3] рассматривается критическая скорость несжимаемого потока, обтекающего упругое полупространство.

В данной работе в линейной постановке анализируется поведение критических параметров течения с учетом конечности толщины упругого слоя, сжимаемости потока, его плотности и других параметров, таких как внутреннее демпфирование (трение) материала слоя.

1. В плоскости xOz рассматривается упруговязкий слой толщины h ($-h \leq z \leq 0$, $-\infty < x < \infty$). Поверхность слоя $z = 0$ обтекается потенциальным плоским потоком идеальной сжимаемой жидкости.

Напряжения и смещения в вязкоупругом теле в соответствии с [4] связаны соотношениями

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xx} &= \left(K + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right], \\ \sigma_{zz} &= \left(K + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left(K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

где K — модуль сжатия; μ — модуль сдвига; ζ , η — коэффициенты вязкости материала (малые величины); u_x , u_z — смещения по осям x и z ; t — время.

На обтекаемой верхней границе слоя

$$(1.2) \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p_0$$

(p_0 — давление, возникающее в потоке). На абсолютно неподвижном дне слоя

$$(1.3) \quad u_x = 0, \quad u_z = 0.$$

Если ввести коэффициенты трения

$$(1.4) \quad \varepsilon_l = \sqrt{(\zeta + 4\eta/3)/\rho}, \quad \varepsilon_t = \sqrt{\eta/\rho},$$

совпадающие по виду с известными выражениями для скоростей волн сжатия и сдвига [4]

$$(1.5) \quad c_l = \sqrt{(K + 4\mu/3)/\rho}, \quad c_t = \sqrt{\mu/\rho}$$

(ρ — плотность материала), то можно получить уравнения для векторов смещений, соответствующих деформациям сжатия и сдвига:

$$(1.6) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_l^2 \Delta v + \varepsilon_l^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta v, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_t^2 \Delta u + \varepsilon_t^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta u;$$

$$(1.7) \quad \operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{rot} u = 0.$$

Компоненты v_1 , v_2 , u_1 , u_2 этих векторов связаны с «физическими» смещениями соотношениями $u_x = u_1 + v_1$, $u_z = u_2 + v_2$.

Для потенциала φ скорости плоского течения идеальной сжимаемой жидкости имеем известное уравнение

$$(1.8) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_l^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right),$$

где c_0 — скорость звука в жидкости; U — скорость невозмущенного потока (на бесконечном удалении от упругого слоя).

Условием затухания возмущений скоростей (при $z = \infty$) будет

$$(1.9) \quad \partial \varphi / \partial x = U,$$

а условием непротекания жидкости через колеблющуюся границу $z = w(x, t)$

$$(1.10) \quad \partial u_z / \partial t + U \partial u_z / \partial x = \partial \varphi / \partial z,$$

которое в силу малости w можно перенести на границу $z = 0$.

Давление в потоке найдется из интеграла Коши—Лагранжа

$$(1.11) \quad \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = \text{const}$$

(ρ_0 — плотность жидкости).

2. Ограничимся рассмотрением периодических по x решений. Пусть λ — длина волны, причем $\lambda = 2\pi/k$, k — волновое число, ω — частота. Потенциал φ можно представить в виде

$$(2.1) \quad \varphi(x, z, t) = Ux + C \exp(-i\theta - K_1 z)$$

(C — неопределенная постоянная, $\theta = kx - \omega t$). При $K_1 = k\sqrt{1 - M_1}$, $M_1 = |U_\Phi - U|/c_0$, $U_\Phi = \omega/k$ выражение (2.1) удовлетворяет уравнению (1.8). Условие (1.10) выполняется путем подбора неопределенной постоянной.

Смещения в упругом слое будем искать в форме волны того же вида

$$(2.2) \quad u_j = U_j(z)e^{-i\theta}, \quad v_j = V_j(z)e^{-i\theta} \quad (j = 1, 2).$$

Уравнения (1.6), (1.7) образуют для U_j, V_j систему однородных линейных обыкновенных уравнений.

Давление в потоке (после линеаризации (1.11) и подбора постоянной в правой части) $p_0 = -i\rho_0\omega C(U_\Phi - U)\exp(-i\theta)$. После этого граничные условия (1.2), (1.3) также превращаются в линейные однородные соотношения.

В результате получим следующую замкнутую однородную систему:

$$(2.3) \quad U_j'' = \kappa_i^2 U_j, \quad V_j'' = \kappa_i^2 V_j \quad (j = 1, 2);$$

$$(2.4) \quad U_2' = ikU_1, \quad V_1' = -ikV_2;$$

$$(2.5) \quad U_1'(0) + V_1'(0) - ik(U_2(0) + V_2(0)) = 0;$$

$$(2.6) \quad (c_i^2 + \varepsilon_i^2)(U_2'(0) + V_2'(0)) - ik(c_i^2 - 2c_i^2 + i\omega(\varepsilon_i^2 - 2\varepsilon_i^2))(U_1(0) + V_1(0)) = iCk \frac{\rho_0}{\rho} (U_\Phi - U), \quad iC = \frac{U_\Phi - U}{\sqrt{1 - M_1^2}} (U_2(0) + V_2(0));$$

$$(2.7) \quad U_j(-h) + V_j(-h) = 0 \quad (j = 1, 2).$$

Здесь $\kappa_i^2 = k^2(1 - \xi^2 D_t)$; $\kappa_l^2 = k^2(1 - \delta^2 \xi^2 D_l)$; $\varepsilon_u = \varepsilon_i^2/c_i$; $\varepsilon_v = \varepsilon_l^2/c_l$; $D_t = 1/(1 + ik\xi\varepsilon_u)$; $D_l = 1/(1 + ik\xi\delta\varepsilon_v)$; $\xi = \omega/(kc_t)$ — приведенная частота.

Из условия существования нетривиального решения системы (2.3)–(2.7) после преобразований имеем уравнение

$$(2.8) \quad F(\xi) \equiv \alpha D_t (\xi - \gamma)^2 - \sqrt{1 - \mu^2(\xi - \gamma)^2} \Lambda = 0,$$

решение которого позволяет найти частоту ξ , а стало быть и ω рэлеевской волны в зависимости от различных параметров задачи. В (2.8) $\alpha = \rho_0/\rho$ — приведенная плотность потока; $\gamma = U/c_t$ — приведенная скорость потока; $\delta = c_l/c_i$; $\mu = c_l/c_0$ — показатель сжимаемости жидкости; $\sigma = kh/2\pi = h/\lambda$ — приведенная (к длине волны) толщина упругого слоя; $\Lambda = (R_1 S_1 - R_4 S_2)/(R_1 S_3 - R_4 S_4)$, где $R_1 = B_1(Q + Q_{21}) - B_2 Q_{11}$; $R_4 = B_1 Q_{22} + B_2(Q - Q_{12})$;

$$S_1 = -A_1 Q_{22} + A_2(Q + Q_{12}); \quad S_2 = A_1(Q - Q_{21}) + A_2 Q_{11};$$

$$S_3 = Q_{22} + x_l(Q - Q_{12}); \quad S_4 = Q + Q_{21} - x_l Q_{11};$$

$$B_1 = 1 + x_i^2; \quad B_2 = 2x_i; \quad A_1 = 2x_i; \quad A_2 = B_1;$$

$$Q_{11} = -2x_i E_t E_l; \quad Q_{12} = -(1 + x_i x_l) E_l^2;$$

$$Q_{21} = -(1 + x_i x_l) E_t^2; \quad Q_{22} = -2x_i E_t E_l;$$

$$Q = 1 - x_i x_l; \quad E_t = \exp(-2\pi\sigma x_i); \quad E_l = \exp(-2\pi\sigma x_l);$$

$$(2.9) \quad x_t = \sqrt{1 - \xi^2 D_t}, \quad x_l = \sqrt{1 - \xi^2 \delta^2 D_l}.$$

Решение уравнения (2.8) — в общем случае комплексная величина $\xi(\gamma, \alpha, \delta, \mu, \sigma, \varepsilon_u, \varepsilon_v) = X + iY$. Параметры, входящие в это выражение, при $Y \geq 0$ определяют область устойчивости, а при $Y < 0$ — область неустойчивости колебаний границы упругого слоя. Параметры, определяющие границу между этими областями, называются критическими. Далее будем в основном изучать зависимость критической скорости γ_* от остальных параметров.

3. Рассмотрим упругое полупространство без вязкости с условием $c_l \gg c_t$. Тогда $\varepsilon_u = \varepsilon_v = 0$, $\sigma = \infty$, $\delta = 0$. Уравнение (2.8) упрощается:

$$(3.1) \quad (2 - \xi^2)^2 - 4\sqrt{1 - \xi^2} + \frac{\alpha\xi^2(\xi - \gamma)^2}{\sqrt{1 - \mu^2(\xi - \gamma)^2}} = 0.$$

При отсутствии потока, т. е. при $\alpha = 0$, (3.1) имеет известные [4] корни $\xi_{1,2} = 0,955\dots$, которые являются безразмерными собственными частотами колебаний полупространства (поверхностных волн Рэлея). При $\alpha \neq 0$, но $\mu = 0$ (несжимаемая жидкость) (3.1) приводится к алгебраическому уравнению шестой степени. Меняя непрерывно γ в диапазоне $0 \leq \gamma \leq \gamma_*$, можно проследить «траекторию» его корней $\xi_{1,2}$ вплоть до их слияния при $\gamma = \gamma_*$.

Подобные расчеты и их анализ проделаны в [3]. Однако такого рода вычисления при конечных значениях σ , а также при $\mu \neq 0$, $\delta \neq 0$ становятся практически невозможными из-за резкого усложнения вида разрешающего уравнения (2.8). Поэтому в данной работе (предварительно) исследуются не $\xi(\gamma)$, а $\gamma(\xi)$. При вещественных ξ в интервале $-1 \leq \xi \leq 1$ из (2.8) вытекает

$$(3.2) \quad \gamma = \xi \pm \sqrt{-\frac{\mu^2\Lambda^2}{2\alpha^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu^2\Lambda^2}{2\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)^2}}.$$

Из этого общего решения интересно выделить два частных:

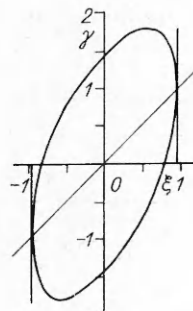
1) разреженный сжимаемый поток (воздуха) около слоя упругого пластика, когда $\alpha \sim 0,001$, $\mu \sim 0,1$, $\Lambda \sim 100$ и, следовательно, $(\mu\Lambda/\alpha)^2 \gg \Lambda/\alpha$:

$$(3.3) \quad \gamma = \xi \pm 1/\mu;$$

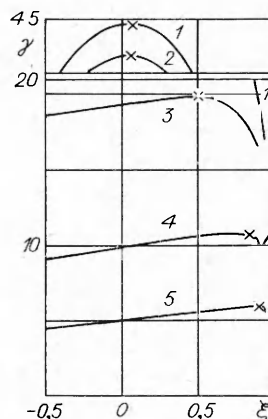
2) поток несжимаемой жидкости (воды) около толстого слоя резины, когда $\alpha \sim 1$, $\mu \sim 0$, $\Lambda = 1-10$:

$$(3.4) \quad \gamma = \xi \pm \sqrt{\Lambda/\alpha}.$$

Зависимость $\gamma(\xi)$ при $|\xi| \leq 1$ иллюстрируется на рис. 1, где $\alpha = 1$, $\mu = 0$, $\delta = 0$, $\sigma = 10$. Кривая имеет вид вытянутого наклонного эллипса, касающегося двух вертикальных линий $\xi = \xi_{1,2}$ в точках их пересечений с линией $\gamma = \xi$. При $\sigma = \infty$, как показывают расчеты, $\xi_{1,2} = 0,955\dots$,



Р и с. 1



Р и с. 2

Таблица 1

σ	γ_*			
	α			
	0,001	0,005	0,010	1,000
10,0	44,736	20,033	14,189	1,793
1,0	44,751	20,040	14,194	1,795
0,5	46,993	21,047	14,911	1,940
0,1	143,62	64,29	45,52	—
0,05	337,54	151,03	106,86	—

но при конечных малых σ (эта величина зависит от других параметров) значения $\xi_{1,2}$ выходят за интервал $|\xi| \leq 1$. Верхняя экстремальная точка на рис. 1 отвечает γ_* .

На рис. 2 показана зависимость $\gamma(\xi)$ для $\alpha = 0,001$, $\sigma = \infty$ и $\mu = 0$; 0,01; 0,05; 0,10 (кривые 1—5 соответственно).

Анализ зависимостей (3.2) — (3.4), расчеты, представленные на рис. 2 и в табл. 1 (зависимость γ_* от толщины слоя и плотности потока при $\mu = 0$, $\delta = 0$), показывают, что критические скорости растут при уменьшении σ и α и убывают при увеличении μ , что вполне отвечает физическому смыслу рассматриваемого явления.

4. При учете внутреннего трения, т. е. когда $\varepsilon_u \neq 0$, $\varepsilon_p \neq 0$, функция $F(\xi, \gamma)$ из (2.8) будет комплексной. Решение этого уравнения приходится проводить итерациями (здесь применен метод секущих) в комплексной плоскости $\xi(\gamma) = X + iY$. Начальные значения берутся в окрестности критических ξ, γ , вычисленных без учета трения, причем расчеты проводятся как в до-, так и в закритической области.

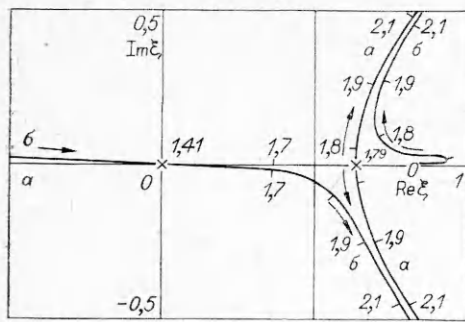
В табл. 2 показана зависимость X, Y от γ при различных $\varepsilon_u, \varepsilon_p = \varepsilon_u$ ($\alpha = 1, \mu = 0, \delta = 0, \sigma = 5, k = \pi$). При этих параметрах вычисленное без учета трения $\gamma_* = 1,79$.

Наблюдается парадоксальный факт: существует зона (при $\gamma < 2$), где при учете и росте трения $k\varepsilon_u$ растет и неустойчивость упругого слоя в потоке. Расчеты при других параметрах ($\alpha = 0,001, \mu = 0,1, \delta = 0, \sigma = 0,5, \varepsilon_u = 0,05, \varepsilon_p = \varepsilon_u$), приведенные в табл. 3, показывают, что это не случайное явление, а проявление давно, но малоизвестного парадокса Циглера, описанного, например, в [5, 6]. Как показано в [5], в присутствии неконсервативных сил «добавление диссипативных сил может оказывать дестабилизирующее влияние».

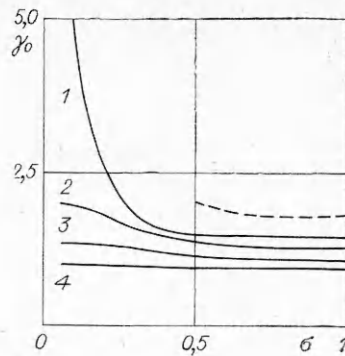
Механизм такой дестабилизации показан на рис. 3, где изображены «траектории» комплексных корней ξ при росте γ . Траектория *a* соответствует отсутствию трения. При $\gamma = \gamma_* = 1,79$ вещественные корни становятся кратными, при $\gamma > \gamma_*$ — комплексно-сопряженными, что отвечает неустойчивости ($Y < 0$). Траектория *b* получена при учете трения ($\varepsilon_u = 0,05, \varepsilon_p = 0,1167, k = 1, \mu = 0, \alpha = 1, \delta = 0$), она близка к траектории *a*, но переходит в нижнюю комплексную полуплоскость при значи-

Таблица 2

γ	X				$-Y$			
	ε_u				ε_u			
	0	0,5	0,1	0,02	0	0,5	0,1	0,2
1,75	0,455	0,410	0,358	0,279	0	0,094	0,135	0,167
1,80	0,638	0,480	0,410	0,316	0,067	0,140	0,172	0,198
1,85	0,633	0,536	0,457	0,353	0,186	0,194	0,213	0,213
1,90	0,688	0,580	0,499	0,387	0,256	0,248	0,255	0,263
1,95	0,714	0,617	0,537	0,420	0,312	0,298	0,296	0,296
2,00	0,740	0,650	0,571	0,452	0,359	0,343	0,336	0,329
2,05	0,767	0,681	0,604	0,482	0,402	0,385	0,375	0,362
2,10	0,794	0,710	0,635	0,512	0,442	0,425	0,412	0,394



Р и с. 3



Р и с. 4

тельно меньших γ . Значения γ даны на кривых. Качественно похожая картина приведена в [5] для упруго-вязкой модельной системы.

В нашем случае примечательно то, что при учете трения кривая b обязательно проходит через точку $\xi = 0$. При этом значении, как следует из (2.9), влияние трения отсутствует. Следовательно, критической скоростью $\gamma = \gamma_0$ будут значения $\gamma(0)$ вне зависимости от ϵ_u, ϵ_v . Это значение может быть вычислено из (3.2) после громоздкого раскрытия неопределенности типа $0/0$ в выражении $\Lambda(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$.

На рис. 4 представлена зависимость γ_0 от σ для $\mu = 0; 0,5; 0,75; 1,00$ (кривые 1—4) при $\alpha = 1, \delta = 0, k = 1, \epsilon_u = \epsilon_v = 0,05$. Здесь же для сравнения штриховой линией приведена зависимость $\gamma_*(\sigma)$, сосчитанная без учета трения для случая, соответствующего кривой 1.

Т а б л и ц а 3

γ	X			-Y		
	k			k		
	0	1	3,14	0	1	3,14
10,6	0,618	0,618	0,617	0	0,002	0,005
10,7	0,723	0,723	0,721	0	0,003	0,008
10,8	0,834	0,833	0,826	0	0,006	0,015
10,9	0,980	0,956	0,929	0	0,027	0,033
11,0	1,048	1,035	1,013	0,096	0,079	0,056
11,1	1,899	1,086	1,079	0,119	0,099	0,066
11,2	1,126	1,128	1,136	0,120	0,098	0,056

Для бесконечно толстого слоя сравнение можно провести на рис. 2, где γ_0 отвечает точкам кривых, лежащим на оси $\xi = 0$, а γ_* — экстремальным точкам, помеченным крестиком.

Таким образом, в рассмотренной постановке задачи можно эффективно и сравнительно легко проводить широкие параметрические исследования критических параметров, частот автоколебаний упругого покрытия в потоке. Проведенные расчеты показывают весьма существенное влияние толщины слоя, сжимаемости и плотности потока на критическую скорость. Отмеченный эффект дестабилизации при учете трения (устойчивость заметно снижается) вполне вписывается в рамки явлений, присущих для неконсервативных задач устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Landahl M. T. On the stability of laminar incompressible boundary over a flexible surface // J. Fluid Mech.— 1962.— V. 13, pt 4.
2. Меркулов В. И. Управление движением жидкости.— Новосибирск: Наука, 1981.
3. Симонов И. В. Поверхностные волны и устойчивость тангенциального разрыва скорости на границе тела и жидкости // ПМТФ.— 1981.— № 3.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1965.
5. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— М.: ФМ, 1961.
6. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем.— 3-е изд., перераб.— М.: Наука, 1979.

Поступила 23/III 1987 г.

УДК 532.135

О РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАЗДУВАЕМЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК

Ф. М. Султанов, А. Л. Ярин

(Москва)

Свободные слои жидкости, в частности жидкие пленки, ускоряемые перепадом давления газа на них, неустойчивы. Для плоских пленок идеальной жидкости такая неустойчивость (рэлей-тейлоровского типа) теоретически исследована в [1]. Особенности развития возмущений в случае ускоряемых перепадом давления газа плоских пленок ньютоновских и реологически сложных, в частности упруговязких полимерных, жидкостей изучены в [2, 3]. Экспериментальному и теоретическому исследованию неустойчивости цилиндрических водяных пленок, раздуваемых под действием повышенного давления газа в полости, посвящены работы [4, 5]. В них показано, что при относительно малых перепадах давления газа разрушение цилиндрического жидкого слоя обусловлено ростом возмущений (рэлей-тейлоровского типа). С другой стороны, с ростом перепада давления газа разрушение водяных пленок связано с кавитацией после отражения от внешней свободной поверхности волны разгрузки (расширение цилиндрического объема жидкости начинается в [4, 5] вследствие электрического взрыва осевой проволоочки или ВВ, создающего ударную волну). Такой тип разрушения не характерен для пленок полимерных жидкостей, поскольку эти жидкости способны выдерживать большие растягивающие напряжения без нарушения сплошности. Динамике раздуваемых цилиндрических пленок полимерных жидкостей в отсутствие возмущений посвящена работа [6].

Цель настоящей работы — теоретическое исследование неустойчивости раздуваемых под действием повышенного давления газа в полости цилиндрических пленок полимерных жидкостей. В качестве областей приложения полученных результатов можно указать широко используемые при переработке полимеров процессы раздувания и термоформования пластмассовых изделий [7]. Интенсификация этих процессов, а также повышение качества изделий (например, устранение вариации толщины стенок) требуют понимания механизма роста возмущений раздуваемых под действием повышенного давления газа в полости полимерных пленок.

1. Постановка задачи об устойчивости пленки. Рассмотрим цилиндрическую жидкую пленку, часть сечения которой показана на рис. 1, а: штриховыми линиями обозначены свободные поверхности в невозмущенном случае, сплошными — при наличии возмущений; штрихпунктирными — срединные поверхности в обоих случаях. Исследуем плоскую задачу, полагая, что параметры возмущенной цилиндрической пленки варьируются только в азимутальном направлении. Обозначим через φ полярный угол, $R_0(t)$ — радиус невозмущенной срединной поверхности, а $R(\varphi, t)$ — радиус срединной поверхности при наличии возмущений. Неустойчивость Рэля — Тейлора цилиндрической пленки имеет те же причины, что и для плоской пленки [2, 3]. Согласованно растут изгибные возмущения срединной поверхности пленки и ее толщины. Более тонкие участки пленки, обладающие меньшей инерцией, выгибаются в направлении движения, что в свою очередь приводит к появлению силы, обусловленной перепадом давления газа и способствующей растеканию жидкости из областей сужения пленки в области ее утолщения.

Однако неустойчивость цилиндрической пленки имеет ряд специфических черт, отличающих ее от неустойчивой плоской пленки. Характерное время роста возмущений $t_* \sim (h_0/a^0)^{1/2}$ [2, 3] (h_0 и a^0 — толщина и ускорение невозмущенной пленки). В случае идеальной, лишенной поверхностного натяжения, жидкости

$$(1.1) \quad a^0 = \Delta P_0 / \rho h_0.$$