УДК 517.9; 519.6; 530.1; 531.01

ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Г. В. Дружинин

Казанский государственный технический университет им. А. Н. Туполева,
420111 Казань

Для решения задач механики сплошных сред, задач кубатур и квадратур, а также задач аппроксимации гиперповерхностей предлагается единый подход к построению базисных (собственных) функций. Излагаются численно-аналитические методы, позволяющие получать приближенные решения внутренних и внешних краевых задач механики сплошных сред определенного класса (как линейных, так и нелинейных). Метод основан на разложении искомых решений рассматриваемых дифференциальных уравнений в частных производных в ряды по базисным функциям. Приводится алгоритм линеаризации дифференциальных уравнений в частных производных и редукции нелинейных краевых задач, которые сводятся к системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов без применения традиционных методов линеаризации.

Ключевые слова: базисные функции, краевая задача, линеаризация, инвариантные решения, сплошная среда.

В настоящей работе разрабатываются методы решения линейных и нелинейных краевых задач механики сплошной среды на основе глобальной или локальной аппроксимации искомых решений уравнений и граничных условий функциями, которые находятся разложением решений в ряды по базисным функциям.

1. Построение базисных функций. Представленные ниже базисные функции строятся на инвариантных решениях дифференциальных уравнений в частных производных, которые допускают группу растяжения (сжатия) по зависимым и независимым переменным и группу переноса по независимым переменным. Основополагающими работами, связанными с построением инвариантных решений и базисных функций, являются работы [1–4]. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \qquad (1.1)$$

Инвариантное решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$U = x^\alpha J(\eta), \qquad \eta = y/x, \qquad (1.2)$$

где α — произвольное действительное число. Подставив (1.2) в (1.1), получим

$$x^{\alpha-2}[(\eta^2+1)J'' - 2\eta(\alpha-1)J' + \alpha(\alpha-1)J] = 0, \qquad (1.3)$$

где J', J'' — первая и вторая производные по η; $x^{\alpha-2} \neq 0$.

Решение дифференциального уравнения (1.3) будем искать в виде ряда

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k. \qquad (1.4)$$

Подставив (1.4) в (1.3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях η, найдем рекуррентную формулу

$$c_{k+2} = -\frac{(\alpha - k)(\alpha - k - 1)}{(k+2)(k+1)}\, c_k,$$

позволяющую выразить все четные коэффициенты ряда (1.4) через c_0, а все нечетные — через c_1. Выберем c_0 и c_1 в качестве коэффициентов, формирующих начальный базис. Тогда получим следующие полиномы, являющиеся при различных α общим решением уравнения (1.3): $P^{\alpha=1}_{k=\overline{0,1}} = c_0 + c_1\eta$, $P^{\alpha=2}_{k=\overline{0,2}} = c_0(1-\eta^2) + c_1\eta$, $P^{\alpha=3}_{k=\overline{0,3}} = c_0(1-3\eta^2) + c_1(\eta - \eta^3/3)$, ... ($\alpha = \overline{1,N}$; $k = \overline{0,\alpha}$). Запишем решение уравнения (1.1) в виде

$$U(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{N} A_\alpha x^\alpha P^\alpha(\eta) = \sum_{\alpha=0}^{N} A_\alpha U_\alpha(x,y) =$$

$$= A_0 c_{00} + A_1 x(c_{01} + c_{11}\eta) + A_2 x^2[c_{02}(1-\eta^2) + c_{12}\eta] + \ldots + A_N x^N P^N_k(\eta),$$

где A_α — подлежащие определению произвольные коэффициенты, число которых зависит от выбора метода решения граничной задачи и оценки точности приближенного решения.

Найденные решения обобщаются на n независимых переменных. Для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0 \qquad (1.5)$$

возможны инвариантные решения

$$U = x_1^\alpha [J_2(\eta_2) + J_3(\eta_3) + \ldots + J_n(\eta_n)], \qquad \eta_2 = x_2/x_1,\ \ldots,\ \eta_n = x_n/x_1,$$

$$U = x_1^\alpha J(\eta), \qquad \eta = (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)/x_1.$$

Запишем обобщенное полиномиальное решение уравнения (1.5) при $n = 3$. Выберем инвариантное решение в виде [3]

$$U(x_1, x_2, x_3) = (a_1 x_1 + b_1)^\alpha (a_2 x_2 + a_3 x_3 + b)^\beta J(\eta), \qquad (1.6)$$

где $\eta = (a_2 x_2 + a_3 x_3 + b)/(a_1 x_1 + b_1)$; a_1, a_2, a_3, b_1 — произвольные действительные или комплексные числа (внутренние параметры).

Подставив (1.6) в (1.5), получим редуцированное уравнение

$$\eta^2(\eta^2 + D^2)J'' - 2\eta[\eta^2(\alpha - 1) - \beta D^2]J' + [\eta^2\alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1)D^2]J = 0$$

($D^2 = (a_2^2 + a_3^2)/a_1^2$). Запишем решение уравнения (1.5) при $n = 3$ в виде

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\alpha=1-\beta}^{N-\beta} A_\alpha (a_1 x_1 + b_1)^\alpha (a_2 x_2 + a_3 x_3 + b)^\beta P^\alpha_k(\eta, D) = \sum_{\alpha=1-\beta}^{N-\beta} A_\alpha U_\alpha(x_1, x_2, x_3, D),$$

где $P^{\alpha=1-\beta}_{k=\overline{0,1}} = \eta^{-\beta}(c_0 + c_1\eta)$; $P^{\alpha=2-\beta}_{k=\overline{0,2}} = \eta^{-\beta}[c_0(1 - \eta^2/D^2) + c_1\eta]$ и т. д.

Аналогично построим полиномиальные базисные функции для волнового уравнения. Отметим, что эти полиномы будут совпадать с полиномами для уравнения Лапласа, если все знаки “$-$” заменить на знаки “$+$”. Найденные решения обобщаются на n независимых переменных, т. е. на уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_{n-1}^2}. \qquad (1.7)$$

Обобщенное решение уравнения (1.7) при $n = 4$ имеет вид

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1 x_1 + b_1)^\alpha (a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + b)^\beta J(\eta), \tag{1.8}$$

где $\eta = (a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + b)/(a_1 x_1 + b_1)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha=0}^{N} A_\alpha x_n^\alpha (c_{0\alpha}|\eta + 1|^\alpha + c_{1\alpha}|\eta - 1|^\alpha), \qquad \eta = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{x_n}$$

также удовлетворяет уравнению (1.7). Здесь α — произвольное действительное число; $c_{0\alpha}$, $c_{1\alpha}$ — произвольные постоянные.

Системы базисных функций для уравнения Лапласа и волнового уравнения могут быть применены для решения задач статики и динамики теории упругости с использованием общих решений типа решений Папковича — Нейбера, Галеркина, Трефца, Штенберга — Юбанкса и др. [5, 6].

Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1.9}$$

инвариантное решение запишем в виде $U = t^{\alpha/2} J(\eta)$, $\eta = x/\sqrt{t}$. Тогда получим решение уравнения (1.9)

$$U(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{N} A_\alpha t^{\alpha/2} P_k^\alpha(\eta),$$

где $P_{k=0}^{\alpha=0} = c_0$; $P_{k=1}^{\alpha=1} = c_1\eta$; $P_{k=0,2}^{\alpha=2} = c_0(1 + \eta^2/2)$; $P_{k=1,3}^{\alpha=3} = c_1(\eta + \eta^3/6)$ и т. д.

Найденные выше решения обобщаются на n независимых переменных. Инвариантное решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial x_n} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_{n-1}^2}$$

можно выбрать, например, следующим образом:

$$U = x_n^{\alpha/2}[J_1(\eta_1) + J_2(\eta_2) + J_3(\eta_3) + \ldots + J_{n-1}(\eta_{n-1})],$$

где $\eta_1 = x_1/\sqrt{x_n}$, $\eta_2 = x_2/\sqrt{x_n}$, $\eta_3 = x_3/\sqrt{x_n}$, …, $\eta_{n-1} = x_{n-1}/\sqrt{x_n}$.

Рассмотрим алгоритм получения базисных функций на основе однородных координат на примере решения уравнения Лапласа. Для уравнения (1.5) при $n = 3$ запишем решение в виде [3]

$$U(x_1, x_2, x_3) = \Phi(\xi, \eta) \tag{1.10}$$

($\xi = x_2/x_1$; $\eta = x_3/x_1$). После подстановки (1.10) в (1.5) при $x_1 \neq 0$, $\xi = i\xi^*$, $\eta = i\eta^*$, $i^2 = -1$ получим уравнение вида

$$(1 - \xi^{*2})\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^{*2}} - 2\xi^*\eta^*\,\frac{\partial \xi^{*2}}{\partial \xi^*\,\partial \eta^*} + (1 - \eta^{*2})\,\frac{\partial \xi^*\,\partial \eta^*}{\partial \eta^{*2}} - 2\xi^*\,\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^*} - 2\eta^*\,\frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*} = 0.$$

Данное уравнение можно свести к волновому уравнению и уравнению Лапласа в новых координатах μ, ν следующей подстановкой:

— при $\mu = \eta^*/(\xi^* - 1)$, $\nu = \sqrt{\xi^{*2} + \eta^{*2} - 1}/(\xi^* - 1)$ имеем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \nu^2} = 0;$$

— при $\mu = \eta^*/(\xi^* - 1)$, $\nu = \sqrt{1 - \xi^{*2} - \eta^{*2}}/(\xi^* - 1)$ имеем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \nu^2} = 0.$$

Рассмотрим, например, второй случай. Используя полученные ранее результаты, запишем развернутое решение (1.5)

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha \mu^\alpha P^\alpha(\Theta),$$

где $\Theta = \nu/\mu$; $P^{\alpha=1}_{1,k=\overline{0,1}} = c_0 + c_1\Theta = c_0 + c_1 i\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}/x_3$; $P^{\alpha=2}_{1,k=\overline{0,2}} = c_0(1 - \Theta^2) + c_1\Theta = c_0(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)/x_3^2 + c_1 i\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}/x_3$ и т. д.

Приведенные выше инвариантные решения обобщаются на уравнения с n независимыми переменными, если решение выбирается в виде

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_1\Big(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\Big) + \Phi_2\Big(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}\Big) + \ldots + \Phi_{n-2}\Big(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_n}{x_1}\Big).$$

Отметим, что уравнение Лапласа $\Delta U(x_1, x_2, x_3) = 0$ при выборе новых независимых переменных $\xi = x_2/x_1$, $\eta = x_3/x_1$ и преобразовании полученного уравнения к каноническому виду переходит вновь в уравнение Лапласа [6] $\Delta U(\mu, \nu) = 0$, где μ, ν выражаются через однородные координаты x_2/x_1, x_3/x_1. По аналогии с двумерным пространством можно ввести функцию комплексной переменной, которая будет зависеть не от двух, а от трех независимых переменных: $W(\rho) = U(\mu, \nu) + iV(\mu, \nu)$, где $\rho(x_1, x_2, x_3) = \mu + i\nu$. При этом функция $U(\mu, \nu)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, а функция $V(\mu, \nu)$ находится из условия Коши — Римана.

Покажем связь найденных ранее базисных функций с гипергеометрическими функциями Гаусса. Для волнового уравнения (1.7) при $n = 4$ выбираем при $\beta = 0$ инвариантное решение вида (1.8). Подставив (1.8) в (1.7), получим редуцированное уравнение

$$(\eta^2 - D)J'' - 2\eta(\alpha - 1)J' + \alpha(\alpha - 1)J = 0, \qquad (1.11)$$

где $D = (a_4^2 - a_2^2 - a_3^2)/a_1^2$.

Уравнение (1.11) с помощью подстановки $J = y(\xi)$, $\eta = -D + 2D\xi$ преобразуем к дифференциальному уравнению (в нормальной форме Гаусса)

$$\xi(1 - \xi)y'' + [-(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)\xi]y' - \alpha(\alpha - 1)y = 0,$$

для которого гипергеометрический ряд имеет вид

$$F(-\alpha, -\alpha + 1, -\alpha + 1, \xi) = 1 - \alpha\xi - \frac{\alpha(-\alpha + 1)}{1 \cdot 2}\,\xi^2 - \ldots -$$

$$- \ldots - \frac{\alpha(-\alpha + 1)(-\alpha + 2)\cdots(-\alpha + k - 1)}{k!}\,\xi^k - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{(1)^k}\,\xi^k.$$

В случае, когда α является целым положительным числом, решение уравнения (1.7) принимает вид

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\alpha=0}^{N} (a_4 x_4 + b_4) A_\alpha F(-\alpha, -\alpha + 1, -\alpha + 1, \xi), \qquad (1.12)$$

где $\xi = \eta/(2D) - 1/2$. Решение типа (1.12) будет справедливым и для уравнения Лапласа (1.5) при $n = 3$, $\beta = 0$, $D = (a_2^2 + a_3^2)/a_1^2$.

Выражение в круглых скобках $(\psi, g) = \sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{\partial\psi}{\partial y_k}\,\dfrac{\partial g}{\partial x_k} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x_k}\,\dfrac{\partial g}{\partial y_k}\Big)$ называют скобкой Пуассона [6]. Приравняем это выражение к нулю, предварительно заменив в нем g на $g = \partial\psi/\partial y_k$:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k\,\partial y_k} - \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2}\Big) = 0. \tag{1.13}$$

Выберем инвариантное решение в виде

$$\psi = \sum_{k=1}^{n}(a_{1k}x_k + b_{1k})^{\alpha} J_k(\eta_k), \qquad \eta_k = \frac{a_{2k}y_k + b_{2k}}{a_{k1}x_k + b_{1k}}. \tag{1.14}$$

Подставив (1.14) в (1.13), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\big[(\alpha-1)(J_k')^2 - \alpha J_k J_k''\big] = 0.$$

Искомые функции $J_k(\eta_k)$ в этом выражении определяются из одинаковых дифференциальных уравнений, решение которых запишем в виде $J_k(\eta_k) = (\tilde{c}_{0k}\eta_k + \tilde{c}_{1k})^{\alpha}$ ($\tilde{c}_{0k}$, $\tilde{c}_{1k}$ — константы интегрирования). С учетом последнего выражения инвариантное решение (1.14) примет вид

$$\psi = \sum_{k=1}^{n}(c_{1k}x_k + c_{0k}y_k + d_k)^{\alpha},$$

где $d_k = c_{1k}b_{1k} + c_{0k}b_{2k}$; $c_{0k} = \tilde{c}_{0k}a_{2k}$; $c_{1k} = \tilde{c}_{1k}a_{1k}$; α, c_{0k}, c_{1k}, d_k — произвольные действительные или комплексные числа.

В силу специфических свойств уравнения (1.14) его решение при $k = 1$ ($x_1 = x$, $y_1 = y$) можно записать в виде

$$\psi(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{N} A_{\alpha}(c_1x + c_0y + d_1)^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{N} B_{\alpha}\,\frac{1}{(c_1x + c_0y + d_2)^{\alpha}}, \tag{1.15}$$

где A_{α}, B_{α} — коэффициенты, подлежащие определению. Чтобы получить ряд Лорана из выражения (1.15), положим $c_1 = 1$, $c_0 = i$, $d_1 = d_2 = -a$, $z = x + iy$, $N \to \infty$, $i^2 = -1$, $A_{\alpha} \equiv a_k = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c}\dfrac{1}{(\zeta - a)^{k+1}}\,f(\zeta)\,d\zeta$, $B_{\alpha} \equiv b_k = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c}(\zeta - a)^{k-1}f(\zeta)\,d\zeta$. Тогда получим ряд Лорана

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^{-k}.$$

Легко показать, что при $c_0 = c_1$ решение (1.15) будет удовлетворять волновому уравнению, а при $c_1 = ic_0$ — уравнению Лапласа и бигармоническому уравнению.

2. Решение неоднородных уравнений с переменными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$\phi_1(x,y)\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \phi_2(x,y)\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x,y), \tag{2.1}$$

где $\phi_1(x,y)$, $\phi_2(x,y)$ — произвольные функции, которые можно аппроксимировать однородными полиномами $P_{\alpha-2}(\eta)$ (см. п. **1**):

$$\phi_1(x,y) = \sum_{\alpha=2}^{N} C_\alpha x^{\alpha-2} P_{\alpha-2}(\eta), \qquad \phi_2(x,y) = \sum_{\alpha=2}^{N} D_\alpha x^{\alpha-2} P_{\alpha-2}(\eta),$$

функция $f(x,y)$ задается выражением

$$f(x,y) = B_0 + B_1 x P_1(\eta) + B_2 x^2 P_2(\eta) + B_3 x^3 P_3(\eta) + \ldots. \tag{2.2}$$

Здесь C_α, D_α, B_α — заданные коэффициенты аппроксимации; $\eta = y/x$.

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде

$$U = x^2 J_2(\eta) + x^3 J_3(\eta) + x^4 J_4(\eta) + \ldots. \tag{2.3}$$

Подставим (2.2), (2.3) в уравнение (2.1) и в полученном равенстве приравняем выражения при одинаковых степенях x. В результате получим систему обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений относительно искомых функций J_α, решение которых находится последовательно начиная с $\alpha = 2$ (решение однородного уравнения Лапласа при $\alpha \geqslant 2$ приведено в п. **1**). Зная решения однородного уравнения, найдем решение неоднородного дифференциального уравнения. Метод решения уравнений типа (2.1) применяется к каноническим уравнениям математической физики с переменными коэффициентами, а также ко всем линейным дифференциальным уравнениям в частных производных, допускающим группу растяжения (сжатия) по зависимым и независимым переменным и группу переноса по независимым переменным, и обобщается на n независимых переменных.

3. Редукция нелинейных краевых задач механики к системам линейных алгебраических уравнений. Для многих уравнений и их систем при соответствующем выборе базисных функций рассматриваемые краевые задачи редуцируются к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) без применения традиционных методов линеаризации. Линеаризация происходит за счет выбора базисных функций, являющихся решениями уравнений математической физики, а также уравнения, полученного на основе скобки Пуассона. К таким уравнениям и их системам относятся: уравнения Навье — Стокса для потенциального течения в стационарном и нестационарном случаях; уравнение Гельмгольца; уравнение и граничные условия задачи Плато; уравнения Монжа — Ампера; система уравнений Кармана [6].

Данный подход продемонстрируем на примере построения алгоритма решения уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Delta F}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \Delta F}{\partial \eta} = \Delta^2 F, \tag{3.1}$$

где Δ^2 — бигармонический оператор; $\psi(x,y) = \nu F(\xi,\eta)$; $\xi = xu_\infty/\nu$; $\eta = yu_\infty/\nu$.

К уравнению (3.1) добавим граничные условия

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}\Big|_C = f_0(s), \qquad \frac{\partial F}{\partial \xi}\Big|_C = f_1(s), \qquad \frac{\partial F}{\partial \eta}\Big|_{\eta\to\infty} = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial \xi}\Big|_{\eta\to\infty} = 0,$$

если уравнение контура C дано в параметрическом виде $\xi = \xi(s)$, $\eta = \eta(s)$.

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде (см. п. **1**)

$$F(\xi,\eta) = \sum_\alpha A_\alpha (c_0\eta + c_1\xi + d)^\alpha + \eta, \qquad \alpha < 0,$$

где d, c_0, c_1 — свободные внутренние параметры, которые должны быть заданы. Подставив это решение в исходное уравнение (3.1), в области G получим линеаризованное уравнение относительно неизвестных коэффициентов A_α:

$$c_1(c_1^2+c_0^2)\sum_\alpha A_\alpha\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(c_0\eta+c_1\xi+d)^{\alpha-3}=$$

$$=(c_1^2+c_0^2)^2\sum_\alpha A_\alpha\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(c_0\eta+c_1\xi+d)^{\alpha-4}.$$

Задачу решим методом взвешенных невязок [6]. Продольная и поперечная компоненты скорости потока жидкости (газа) и вихревая напряженность вдоль оси z равны

$$v=\Big[-\sum_\alpha A_\alpha\alpha(c_0\eta+c_1\xi+d)^{\alpha-1}\Big]c_1u_\infty,\qquad u=\Big[c_0\sum_\alpha A_\alpha\alpha(c_0\eta+c_1\xi+d)^{\alpha-1}+1\Big]u_\infty,$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\neq 0.$$

Отметим, что если в решении $F(\xi,\eta)$ заменить c_0 на ic_1 ($i^2=-1$), то получим рациональные базисные функции, определяемые отделением мнимой и вещественной частей. Эти рациональные базисные функции тождественно удовлетворяют уравнению (3.1). При решении задачи методом взвешенных невязок невязки формируются только на границе.

Приведем другой пример. Нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие деформацию жесткопластического неоднородного тела (с условием пластичности общего вида) при введении функции напряжений $\varphi(x,y)$ и функции тока $\psi(x,y)$, можно записать в виде [7–10]

$$(\varphi_{yy}-\varphi_{xx})^2+4\varphi_{xy}^2=4k^2(x,y);\tag{3.2}$$

$$(\varphi_{yy}-\varphi_{xx})(\psi_{xx}-\psi_{yy})+(-4\varphi_{xy})\psi_{xy}=0,\tag{3.3}$$

где $k(x,y)$ — известная функция (предел текучести); $\sigma_x=\partial^2\varphi/\partial y^2$; $\sigma_y=\partial^2\varphi/\partial x^2$; $\tau_{xy}=-\partial^2\varphi/\partial x\,\partial y$; $u=\partial\psi/\partial y$; $v=-\partial\psi/\partial x$. К системе (3.2), (3.3) необходимо добавить граничные условия в напряжениях и перемещениях [9].

Введем новые независимые переменные

$$\xi=a_1x+\lambda_1y+d_1,\qquad \eta=b_2x+\lambda_2y+d_2,\tag{3.4}$$

где a_1, λ_1, d_1, b_2, λ_2, d_2 — произвольные действительные или комплексные числа. Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$\big[(\lambda_1^2+a_1^2)\varphi_{\xi\xi}+2\sqrt{(\lambda_1^2+a_1^2)(\lambda_2^2+b_2^2)}\,\varphi_{\xi\eta}-(\lambda_2^2+b_2^2)\varphi_{\eta\eta}\big]^2+$$

$$+4\varphi_{\xi\eta}\big\{\big[a_1b_2+\lambda_1\lambda_2-\sqrt{(\lambda_1^2+a_1^2)(\lambda_2^2+b_2^2)}\,\big](\lambda_1^2+a_1^2)\varphi_{\xi\xi}+$$

$$+\big[a_1b_2+\lambda_1\lambda_2+\sqrt{(\lambda_1^2+a_1^2)(\lambda_2^2+b_2^2)}\,\big](\lambda_2^2+b_2^2)\varphi_{\eta\eta}\big\}+2(a_1b_2+\lambda_1\lambda_2)^2\varphi_{\xi\xi}\varphi_{\eta\eta}=4\bar{k}^2(\xi,\eta).\tag{3.5}$$

Данный подход позволяет в зависимости от выбора параметров в преобразовании (3.4) и соответствующей комбинации членов в выражении (3.5) получать уравнения всех трех типов. Положим $a_1b_2+\lambda_1\lambda_2=0$, тогда выражение (3.5) сводится к виду

$$(\lambda_1^2+a_1^2)^2\Big[\varphi_{\xi\xi}-\Big(\frac{\lambda_2}{a_1}\Big)^2\varphi_{\eta\eta}+2\Big|\frac{\lambda_2}{a_1}\Big|\varphi_{\xi\eta}\Big]^2-$$

$$-4(\lambda_1^2+a_1^2)^2\Big|\frac{\lambda_2}{a_1}\Big|\varphi_{\xi\eta}\Big[\varphi_{\xi\xi}-\Big(\frac{\lambda_2}{a_1}\Big)^2\varphi_{\eta\eta}\Big]=4\bar{k}^2(\xi,\eta).\tag{3.6}$$

Для простоты примем $a_1 = \lambda_2$. Подстановкой гиперболических базисных функций (см. п. **1**) в выражение (3.6) последнее линеаризуется относительно искомой функции после извлечения квадратного корня.

В общем случае, когда некоторые коэффициенты в преобразовании (3.4) комплексные, при выполнении равенства $a_1b_2 + \lambda_1\lambda_2 = \sqrt{(\lambda_1^2 + a_1^2)(\lambda_2^2 + b_2^2)}$ уравнение (3.5) можно записать в следующем виде (например, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{3/2}$, $b_2 = 2/\sqrt{2}$, $a_1 = \sqrt{3/2} + i\sqrt{2}/2$):

$$\Big[(\lambda_1^2 + a_1^2)\varphi_{\xi\xi} + 2\sqrt{(\lambda_1^2 + a_1^2)(\lambda_2^2 + b_2^2)}\,\varphi_{\xi\eta} - (\lambda_2^2 + b_2^2)\varphi_{\eta\eta}\Big]^2 + \\ + 2(a_1b_2 + \lambda_1\lambda_2)\varphi_{\eta\eta}(\gamma_1\varphi_{\xi\eta} + \gamma_2\varphi_{\xi\xi}) = 4\bar{k}^2(\xi, \eta), \qquad (3.7)$$

где $\gamma_1 = 4(\lambda_2^2 + b_2^2)$; $\gamma_2 = a_1b_2 + \lambda_1\lambda_2$.

Рассмотрим уравнение

$$\gamma_1\varphi_{\xi\eta} + \gamma_2\varphi_{\xi\xi} = 0. \qquad (3.8)$$

Подставив инвариантное решение $\varphi = \eta^\alpha J(\vartheta)$, $\vartheta = \xi/\eta$ в (3.8), получим уравнение

$$\eta^{\alpha-2}[(\gamma_1 - \vartheta\gamma_2)J'' + \gamma_2(\alpha - 1)J'] = 0 \qquad (\eta^{\alpha-2} \neq 0),$$

решением которого является функция

$$J(\vartheta) = (-c_1/\gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2\vartheta)^\alpha + c_2,$$

где c_1, c_2 — константы интегрирования; α — произвольное действительное или комплексное число. Тогда решение уравнения (3.8) запишем в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_\alpha A_\alpha\Big[-\frac{c_1}{\gamma_2}(\gamma_1\eta - \gamma_2\xi)^\alpha + c_2\eta^\alpha\Big] \qquad (3.9)$$

(A_α — подлежащие определению произвольные коэффициенты). После подстановки (3.9) в уравнение (3.7) последнее линеаризуется относительно искомой функции. Решив задачу в напряжениях, далее решаем уравнение (3.3), используя, например, гиперболические базисные функции.

В заключение отметим следующие особенности приведенных в работе базисных функций. Базисные функции обладают хорошей структурой, удобными аналитическими и вычислительными свойствами. Например, для уравнения Лапласа шаровые функции имеют разброс коэффициентов в диапазоне от 35/128 до 4 341 887 550, а приведенные в данной работе — от 1 до 126. Во многих случаях размерность пространства сокращается на единицу. Решения представляются в аналитическом виде, и поэтому упрощается постановка и решение задач параметрической идентификации и обратных задач. Как линейные, так и нелинейные математические модели редуцируются к линейным алгебраическим уравнениям. Имея аналитическое решение и граничные условия, за счет внутренних параметров (c_0, c_1, a_1, b_2, ...) можно исключить все особенности, связанные с решением СЛАУ. После подстановки базисных функций (1.15), удовлетворяющих уравнению (1.13), в нелинейные дифференциальные уравнения, принадлежащие определенному классу, последние редуцируются к СЛАУ без применения традиционных методов линеаризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Шаповалов В. Н.** К групповым свойствам линейных уравнений // Изв. вузов. Физика. 1968. № 6. С. 75–80.

3. **Остросаблин Н. И., Сенашов С. И.** Общие решения и симметрии уравнений линейной теории упругости // Докл. РАН. 1992. Т. 322, № 3. С. 112–122.
4. **Миллер-Уиллер М. Л.** Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
5. **Дружинин Г. В., Бодунов Н. М.** Приближенный метод решения двумерной задачи теории упругости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 179–185.
6. **Дружинин Г. В., Закиров И. М., Бодунов Н. М.** Базисные функции в приближенных решениях краевых задач. Казань: Изд-во "Фэн", 2000.
7. **Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
8. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности: Пер. с англ. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
9. **Унксов Е. П., Джонсон У., Колмогоров В. Л. и др.** Теория пластических деформаций металлов. М.: Машиностроение, 1983.
10. **Аркулис Г. Э., Дорогобид В. Г.** Теория пластичности. М.: Металлургия, 1987.

Поступила в редакцию 16/X 2001 г.,
в окончательном варианте — 6/III 2003 г.