

ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ АРМИРОВАННОГО СЛОЯ

Ю. В. Немировский

(Новосибирск)

Механические свойства армированного материала зависят от свойств материала связующего, материалов армирующих элементов, от их процентного содержания и характера армирования, поэтому практически каждый класс армированных материалов требует специального анализа. При этом главная цель заключается в получении, соотношений описывающих связи между напряжениями и деформациями при деформировании армированного материала.

Существует два подхода к построению этих связей: феноменологический подход, при котором армированная среда рассматривается как однородная монолитная анизотропная среда [1,2], и подход, основанный на структурном анализе армированного материала в соответствии с характером строения материала и механическими свойствами составляющих его компонентов [3,4]. В пределах упругости, если пренебречь некоторыми тонкими эффектами (концентрацией напряжений в окрестности армирующих элементов, неравномерностью деформаций между ними и др.) оба подхода дают, по существу, одинаковые уравнения связей между осредненными напряжениями и деформациями и в этом смысле равноценны.

Феноменологический подход для построения определяющих уравнений упруго-пластического поведения анизотропных сред был использован в ряде исследований, среди которых отметим, например, работы [5-7]. Однако полученные в них уравнения следует относить, по видимому, к «физическим анизотропным средам», анизотропия которых является следствием их кристаллической структуры. Что же касается конструктивно-анизотропных, в том числе армированных материалов, то за пределом упругости специфические особенности каждого типа конструктивной анизотропии отражаются на самом виде условий пластичности [8-10], а также на характере уравнений связи между напряжениями и деформациями, поэтому каждый тип конструктивной анизотропии должен анализироваться отдельно. Поэтому за пределом упругости только структурный анализ армированного материала на основе модели, отражающей его специфические особенности, позволяет получить искомые соотношения связи между напряжениями и деформациями. Преимущество структурного анализа заключается также в том, что он позволяет оценить характер работы каждого из элементов композиции и тем самым открывает путь к целенаправленному регулированию характера армирования для улучшения прочных свойств армированных материалов.

Ниже на основе модели, рассмотренной в [10], и некоторых дополнительных упрощающих предположений анализируется упруго-пластическое поведение армированного слоя под действием сил в его плоскости.

1. Под армированным слоем понимаем сравнительно тонкую пластинку, состоящую из изотропного слоя с внедренным в него армирующим слоем (фиг. 1). Последний представляет собой сеть тонких одномерных нитей, расположенных в направлениях, составляющих углы  $\alpha_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) с некоторым направлением 1.

Предполагается:

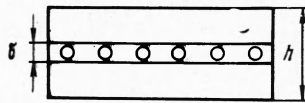
- 1) материал всех элементов составляющих композицию является упруго-пластическим и в общем случае различным для каждого элемента;
- 2) число армирующих элементов достаточно велико, так что материал композиции можно считать квазиоднородным;
- 3) расстояние между армирующими элементами достаточно велико и в то же время достаточно мало по сравнению с размерами пластинки, чтобы локальными эффектами вблизи нитей и нерегулярностью деформации между нитями можно было пренебречь;

4) соединение элементов композиции является идеальным, т. е. проскальзывание между армирующими элементами и связующим отсутствует;

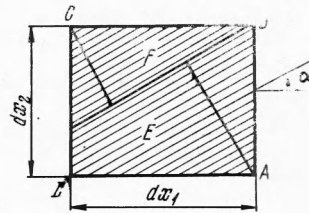
5) каждая нить, если она внедрена в материал связующего, способна выдерживать как растягивающую, так и сжимающую силу.

Однако при воздействии сжимающей силы может возникнуть некоторая форма неустойчивости, поэтому пределы текучести и прочности (как и модуль упрочнения для упрочняющих материалов) при растяжении и сжатии считаются разными. Модули Юнга приняты одинаковыми при растяжении и сжатии;

6) материал изотропного связующего подчиняется деформационной теории пластичности с одинаковыми характеристиками на растяжение и сжатие и для простоты считается несжимаемым как в упругой, так и пластической области. При необходимости можно отказаться от требования несжимаемости и вместо деформационной теории воспользоваться теорией типа течения.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) — удельные интенсивности в плоскости слоя армирующих нитей, составляющих углы  $\alpha_n$  с направлением 1,  $h$  — толщина армированного слоя,  $\omega_z$  — интенсивность армирующего слоя по толщине пластинки. Тогда в ортогональной системе  $1 \sim 2$  компоненты внутренних усилий в композитном слое будут равны

$$t_k = a\sigma_{ij}^0 + \sum_{n=1}^N \omega_n \sigma_n l_{1n} l_{2n} \quad (i, j = 1, 2; k = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$t_j = \frac{T_{jj}}{h}, \quad t_3 = \frac{T_{12}}{h}, \quad l_{1n} = \cos \alpha_n, \quad l_{2n} = \sin \alpha_n$$

$$0 \leq \alpha_n \leq \pi, \quad a = 1 - \omega_z, \quad \omega_n = n_n F_n / AFh, \quad \omega_z = \delta / h$$

Здесь  $T_{ij}$  — усилия,  $\sigma_{ij}^0$  — напряжения в заполнителе,  $\sigma_n$  — напряжения в армирующих нитях,  $F_n$  — площади поперечного сечения элементов армирования,  $n_n$  — число нитей элементов армирования на отрезках  $AF$  длиной  $l$  (фиг. 2).

При малых деформациях на основе предположения об отсутствии проскальзывания получим следующие зависимости между деформациями  $\epsilon_n$  армирующих элементов и деформациями слоя заполнителя

$$\epsilon_{(n)} = \epsilon_1 l_{1n}^2 + \epsilon_2 l_{2n}^2 + \epsilon_3 l_{1n} l_{2n} \quad (1.2)$$

Здесь  $\epsilon_1, \epsilon_2$  — компоненты деформации слоя заполнителя в направлениях 1 и 2 соответственно,  $\epsilon_3$  — деформация сдвига.

В соответствии с принятыми выше предположениями внутренние напряжения элементов композитного слоя связаны с деформациями следующими зависимостями:

$$\sigma_{11}^0 = \frac{4}{3} E_c (\epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2), \quad \sigma_{22}^0 = \frac{4}{3} E_c (\epsilon_2 + \frac{1}{2} \epsilon_1) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{12}^0 = \frac{1}{3} E_c \epsilon_3, \quad \sigma_n = E_{cn}^{\pm} \epsilon_n$$

Здесь  $E_c, E_{cn}^{\pm}$  — секущие модули материалов заполнителя и армирующих элементов при растяжении (плюс) и сжатии (минус).

Если все элементы композиции при данных нагрузках  $t_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) остаются упругими, то все секущие модули равны соответствующим модулям Юнга

$$E_c = E, \quad E_{cn}^{\pm} = E_n \quad (1.4)$$

Тогда, подставляя выражения (1.3) в (1.4), получаем следующие зависимости между усилиями  $t_k$  и деформациями  $\varepsilon_k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \|a_{km}\| \boldsymbol{\varepsilon}, & \boldsymbol{\varepsilon} &= \|b_{km}\| \mathbf{t}, & \|b_{km}\| &= \|a_{km}\|^{-1} \\ \mathbf{t} &= \|t_1, t_2, t_3\|', & \boldsymbol{\varepsilon} &= \|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\|' & (k, m = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Штрих при матрице обозначает операцию транспонирования. Коэффициенты матрицы  $\|a_{km}\|$  равны

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{4}{3}aE + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{in}^4, \\ a_{12} = a_{21} &= \frac{2}{3}Ea + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, & a_{i3} = a_{3i} &= \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{in}^3 l_{jn}, \\ a_{33} &= \frac{1}{3}aE + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, & (i, j = 1, 2; i \neq j) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставляя компоненты деформации из (1.5) в (1.3) и учитывая при этом (1.4), определяем внутренние напряжения во всех элементах, составляющих армированный слой. С их помощью можно определить, при каких нагрузках те или иные элементы композиционного слоя переходят в пластическое состояние. Так, армирующие элементы остаются упругими, если выполняются неравенства

$$-\sigma_n^- < E_n \left[ \sum_{k=1}^3 t_k (b_{1k} l_{1n}^2 + b_{2k} l_{2n}^2 + b_{3k} l_{1n} l_{2n}) \right] < \sigma_n^+ \quad (1.7)$$

$(n = 1, 2, \dots, N)$

и слой связующего материала остается упругим, если выполняется неравенство

$$\sigma_{11}^{02} - \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^{02} + 3\sigma_{12}^{02} < \sigma_0^2 \quad (1.8)$$

причем в это неравенство вместо  $\sigma_{ij}^0$  следует подставить выражения (1.3) с учетом (1.4) и (1.5)

В (1.7), (1.8) напряжения  $\sigma_0, \sigma_n^{\pm}$  обозначают соответственно пределы текучести материалов связующего и армирующего элементов при растяжении или сжатии.

Нарушение какого-либо из неравенств (1.7), (1.8) приводит к возникновению пластических деформаций в соответствующих армирующих элементах или заполнителя. Пусть, например, при некоторой комбинации усилий  $t_k$  такой, что

$$f_n(t_1, t_2, t_3) = 0 \quad (1.9)$$

нарушается какое-либо из неравенств (1.7). Тогда можно считать, что уравнение (1.9) в пространстве напряжений  $t_1, t_2, t_3$  определяет поверхность текучести для армированного материала с композитными элементами, обладающими упруго-пластическими свойствами. Действительно, для

всех напряжений внутри этой поверхности после разгрузки слоя остаточные деформации отсутствуют. Для напряжений вне этой поверхности в армированном слое после снятия нагрузки сохраняются остаточные деформации. Аналогичные по смыслу поверхности в пространстве напряжений получим также в случаях, когда нарушаются (по отдельности или некоторые вместе) остальные неравенства (1.7) или (1.8). Таким образом, совокупная поверхность текучести для армированного материала в пространстве напряжений состоит из большого числа «кусков» различных аналитических поверхностей, и вид ее существенным образом зависит от характера армирования и свойств элементов композиции.

Более того, вид уравнений связи при упруго-пластическом поведении армированного слоя также существенным образом зависит от характера армирования. Пусть, например, условие пластичности имеет вид (1.9) и диаграмма деформирования армирующих элементов имеет линейный участок упрочнения. Тогда для напряжений, лежащих вблизи, но вне поверхности (1.9), имеем

$$E_c = E, \quad E_{cp}^{\pm} = E_p \quad (p=1, 2, \dots, N, p \neq n) \quad (1.10)$$

и закон деформирования в элементах углового армирования с углом  $\alpha_n$  имеет вид

$$\sigma_n = E_{tn}^{\pm} \varepsilon_n \pm \sigma_n^{\pm} (1 - E_{tn}^{\pm} / E_n) \quad (1.11)$$

Здесь верхние или нижние знаки выбираются в зависимости от того, нарушается правая или левая часть неравенства (1.7) при напряжениях, удовлетворяющих уравнению (1.9).

Примем далее для определенности зависимость (1.11) при верхних знаках. Тогда, подставляя выражения (1.3) и (1.11) с учетом (1.2) и (1.10) в (1.1), получаем следующие зависимости между усилиями и деформациями:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \|a'_{km}\| \boldsymbol{\varepsilon}, & \boldsymbol{\varepsilon} &= \|b'_{km}\| \mathbf{t}, & \|b'_{kn}\| &= \|a'_{km}\|^{-1} \\ \mathbf{t}' &= \|t'_1, t'_2, t'_3\|' & (k, m &= 1, 2, 3) & (1.12) \\ t'_i &= t_i - \beta_n l_{in}^2, & t'_3 &= t_3 - \beta_n l_{1n} l_{2n}, & \beta_n &= \omega_n \sigma_n^+ [1 - E_{tn}^+ / E_n] \end{aligned}$$

В (1.12) коэффициенты матрицы  $\|a'_{mk}\|$  имеют тот же вид, что и коэффициенты матрицы  $\|a_{km}\|$  из (1.6), если в последних  $E_q$  заменить на  $E_q^+$  для  $n=q$ , где  $q$  — номер семейства нитей, перешедшего в пластическое состояние.

Соотношения (1.12) описывают упруго-пластическое поведение армированного слоя в случае, когда условие пластичности для него имеет вид (1.9). Эти соотношения будут справедливы до тех пор, пока не будет нарушено какое-либо другое из неравенств (1.7) или (1.8), если в последних  $b_{ik}$  и  $t_k$  заменить соответственно на  $b_{ik}'$ ,  $t_k'$  ( $i=1,2; k=1,2,3$ ). При нарушении неравенств типа (1.7) последующие видоизменения уравнений можно осуществить точно так же, как и при получении (1.12), и в результате каждый раз будем иметь линейные уравнения, подобные (1.12). Если материал армирующих элементов идеальным упруго-пластический, то в уравнениях (1.12) и подобных им соответствующие касательные модули  $E_{tn}^{\pm}$  следует приравнять нулю. При этом в отличие от изотропного или «физически анизотропного» идеально пластического слоя армированный слой с идеальными упруго-пластическими армирующими элементами дает взаимно однозначную зависимость между напряжениями и деформациями также и при неупругих деформациях.

В том случае, если первоначально нарушается неравенство (1.8), тогда как неравенства (1.7) остаются верными, пластические деформации начинаются в слое заполнителя и сопровождаются упругими деформациями в армирующих элементах. Тогда следует принять

$$E_{cn}^{\pm} = E_n, \quad E_c = \Phi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \sqrt[2]{\frac{2}{3}[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_3^2]}^{1/2} \quad (1.13)$$

Здесь  $\varepsilon$  — интенсивность деформаций в слое заполнителя,  $\Phi$  — функция, определяемая по пластической части диаграммы растяжения.

Подставляя при значениях (1.13) для секущих модулей выражения (1.3). (1.2) в (1.1), получаем

$$\begin{aligned} t_1 &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_3 + \frac{4}{3}[\Phi(\varepsilon) - E](\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2) \\ t_2 &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{23}\varepsilon_3 + \frac{4}{3}[\Phi(\varepsilon) - E](\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1) \\ t_3 &= a_{13}\varepsilon_1 + a_{23}\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_3 + \frac{1}{3}[\Phi(\varepsilon) - E]\varepsilon_3 \end{aligned} \quad (1.14)$$

В отличие от (1.12) эти уравнения существенно нелинейны даже при линейном упрочнении материала заполнителя. Если материал заполнителя идеально пластический с пределом текучести  $\sigma_0$ , то в (1.14) следует принять  $\Phi(\varepsilon) = \sigma_0 / \varepsilon$ . При этом уравнения (1.14) определяют взаимно однозначную зависимость между  $t_k$  и  $\varepsilon_k$ , если только  $a_{km} \neq 0$  ( $k, m = 1, 2, 3$ ).

Если первоначально нарушается неравенство (1.7), так что пластические деформации появляются в армирующих элементах, составляющих угол  $\alpha_n$  с направлением  $I$ , и деформирование армированного материала происходит в соответствии с зависимостями (1.12), а затем при некоторых значениях  $t_k$  нарушается неравенство (1.8), то в дальнейшем закон деформирования будет иметь вид (1.14), если вместо  $t_k, a_{km}$  подставить соответственно  $t_k'$  и  $a_{km}'$ .

Соотношения типа (1.12) и (1.14) позволяют не только описать характер деформирования упруго-пластического слоя, но вместе с (1.2) и (1.3) определить также эффективность работы всех элементов композиции. В зависимости от того, какие элементы композиции деформируются пластически, эти соотношения имеют линейный и нелинейный характер, поэтому в ряде случаев некоторые косвенные сведения об эффективности данного типа армирования можно получить непосредственно по экспериментальным диаграммам деформирования материалов или конструкций.

2. В качестве примера использования полученных соотношений рассмотрим задачу о растяжении усилием  $t_1$  слоя, армированного нитями одного направления, составляющими угол  $\alpha_1 = \alpha$  с направлением нагружения. Для простоты будем считать, что материал всех элементов композиции идеальный упруго-пластический. Тогда в рассматриваемом случае следует принять:

$$t_2 = t_3 = 0, \quad N = 1, \quad E_{t_1}^{\pm} = 0, \quad \Phi(\varepsilon) = \sigma_0 / \varepsilon$$

В результате в упругой области получим

$$\frac{t_1}{aE\varepsilon_1} = \delta, \quad \frac{\sigma_1}{aE\varepsilon_1} = \frac{E_1}{2Ea} \delta_1, \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (2.1)$$

$$\frac{\sigma_{11}^{\circ}}{E\varepsilon_1} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\Delta_1}{2\Delta}\right), \quad \frac{\sigma_{22}^{\circ}}{E\varepsilon_1} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta_1}{\Delta}\right), \quad \frac{\sigma_{12}^{\circ}}{E\varepsilon_1} = -\frac{\Delta_2}{3\Delta} \quad (2.2)$$

$$\delta = \frac{a_{11}\Delta - a_{12}\Delta_1 - a_{13}\Delta_2}{aE\Delta}, \quad \delta_1 = \frac{2\Delta \cos^2 \alpha - \Delta_2 \sin 2\alpha - 2\Delta_1 \sin^2 \alpha}{\Delta} \quad (2.3)$$

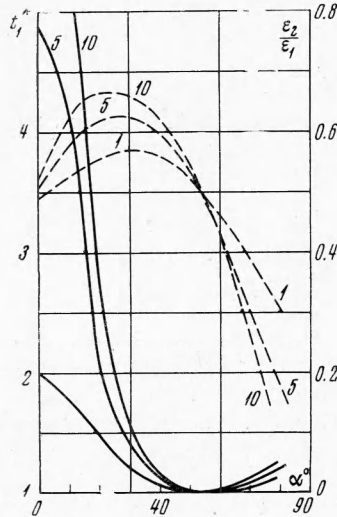
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{23} & a_{13} \end{vmatrix}$$



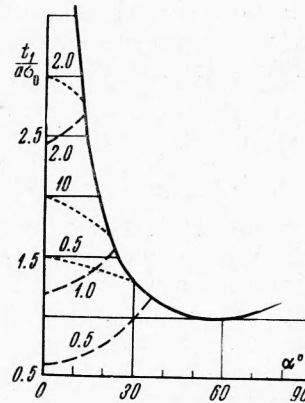
На фиг. 3 представлены зависимости от  $\alpha$  величин  $t_1^* = t_1 / aE\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 / \varepsilon_1$ , подсчитанных по формулам (2.1) при  $\omega_1 E_1 / aE = 1, 5, 10$ .

Условие пластичности для армирующих элементов в данном случае имеет вид

$$\frac{t_1}{a\sigma_0} = \pm \frac{2\delta E \sigma_1 \pm}{\delta_1 E_1 \sigma_0} \quad (2.4)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Верхние знаки соответствуют  $\varepsilon_{(1)} > 0$  ( $\varepsilon_{(1)}$  — деформация армирующих элементов, подсчитанная по формуле (1.2) с учетом (2.1)), нижние при  $\varepsilon_{(1)} < 0$ . Далее примем для определенности  $\sigma_1^+ = \sigma_1^-$ . Тогда нетрудно убедиться, что в (2.4) необходимо брать только верхние знаки. На фиг. 4 пунктирными линиями изображены кривые зависимости  $t_1 / a\sigma_0$  от  $\alpha$ , подсчитанные при  $\omega_1 \sigma_1^+ / a\sigma_0 = 0.5, 1.0, 2.0$  и  $\omega_1 E_1 / Ea = 5$ .

При значениях нагрузок, расположенных между пунктирными и точечными кривыми на фиг. 4, напряжения в армирующих элементах остаются постоянными и равными  $\sigma_1^+$ . Зависимости между усилием и деформациями имеют вид

$$\begin{aligned} aE\varepsilon_1 &= t_1 - \omega_1 \sigma_1^+ (\cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha) \\ aE\varepsilon_2 &= -\frac{1}{2} t_1 - \omega_1 \sigma_1^+ (\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha) \\ aE\varepsilon_3 &= \frac{3}{2} \omega_1 \sigma_1^+ \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

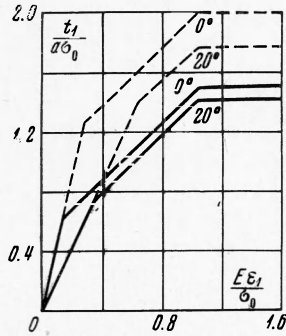
Так что деформация сдвига не зависит от нагрузки, а «коэффициент» Пуассона» наоборот, зависит от нее.

Соотношения (2.5) справедливы до значений нагрузки, при которых возникают пластические деформации в связующем. Соответствующие значения нагрузки определяются из уравнения

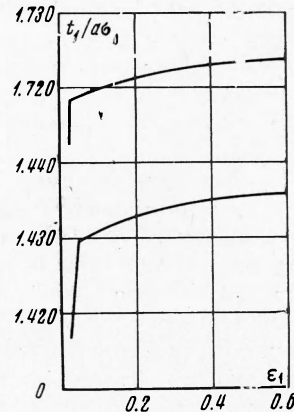
$$\begin{aligned} (t_1 - \omega_1 \sigma_1^+ \cos^2 \alpha)^2 + (t_1 - \omega_1 \sigma_1^+ \cos^2 \alpha) \omega_1 \sigma_1^+ \sin^2 \alpha + (\omega_1 \sigma_1^+)^2 \sin^4 \alpha + \\ + \frac{1}{4} (\omega_1 \sigma_1^+)^2 \sin^2 2\alpha = (a\sigma_0)^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Зависимость  $t_1 / \sigma_0 a$  от  $\alpha$ , подсчитанная с помощью этого уравнения при  $\omega_1 \sigma_1^+ / a\sigma_0 = 0.5, 1.0, 2.0$ , изображена на фиг. 4 точечными линиями. Больших нагрузок армированный материал с идеально пластическими элементами композиции выдержать не может.

Формулы (2.4) и (2.5) определяют диаграммы растяжения материала в тех случаях, когда пластические деформации первоначально возникают в армирующих элементах. Соответствующие диаграммы при  $\omega_1 E_1 / aE = 5$ ,  $\omega_1 \sigma_1^+ / a\sigma_0 = 0.5$  (сплошные) и 1.0 (пунктирные) и  $\alpha = 0, 20^\circ$  изображены на фиг. 5. Горизонтальные участки соответствуют предельным нагрузкам для слоя.



Фиг. 5



Фиг. 6

Возможен также случай, когда пластические деформации появляются первоначально в связующем, тогда как армирующие элементы остаются упругими. Тогда в (1.10) знак неравенства следует заменить знаком равенства и после подстановки в него выражений (2.2) получим следующую зависимость:

$$2t_1 / a\sigma_0 = \sqrt{3\delta\Delta(\Delta^2 - \Delta\Delta_1 + \Delta_1^2)^{-1/2}} \quad (2.7)$$

Эта зависимость при  $\omega_1 E_1 / aE = 5$  на фиг. 4 сплошной линией.

При нагрузках, превышающих значения (2.7), используя для простоты предположение об идеально пластическом материале, имеем следующие зависимости между усилием  $t_1$  и деформациями  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ :

$$\begin{aligned} 2a(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sigma_0 + 3\omega_1 E_1 \varepsilon_1 \cos^2 \alpha &= 3t_1 \varepsilon \\ 2a(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\sigma_0 + 3\omega_1 E_1 \varepsilon_1 \sin^2 \alpha &= 0, \\ 2a\varepsilon_3 \sigma_0 + 3\omega_1 E_1 \varepsilon_1 \sin 2\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из этих уравнений путем несложных преобразований получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} 6\operatorname{tg}\alpha(1 - Bt_1 / \sigma_0 a) + (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2) \varepsilon_3 / \varepsilon_1 &= 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha - 2 \right), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{A} \left[ 2 \left( \frac{Bt_1}{a\sigma_0} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha \right] \\ A = \frac{1}{4(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \left[ \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + 4) - 2(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2) \right] \\ B = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ 12 + \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right)^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha + 4) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Напряжения в армирующих элементах равны

$$\omega_1 \sigma_1 / a\sigma_0 = A / B \quad (2.10)$$

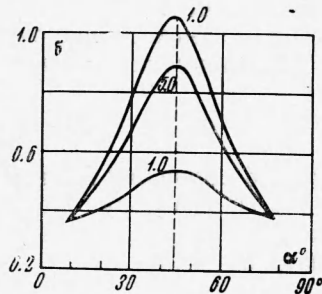
Формулы (2.9) определяют однозначную зависимость между усилием  $t_1$  и деформациями  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , несмотря на то, что материал связующего идеально пластический. Подчеркнем также, что в отличие от (2.5) эта

зависимость нелинейная. На фиг. 6 приведены подсчитанные по формулам (2.1) и (2.9) диаграммы растяжения при

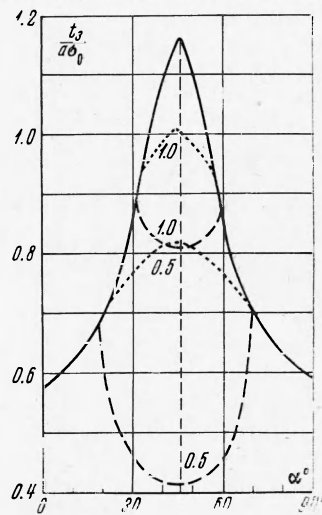
$$E / \sigma_0 = 40, \quad \omega_1 E_1 / aE = 1.5$$

Соотношения (2.9) будут справедливы до тех значений  $t_1$ , при которых напряжения в армирующих элементах достигнут предела текучести. Это значение нагрузки будет предельным для данного материала. На диаграмме растяжения при этой нагрузке появляется горизонтальный участок. На фиг. 6 прямые линии соответствуют решению (2.1), а криволинейные участки — решению (2.9). Точки перехода определяются по формуле (2.7).

В заключение данного пункта отметим, что формулы (2.1) и (2.5) можно использовать также для описания диаграммы растяжения материала армированного идеально хрупкими нитями. В этом случае формула (2.4) определяет нагрузки, при которых происходит разрушение нитей. Если при этих значениях нагрузок условие текучести для заполнителя не будет нарушено, то дальнейшее поведение материала характеризуется мгновенным переоскоком на диаграмму, описываемую уравнениями (2.5) при  $\sigma_1^+ = 0$ .



Фиг. 7



Фиг. 8

3. В качестве второго примера рассмотрим сдвиг однонаправленного армированного материала. В этом случае

$$t_1 = t_2 = 0, \quad N = 1, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad E_{t1}^{\pm} = 0, \quad \Phi(\varepsilon) = \sigma_0 / \varepsilon$$

В упругой области имеем

$$\frac{t_3}{aE\varepsilon_3} = \delta, \quad \sigma_1 = \frac{E_1 \delta_1}{aE\delta} t_3, \quad \frac{\sigma_{11}^0}{E} = -\frac{2t_3(2\Delta_1 + \Delta_2)}{3\delta\Delta Ea} \quad (3.1)$$

$$\frac{\sigma_{22}^0}{E} = -\frac{2(2\Delta_2 + \Delta_1)t_3}{3E\delta\Delta a}, \quad \frac{\sigma_{12}^0}{E} = \frac{t_3}{3\delta Ea}$$

Здесь

$$\delta = \frac{a_{33}\Delta - a_{13}\Delta_1 + a_{23}\Delta_2}{aE\Delta}, \quad \delta_1 = \frac{(\Delta \sin 2\alpha - 2\Delta_1 \cos^2 \alpha - 2\Delta_2 \sin^2 \alpha)}{2\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

На фиг. 7 приведены графики зависимости модуля сдвига от угла  $\alpha$ , подсчитанные по формулам (3.1) при  $\omega_1 E_1 / aE = 1, 5, 10$ .

Условие пластичности для армирующих элементов в этом случае имеет вид

$$t_3 / a \sigma_0 = E\delta\sigma_1^+ / E_1\delta_1\sigma_0 \quad (3.2)$$



Графики этой зависимости при  $\omega_1 E_1 / aE = 5$  и  $\omega_1 \sigma_1^+ / a\sigma_0 = 0.5, 1.0$  изображены на фиг. 8 пунктирными кривыми. Если нагрузки превышают значения (3.2), то упруго-пластическое поведение определяется зависимостями

$$\begin{aligned} aE\varepsilon_1 &= -\omega_1 \sigma_1^+ (\cos^2 \alpha - 1/2 \sin^2 \alpha), & aE\varepsilon_2 &= -\omega_1 \sigma_1^+ (\sin^2 \alpha - 1/2 \cos^2 \alpha) \\ aE\varepsilon_3 &= 3 [t_3 - 1/2 \omega_1 \sigma_1^+ \sin 2\alpha], & a\sigma_{11}^0 &= -\omega_1 \sigma_1^+ \cos^2 \alpha, \\ a\sigma_{22}^0 &= -\omega_1 \sigma_1^+ \sin^2 \alpha, & a\sigma_{12}^0 &= t_3 - 1/2 \omega_1 \sigma_1^+ \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

Зависимости (3.3) справедливы до тех пор, пока напряжения  $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0$  не нарушат неравенства (1.10). Соответствующая предельная нагрузка определяется равенством

$$\frac{t_3}{a\sigma_0} = \frac{1}{2} \frac{\omega_1 \sigma_1^+}{a\sigma_0} \sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_1 \sigma_1^+}{a\sigma_0} \right)^2 (\cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \right]^{1/2}$$

Зависимости этой нагрузки от  $\alpha$  при  $\omega_1 \sigma_1^+ / a\sigma_0 = 0.5, 1.0$  изображены на фиг. 8 точечными кривыми. Сплошными кривыми на той же фиг. 8 приведены зависимости нагрузок от  $\alpha$ , при которых пластические деформации первоначально возникают в связующем. Соответствующие уравнения для них получим, если в (1.8) знак неравенства заменить равенством и затем подставить в него выражения (3.1) для  $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0$ .

Уравнения упруго-пластического поведения армированного слоя при пластических деформациях связующего и упругих деформациях армирующих элементов в рассматриваемом случае получим из (1.17) при  $t_1 = t_2 = 0$  и  $\Phi(\varepsilon) = \sigma_0 / \varepsilon$ .

Аналогичные решения можно получить при любых других типах нагружения или армирования слоя.

В заключение отметим, что принятая в расчетах модель идеально пластического материала использована для определенности и чтобы подчеркнуть некоторые особенности зависимостей между напряжениями и деформациями при упруго-пластическом деформировании и армированных материалов. При необходимости нетрудно провести соответствующие расчеты при любом конкретном законе упрочнения.

Поступила 15 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Копнов В. А., Поспелов А. Д., Синюков А. М. Сопротивление стеклопластиков. М., «Машиностроение», 1968.
2. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига, «Зинатне», 1967.
3. Болотин В. В. Основные уравнения теории армированных сред. Механика полимеров, 1965, № 2, стр. 27—37.
4. Ван-Фо-Фы Г. А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты. Механика полимеров, 1966, № 4, стр. 593—602.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
6. Гольденблат И. В. Теория малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2, стр. 60—67.
7. Ломакин В. А. О теории нелинейной упругости и пластичности анизотропных сред. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1960, № 4.
8. Немировский Ю. В., Работнов Ю. Н. Предельное равновесие подкрепленных цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3, стр. 83—94.
9. Немировский Ю. В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметричных оболочек. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 6.
10. Немировский Ю. В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя. ПМТФ, 1969, № 5.