РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2016 № 5

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ МАССИВА ПОРОД В ОКРЕСТНОСТИ ПРОТЯЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫРАБОТКИ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ СМЕЩЕНИЙ НА ЕЕ ГРАНИЦЕ

А. И. Чанышев[1, 2], И. М. Абдулин[1]

[1]*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,* E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия
[2]*Новосибирский государственный университет экономики и управления,*
ул. Каменская, 52, 6300099, г. Новосибирск, Россия

Показано, как по измеренным смещениям на границе цилиндрической выработки (шахтного ствола) в рамках модели идеально-пластического тела определяется деформированное состояние массива пород вокруг выработки, кроме того, находятся упругопластическая граница и смещения в пластической области деформирования.

Пластичность, осесимметричная деформация, смещения, упругопластическая граница

Основным инструментом геомеханических исследований являются измерения смещений. По ним находятся напряжения, по характеру роста смещений — условия роста трещин, обрушения кровли, бортов карьеров открытых горных работ. Смещения — важное звено в экспериментально-аналитическом методе, развиваемом в ИГД СО РАН [1 – 3]. С помощью смещений формулируются обратные задачи геомеханики, связанные с информацией о параметрах закладочного массива, глубиной залегания полости по конфигурации мульды оседания [4, 5]. Актуальными остаются задачи о внезапных выбросах газа и угля, горных ударах. Для их решения необходимо знание области разрушения массива пород. В данной работе эта задача так же решается с помощью смещений.

Постановка задачи. Пусть в массиве горных пород пройдена протяженная выработка. Пусть это будет цилиндрическая выработка радиуса a. Для простоты ограничимся рассмотрением случая неподкрепленной выработки, контур которой свободен от напряжения. Кроме того, будем считать известными радиальные и осевые смещения массива пород на границе выработки (в процессе эксплуатации выработки их можно определить с помощью, например, лазерного сканирования). Решается следующая задача — по измеренным смещениям определить, в каком состоянии находится массив пород на границе выработки, не примыкает ли к ней зона разрушения и, если да, на какое расстояние вглубь от выработки она простирается, как распределены в ней напряжения, деформации, смещения, а также решить вопрос об оставшемся ресурсе прочности самого массива пород в окрестности выработки.

В данной работе под зоной разрушения понимается зона идеальной пластичности, в которой напряжения, отвечающие за рост сдвиговых деформаций, сохраняют постоянное (критическое) значение, сдвиги растут. Задача решается в осесимметричном случае деформирования, когда все основные величины зависят только от полярного радиуса и осевой координаты. По смещениям на границе находятся смещения внутри массива пород, по этим смещениям восстанавливаются деформации, по деформациям — граница пластической области деформирования. В качестве базовых (как и в случае плоской деформации) принимаются уравнение, характеризующее изменение объема, и условие соосности тензоров напряжений и деформаций. Это, по существу, два уравнения для определения двух смещений (радиального и осевого). При этом напряжения в классической области деформирования находятся из статически определимой задачи, включающей в себя уравнения равновесия, условия пластичности и граничные условия для напряжений.

Что касается математической постановки задачи, то следует отметить, что большинство задач геомеханики рассматриваются либо в постановке Дирихле, когда на всей границе тела задаются смещения (2-я краевая задача), либо в постановке Неймана, когда на всей границе задается вектор напряжений Коши (1-я краевая задача), либо в постановке Робена, когда на части границы задается вектор смещений, на другой части — вектор напряжений Коши (3-я краевая задача). В данной работе для решения упругопластической осесимметричной задачи (рис. 1) предлагается на одной и той же границе — контуре выработки, задавать одновременно и вектор напряжений Коши, и вектор смещений, т. е. условия Дирихле и Неймана. Экспериментально эта постановка достаточно просто реализуется, когда контур выработки свободен от напряжений. В лабораторных условиях для регистрации смещений контура выработки (отверстия) при нагружении возможно использовать оптические приспособления, в натурных условиях — лазерное сканирование.

Эту задачу можно исследовать в рамках плоской деформации (рис. 1*а*), когда в каждом сечении массива пород с выработкой имеем одно и тоже распределение напряжений и деформаций, не зависящее от осевой координаты выработки. Данная задача решалась в многочисленных работах [6–15], где упругопластическая граница либо полностью охватывала контур выработки [6–14], либо частично [15]. Ниже задачу о распределении напряжений, деформаций и смещений вокруг цилиндрической выработки предлагается рассмотреть в осесимметрической постановке, когда зона пластичности имеет вид, представленный на рис. 1*б* в виде заштрихованной области (вид ограниченного сверху и снизу цилиндра), когда пластическая зона зависит не только от радиальной координаты, но и от осевой.

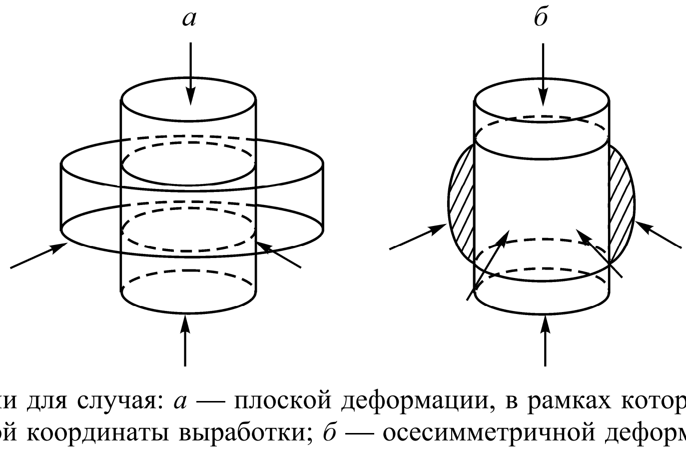

Рис. 1. Схема задачи для случая: *а* — плоской деформации, в рамках которой пластическая зона не зависит от осевой координаты выработки; *б* — осесимметричной деформации с заштрихованной пластической зоной. Стрелки указывают направления действия нагрузок

Показывается, что решение такой задачи в пластичности существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных.

Решение задачи. Для решения задачи в осесимметричном случае имеем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \end{cases} \tag{1}$$

соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r},\ \ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},\ 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \tag{2}$$

где u, w — смещения; r, φ, z — цилиндрические координаты. Тензоры напряжений и деформаций в этом случае имеют вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{rz} & 0 \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Граничные условия для напряжений:

$$\sigma_r\big|_{r=a} = 0, \quad \tau_{rz}\big|_{r=a} = 0. \tag{4}$$

Для тензора T_σ главные напряжения

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2},\quad \sigma_2 = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2},\quad \sigma_3 = \sigma_\varphi. \tag{5}$$

(главные напряжения необходимы для формулировки критерия образования неупругих деформаций в заштрихованной области на рис. 1*б*). В (5) входит напряжение τ_{rz}, относительно которого предполагаем, что $\tau_{rz} = 0$ не только на границе выработки, но и всюду в зоне неупругих (пластических) деформаций. Поскольку главные оси тензоров T_σ и T_ε совпадают, из условия $\tau_{rz} = 0$ следует, что всюду в области пластических деформаций

$$2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \tag{6}$$

Формула (6) — первое из используемых далее условий. Построим теперь второе уравнение для определения смещений u, w. Для этого, прежде всего, примем гипотезу о том, что рассматриваемое пластическое состояние — это состояние полной пластичности, когда два главных напряжения σ_2, σ_3 равны между собой. Поскольку $\tau_{rz} = 0$, то из (5) следует, что $\sigma_2 = \sigma_z$, поэтому предполагаются равными напряжения σ_z и σ_φ (в теории пластичности [16–19] это условие соответствует нахождению на ребре призмы Треска).

Среднее напряжение и средняя деформация предполагаются связанными законом упругого изменения объема:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z). \tag{7}$$

При этом параметры Лоде–Надаи μ_σ, μ_ε могут не совпадать:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_z - (\sigma_r + \sigma_\varphi)}{\sigma_r - \sigma_\varphi} \neq \mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_z - (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi)}{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}.$$

Этот факт не противоречит теории идеальной пластичности на ребре призмы Треска, согласно которой вектор приращений пластических деформаций должен находиться внутри угла, образованного нормалями к соседним граням призмы Треска [20].

Обратимся теперь к решению задачи. Полагая $\sigma_r - \sigma_\varphi = \sigma_r - \sigma_z = 2k$, где k — предел упругости материала на сдвиг, из (1) получаем

$$\sigma_r = -2k\ln\frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_z = -2k - 2k\ln\frac{r}{a}. \tag{8}$$

Отметим, что решение (8) почти такое, как в случае плоской деформации, с одним отличием — в случае плоской деформации $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\varphi)/2$.

Далее рассматривается деформированное состояние. Для определения деформированного состояния используем (6), (7), (2), (8). Подставляя (8), (2) в (6), (7), находим следующие уравнения для определения смещений u, w:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{E}\left(-4k - 6k\ln\frac{r}{a}\right). \tag{9}$$

Дифференцируя первое уравнение по z, второе — по r, исключая производную $\partial^2 w/\partial r\partial z$ из обоих уравнений, имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{(1-2\nu)\,6k}{Er}. \tag{10}$$

Если первое уравнение в (9) продифференцировать по r, а второе — по z, то, исключая $\partial^2 u/\partial r\partial z$, запишем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \tag{11}$$

Решение основного уравнения в (10) ищем в виде произведения двух функций с разделяющими перемещениями:

$$u = f(r)g(z). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), получаем

$$\frac{g''(z)}{g(z)} = \frac{f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{f}{r^2}}{f} = -\lambda^2. \tag{13}$$

Из (13) следует, что

$$g(z) = C_1\cos\lambda z + C_2\sin\lambda z. \tag{14}$$

Функция f при этом удовлетворяет уравнению Бесселя:

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2}\right)f = 0. \tag{15}$$

Вместо r в (15) удобно ввести новую переменную $\rho = \lambda r$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\lambda df}{d\rho}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\lambda^2 d^2 f}{d\rho^2}, \qquad r = \frac{\rho}{\lambda},$$

поэтому

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2}\right)f = 0. \tag{16}$$

Отсюда следует [21], что функция f, удовлетворяющая (16), есть функция Бесселя первого порядка. Частное решение (10) разыскиваем в виде

$$u_{\text{частное}} = \frac{(1-2\nu)}{E} 3kr \ln r \,. \tag{17}$$

Если искать решение (11) в виде (12), то получим, что функция $f(r)$ будет удовлетворять уравнению

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \lambda^2 f = 0 \tag{18}$$

и при замене $\rho = \lambda r$ уравнение (18) преобразится в

$$f'' + \frac{1}{\rho} f' + f = 0 \,, \tag{19}$$

т. е. в уравнение Бесселя с нулевым порядком.

Относительно функций u и w предполагаем, что на границе $r = a$ функция u представляет собой полусинусоиду с уравнением

$$u = A \sin\frac{\pi z}{L} + C \,,$$

где $C = -\dfrac{(1-2\nu)}{E} 3k\; a \ln a$.

Здесь $[0, L]$ — интервал, на котором изменяются функции u, w. При этом w примет на данном отрезке вид

$$w = B \cos\frac{\pi z}{L} \,,$$

где в точках $z = 0$ и $z = L$ значения w будут иметь разные знаки.

Исходя из описанного представления поведения функций u и w, а также из общей теории решения уравнения Бесселя [21], будем искать решения u и w как произведения следующих функций:

$$\begin{gathered} u = [C_1 J_1(\lambda r) + C_2 Y_1(\lambda r)] \sin \lambda z - \frac{(1-2\nu)}{E} 3k\; r \ln r \,, \\ w = [D_1 J_0(\lambda r) + D_2 Y_0(\lambda r)] \cos \lambda z \,, \end{gathered} \tag{20}$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 — константы; $\lambda = \pi/L$, L — длина, на которой изменяются смещения u, w; J_1, J_0, Y_0, Y_1 — функции Бесселя и Неймана соответственно.

Для определения связей между константами C_1, C_2, D_1, D_2 используем уравнение (9). Подстановка (20) в (9) дает

$$C_1 = D_1 \,, \quad C_2 = D_2 \,. \tag{21}$$

Константы C_1 и C_2 в (20) находим из граничных условий

$$u\big|_{r=a} = u_0(z) \,, \quad w\big|_{r=a} = w_0(z) \,.$$

В нашем случае при $r = a$ имеем

$$\begin{gathered} u\big|_{r=a} = [C_1 J_1(\lambda a) + C_2 Y_1(\lambda a)] \sin \lambda z - \frac{(1-2\nu)}{E} 3k\; a \ln a \,, \\ w\big|_{r=a} = [C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda a)] \cos \lambda z \,. \end{gathered} \tag{22}$$

Решая систему, получим

$$C_1 = \frac{AY_0(\lambda a) - BY_1(\lambda a)}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{BY_1(\lambda a) - AY_0(\lambda a)}{\Delta},$$

где $\Delta = J_1(\lambda a)Y_0(\lambda a) - J_0(\lambda a)Y_1(\lambda a)$; A, B — константы из граничных условий $u = A\sin(\pi z/L) + C$, $w = B\cos(\pi z/L)$.

Теперь остается найти упругопластическую границу исходя из (20) и условия

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi = 2\gamma_s = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r},$$

где γ_s — предел упругости материала на сдвиг (максимальная сдвиговая деформация в пластической зоне превышает значение γ_s). На основании (20) получаем

$$\left[C_1\left(\lambda J_0(\lambda r) - \frac{2J_1(\lambda r)}{r}\right) + C_2\left(\lambda Y_0(\lambda r) - \frac{2Y_1(\lambda r)}{r}\right)\right]\sin\lambda z - \frac{1-2\nu}{E}3k = 2\gamma_s.$$

Данное уравнение служит для определения упругопластической границы: при заданном z находим отсюда соответствующее r. При этом упругопластическая граница может не примыкать к точкам, где $z = 0$, $\lambda z = \pi$.

Примеры расчетов для гранита. Пусть $E = 0.49\cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.25$, $k = 200$ МПа, $A = 40.5\cdot 10^{-3}$ м, $B = 41\cdot 10^{-3}$ м, высота исследуемой части ствола L = 10 м, радиус выработки $a = 2$ м, $\mu = E/[2(1+\nu)]$ МПа, $\lambda = \pi/L = 0.314$ 1/м, $\gamma s = k/(2\mu) = 5.102\cdot 10^{-3}$.

Для данного случая упругопластическая граница с функцией $z = z(r)$, $r \geq 2$ и длиной ствола L = 10 м имеет вид, показанный на рис. 2*а*. На рис. 2*б*, *в* представлены распределения смещений u и w в зависимости от z для разных радиусов.

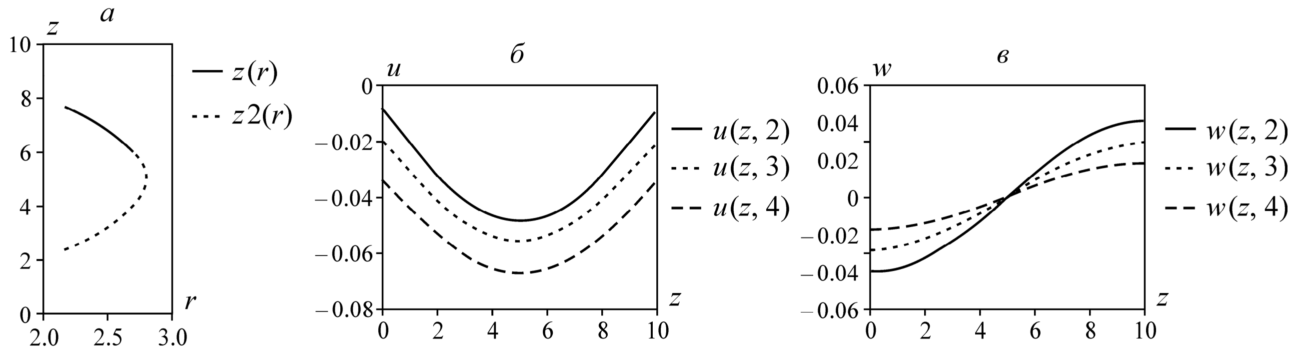

Рис. 2. Упругопластическая граница (*а*) и распределение смещений u (*б*) и w (*в*) в пластической области по оси z для разных радиусов (r = 2, 3, 4)

ВЫВОДЫ

Решена упругопластическая задача о сжатии массива пород с цилиндрической выработкой в осесимметричном случае. По данным измерений смещений на границе выработки находятся смещения в зоне неупругих деформаций вокруг выработки, по смещениям определяются деформации, по деформациям — упругопластическая граница. Данное решение можно использовать для оценки области разрушения вокруг выработок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Грицко Г. И., Власенко Б. В., Мусалимов В. М**. Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в угольном пласте // ФТПРПИ. — 1971. — № 1. — С. 3 – 10.
2. **Грицко Г. И., Власенко Б. В., Миренков В. Е.** К определению деформаций и перемещений в массиве горных пород экспериментально-аналитическим методом // ФТПРПИ. — 1970. — № 3. — С. 3 – 7.
3. **Цыцаркин В. Н., Грицко Г. И.** Определение смещений на контуре подготовительных выработок и нагрузки на крепь // ФТПРПИ. — 1966. — № 5. — С. 18 –20.
4. **Назаров Л. А., Назарова Л. А., Усольцева О. М., Кучай О. А**. Применение решений обратных задач для оценки состояния и свойств геомеханических объектов различного масштабного уровня // ФТПРПИ. — 2014. — № 5. — С. 33 – 43.
5. **Назаров Л. А., Назарова Л. А., Хан Г. Н., Вандамм М.** Оценка глубины и размеров подземной полости в грунтовом массиве по конфигурации мульды сдвижения на основе решения обратной задачи // ФТПРПИ. — 2014. — № 3. — С. 3 – 9.
6. **Галин Л. А.** Плоская упругопластическая задача // ПММ. — 1946. — Т. 10. — Вып. 3. — С. 367 – 386.
7. **Ивлев Д. Д.** Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина // ПММ. — 1957. — Т. 21. — Вып. 5. — С. 716 – 717.
8. **Остросаблин Н. И.** Упругопластическое распределение напряжений около круговой выработки при экспоненциальном условии текучести // Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. — Новосибирск: ИГД СО АН, 1973. — С. 32 – 39.
9. **Перлин П. И.** Приближенный метод решения упруго - пластических задач // Инженерный сб. — 1960. — Т. 28. — С. 145 – 150.
10. **Сажин В. С.** Определение области неупругих деформаций с учетом изменения сцепления породы // ФТПРПИ. — 1967. — № 6. — С. 93 – 95.
11. **Мирсалимов В. М.** Решение некоторых периодических упругопластических задач // ПМТФ. — 1975. — № 6. — С. 115 – 121.
12. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
13. **Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.** Упругопластическая задача. — Новосибирск: Наука, 1983. — 239 с.
14. **Протосеня А. Г., Карасев М. А., Беляков Н. А.** Упругопластическая задача для выработок различных форм поперечных сечений при условии предельного равновесия Кулона // ФТПРПИ. — 2016. — № 1. — С. 71 – 81.
15. **Чанышев А. И., Имамутдинов Д. И**. Решение упругопластической задачи о протяженной цилиндрической выработке // ФТПРПИ. — 1988. — № 5. — С. 24 – 32.
16. **Ишлинский А. Ю.** Осесимметричная задача и проба Бринеля // ПММ. — 1944. — Т. 8. — Вып. 3.
17. **Гоффман О., Закс Г.** Введение в теорию пластичности для инженеров. — М.: Машгиз, 1957.
18. **Томленов А. Д.** Теория пластических деформаций металлов (Напряженное состояние при ковке и штамповке). — М.: Машгиз, 1951.
19. **Березанцев В. Г.** Расчет оснований сооружений (пособие по проектированию). — Л.: Стройиздат, 1970. — 201 с.
20. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
21. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1977. — 831 с.

Поступила в редакцию 15/VI 2016