

4. Pate S. R., Schueler C. J. Radiated aerodynamic noise effects of boundary-layer transition in supersonic and hypersonic wind tunnels. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 3.
5. Корнилов В. И., Левченко В. Я., Харитонов А. М. Исследование перехода пограничного слоя на крыловом профиле при сверхзвуковых скоростях. Изв. СО АН СССР, Сер. техн., 1971, вып. 1, № 3.
6. Pate S. R., Groth E. E. Boundary-layer transition measurements on swept wings with supersonic leading edges. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 4.

УДК 534.24

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕЖИМЕ ВЫГОРАНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРОХА ПРИ ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ДАВЛЕНИИ

Ю. А. Гостинцев

(Москва)

При длительном горении симметричных элементов пороха (пластина, цилиндр или сфера) распределение температуры внутри частицы перестает «помнить» тепловые условия, созданные в процессе воспламенения. Поэтому, в принципе, при продолжительном горении элементов можно ожидать установления автомоделного режима нестационарного выгорания.

Как будет видно из дальнейшего, такой режим обеспечивается изменяющимся во времени давлением, если давление возрастает по мере выгорания частицы, до некоторого максимального значения, а затем падает до нуля.

В пределах феноменологической модели нестационарного горения пороха [1, 2] рассматриваемая проблема описывается системой уравнений [3, 4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\kappa}{r^s} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^s \frac{\partial T}{\partial r} \right), & 0 \leq r \leq R(t) \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= 0 \quad \text{при } r = 0, & T_s = T_s \left[p, \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{R(t)} \right] \quad \text{при } r = R(t) \\ - \frac{dR}{dt} &= u \left[p, \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{R(t)} \right], & p = p(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь начало координат помещено на оси симметрии элемента; $s = 0, 1, 2$ соответственно для пластины, цилиндра и сферы; $R(t)$ — расстояние до горячей поверхности; выражения для температуры поверхности T_s и скорости горения предполагаются известными функциями от давления p и градиента температуры на поверхности в конденсированной фазе (k -фазе).

Введены безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \tau &= t \frac{u_0^2}{\kappa}, & \xi &= r \frac{u_0}{\kappa}, & \vartheta &= \frac{T - T_0}{T_{s0} - T_0}, & w &= \frac{u}{u_0}, & \pi &= \frac{p}{p_0} \\ \varphi &= \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_{\xi=\delta(\tau)}, & \delta(\tau) &= R(t) \frac{u_0}{\kappa} \end{aligned}$$

где индексом 0 обозначены параметры, характеризующие горение полубесконечного объема пороха при начальной температуре T_0 , температуре поверхности T_{s0} и давлении p_0 .

Система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} &= \frac{1}{\xi^s} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^s \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right), & 0 \leq \xi \leq \delta(\tau) \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{при } \xi = 0, & \vartheta &= \vartheta_s(\pi, \varphi) \quad \text{при } \xi = \delta(\tau) \\ - \frac{d\delta}{d\tau} &= w(\pi, \varphi), & \pi &= \pi(\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) начальное условие на распределение температуры отсутствует, так как рассматривается автомоделный режим. Будем искать решение уравнения теплопроводности из (2) среди класса функций

$$\vartheta = B\delta^m f(\xi/\delta) = B\delta^m f(\eta) \quad (3)$$

Получим

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} \left(-\frac{1}{\eta} + \eta\delta \frac{d\delta}{d\tau} \right) - m f \delta \frac{d\delta}{d\tau} = 0$$

Видно, что если

$$\delta d\delta/d\tau = -4A = \text{const} \quad (4)$$

(скорость горения увеличивается обратно пропорционально половине текущего значения толщины элемента), то нестационарное уравнение Фурье из (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f'' + f'(s/\eta - 4A\eta) + 4mAf = 0 \quad (f'(0) = 0, f(1) = 1.0) \quad (5)$$

и имеет место автомоделное распределение температуры в k -фазе.

Заменой переменных

$$f = x^{(1-s)/2} z(x), \quad x = \eta^2, \quad y = 2Ax = 2A\eta^2$$

(5) можно свести к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$yz'' + \left(\frac{3-s}{2} - y \right) z' - \frac{1-s-m}{2} z = 0$$

решение которого выражается через функции Похгаммера ${}_1F_1(\alpha, \gamma, y)$. В первоначальных переменных f, η это решение имеет вид для пластины $s=0$ и сферы $s=2$

$$f_{0,2} = \eta^{1-s} \left[C_{11} F_1 \left(\frac{1-s-m}{2}, \frac{3-s}{2}, 2A\eta^2 \right) + C_2 (2A\eta^2)^{(s-1)/2} {}_1F_1 \left(-\frac{m}{2}, \frac{1+s}{2}, 2A\eta^2 \right) \right]$$

для цилиндра $s=1$

$$f_1 = C_{11} F_1 \left(-\frac{m}{2}, 1, 2A\eta^2 \right) + C_2 \left[{}_1F_1 \left(-\frac{m}{2}, 1, 2A\eta^2 \right) \ln 2A\eta^2 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-m/2+k-1}^k \frac{(2A\eta^2)^k}{k!} \sum_{v=0}^{k-1} \left(\frac{1}{v-m/2} - \frac{2}{1+v} \right) \right]$$

Из условия конечности f при $\eta=0$ и граничного условия $f(1)=1$ следует общее решение для автомоделного распределения температуры в элементе плоской, цилиндрической или сферической формы

$$\vartheta = B\delta^m \frac{{}_1F_1(-m/2, (1+s)/2, 2A\eta^2)}{{}_1F_1(-m/2, (1+s)/2, 2A)} \quad (6)$$

Для градиента температуры $\varphi = \partial\vartheta/\partial\xi$ у поверхности и температуры ϑ_0 в центре элемента имеем из (6)

$$\varphi = -\frac{Bm}{1+s} \frac{4A}{\delta^{1-m}} \frac{{}_1F_1(1-m/2, (3+s)/2, 2A)}{{}_1F_1(-m/2, (1+s)/2, 2A)} \quad (7)$$

$$\vartheta_0 = B\delta^m \frac{1}{{}_1F_1(-m/2, (1+s)/2, 2A)} \quad (8)$$

Найдем изменение давления, обеспечивающее необходимую в соответствии с (2) и (4) скорость горения и температуру поверхности. Будем считать, что из эксперимента, выполненного в стационарных условиях, известны зависимости $u(p, T_0)$, $T_s(p, T_0)$.

Тогда обычный градиентный пересчет, принятый в феноменологической модели [4,5], переведет эти зависимости в:

$$u = u \left[p, T_s - \frac{\kappa}{u} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R \right], \quad T_s = T_s \left[p, T_s - \frac{\kappa}{u} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R \right]$$

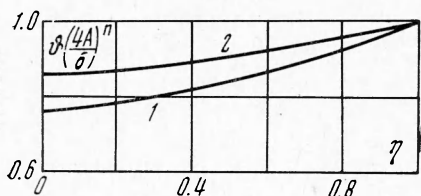
Пусть, например

$$u = u_1 p^\nu \exp \beta T_0, \quad u = D \exp (-E / RT_s)$$

Тогда, в принятых безразмерных переменных имеем

$$w = \pi^\nu \exp \beta (T_{s0} - T_0) (\phi_s - \phi/w) \quad (9)$$

$$w = \exp \varepsilon \Delta \frac{\phi_s - 1}{1 + \Delta \phi_s} \quad \left(\varepsilon = \frac{E}{RT_{s0}}, \quad \Delta = \frac{T_{s0} - T_0}{T_0} \right) \quad (10)$$



Считая $|\phi_s - 1| \ll 1.0$, формулу (10) можно переписать, как это сделано в [5], в приближенном виде

$$w \approx \phi_s^n, \quad \bar{v} = \frac{\varepsilon \Delta}{1 + \Delta} = \frac{E (T_{s0} - T_0)}{RT_{s0}^2}$$

Подставляя сюда (3) и (4), найдем связь между параметрами A , B и m , n

$$m = -1/n, \quad B = (4A)^{1/n} \quad (11)$$

С учетом (11) выражение (6) для распределения температуры примет вид

$$\phi = \left(\frac{4A}{\delta} \right)^{1/n} \frac{{}_1F_1(1/2n, (1+s)/2, 2A\eta^2)}{{}_1F_1(1/2n, (1+s)/2, 2A)} \quad (12)$$

На фигуре для примера показан вид решения (12) для автомоделного выгорания пластины $s = 0$ при $n = 5$ и 10 , $A = 0.5$. Теперь из (7) (9), (11) найдем изменение давления, соответствующее исследуемому режиму горения

$$\pi = \left(\frac{4A}{\delta} \right)^{1/\nu} \exp \left[- \left(\frac{4A}{\delta} \right)^{1/n} \frac{B_i}{\nu} \right]$$

$$B_i = \beta (T_{s0} - T_0) \left[1 - \frac{{}_1F_1((2n+1)/2n, (3+s)/2, 2A)}{n(s+1) {}_1F_1(1/2n, (1+s)/2, 2A)} \right] \quad (13)$$

Исследование (13) показывает, что с уменьшением размера элемента давление возрастает до некоторой максимальной величины

$$\pi_* = \left(\frac{n}{B_i} \right)^{n/\nu} \exp \left(- \frac{n}{\nu} \right) \quad \text{при } \delta_* = 4A \left(\frac{B_i}{n} \right)^n$$

а затем падает до нуля по мере полного выгорания элемента. Для обычных топлив $n = E (T_{s0} - T_0) / (RT_{s0}^2) \gg 1$ и с увеличением n положение максимума давления сдвигается в сторону меньших размеров элемента, а при $n \rightarrow \infty$ (топливо с постоянной температурой горячей поверхности) получаем предельный закон неограниченно растущего давления $\pi \sim \delta^{-1/\nu}$.

Изменение начала отсчета времени в рассмотренной выше задаче и переход к бесконечно большим текущим размерам элемента приводят к закону изменения давления во времени $\pi \sim \tau^{-1/2\nu}$, характерному для автомоделного режима горения полубесконечной области топлива. Такая задача рассмотрена в [1, 5].

Автор благодарит В. Б. Либровича, Ю. С. Рязанцева, С. С. Новикова и А. Г. Истратова за обсуждение работы и замечания.

Поступила 15 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
2. Новожилов Б. В. Нестационарное горение порохов, имеющих переменную температуру поверхности. ПМТФ, 1967, № 1.
3. Гостинцев Ю. А., Марголин А. Д. О нестационарном горении тонких пластин пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
4. Гостинцев Ю. А. О воспламенении, нестационарном выгорании и срыве пламени с частицы унитарного топлива. Физика горения и взрыва, 1971, № 3.
5. Либрович В. Б., Новожилов Б. В. Автомоделные решения в теории нестационарной скорости горения пороха. ПМТФ, 1971, № 4.