

16. Marsters G. F. Interaction of two plane, parallel jets // AIAA J.— 1977.— V. 15 N 12.
17. Miller D. R., Comings E. W. Force-momentum fields in a dual-jet flow // J. Fluid Mech.— 1960.— V. 7, N 2.
18. Pera L., G-bhart B. Laminar plume interactions // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 68, N 2.
19. Elbanna H., Sabbagh J. A. Interception of two equal turbulent jets // AIAA J.— 1985.— V. 23, N 7.
20. Fohl T., Turner J. S. Colliding vortex rings // Phys. Fluids.— 1975.— V. 18, N 4.
21. Zimmerman A. W. Multiburst cloud rise // AIAA J.— 1978.— V. 16, N 6.

г. Москва

Поступила 5/VI 1991 г.

УДК 532.59

В. Е. Веденьков

ПОЛЕ ДЛИННЫХ ПОДВЕТРЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

В линейной постановке рассматривается пространственная задача об установившихся длинных внутренних волнах, образующихся при обтекании плоскопараллельным сдвиговым потоком изолированной подводной горы малой (по сравнению с глубиной жидкости) высоты. В отличие от [1, 2], где в общей линейной постановке исследовалось поле подветренных внутренних волн в равномерном потоке экспоненциально стратифицированной жидкости, и [3, 4], где проведен асимптотический анализ вынужденных волн в устойчиво стратифицированном потоке со сдвигом скорости, в данной работе в приближении квазистатики выведены формулы, представляющие точное решение задачи для сдвигового потока и произвольной устойчивой стратификации жидкости в виде ряда двукратных интегралов. Для горы модельной формы решение задачи получено в элементарных функциях. Приведены примеры расчета ближней области поля подветренных внутренних волн в равномерном и сдвиговом потоках для взятого из наблюдений профиля частоты Вайсяля — Брента.

1. Пусть поток идеальной несжимаемой устойчиво стратифицированной жидкости постоянной глубины H набегаёт из бесконечности со скоростью $U(z)$ на изолированное подводное препятствие $z = -H + hf(x, y)$, причем $\max |f| = 1$, $h \ll H$, $f \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$; x, y — горизонтальные координаты, z — вертикальная. Ось x направлена вдоль набегающего потока, ось z — вертикально вверх, начало системы координат совпадает с невозмущенной свободной поверхностью.

В приближении квазистатики установившееся волновое поле, создаваемое препятствием в потоке, описывается уравнениями

$$(1.1) \quad \begin{aligned} Uu_x + wU_z &= -\rho_0^{-1}p_x, \quad Uv_x = -\rho_0^{-1}p_y, \\ p_z &= -\rho g, \quad U\rho_x + w\rho_z = 0, \quad u_x + v_y + w_z = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$(1.2) \quad p = \rho_0 g \zeta, \quad U\zeta_x = w \quad (z = 0), \quad w = hUf_x \quad (z = -H),$$

где u, v, w — компоненты вектора волновых скоростей; p, ρ — возмущения давления и плотности; ζ — смещение свободной поверхности; $\rho_0(z)$ — невозмущенный профиль плотности; подстрочный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей координате. Вместе с (1.2) должно выполняться условие излучения, состоящее в том, что все основные волновые возмущения сосредоточены вниз по потоку ($x > 0$).

Предполагается выполненным условие Майлса [5]

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{N^2(z)}{U^2(z)} \right) > 0,25 \quad (-H < z < 0),$$

гарантирующее отсутствие неустойчивых собственных колебаний.

После приведения системы (1.2) к одному уравнению относительно w и применения преобразования Фурье по переменным x, y (с параметрами μ, ν) получаем следующую краевую задачу для определения трансформанты Фурье W вертикальной компоненты скорости:

$$(1.3) \quad (\rho_1 \psi_z)_z + \rho_1 N_1^2 \lambda^2 \psi = 0 \quad (-H < z < 0);$$

$$(1.4) \quad \psi_z - g \lambda^2 \psi = 0 \quad (z = 0), \quad \psi = ik \cos \theta \cdot h \bar{f} \quad (z = -H).$$

Здесь $\psi = W/U$; $\rho_1 = \rho_0 U^2$; $N_1^2 = N^2 c^2 / U^2$; $\lambda^2 = (c \cos \theta)^{-2}$; $c = U(0)$; $N^2 = -g \rho_{0z} / \rho_0$ — квадрат частоты Вейселя — Брента; $k^2 = \mu^2 + \nu^2$; $\mu = k \cos \theta$; $\nu = k \sin \theta$; $\bar{f}(k, \theta)$ — трансформанта Фурье функции $f(x, y)$. Предположим, что $U(z) \neq 0, z \in [-H, 0]$.

Пусть $\Phi(z, \lambda^2)$ — решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничному условию при $z = 0$:

$$\Phi_z(0, \lambda^2) - g \lambda^2 \Phi(0, \lambda^2) = 0.$$

Будем искать решение задачи (1.3), (1.4) в виде $\psi = A \Phi$ (A — константа). Подставив указанное выражение во второе условие (1.4), находим A , и таким образом

$$(1.5) \quad \psi = ik \cos \theta \cdot h \bar{f} M(\lambda^2, z), \quad M(\lambda^2, z) = \Phi(z, \lambda^2) / \Phi(-H, \lambda^2).$$

Используя соотношение $U \zeta_x = w$ и применяя формулы обращения, из (1.5) для вертикальных смещений жидких частиц получим

$$(1.6) \quad \zeta(x, y, z) = h (2\pi)^{-1} \int_L^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{f} M(\lambda^2, z) k \exp \{ ikR \cos(\theta - \gamma) \} dk d\theta,$$

где интегрирование по θ производится от 0 до 2π с обходом полюсов подынтегральной функции в соответствии с условием излучения; $R^2 = x^2 + y^2$; $x = R \cos \gamma$; $y = R \sin \gamma$.

2. Функция $\Phi(z, \lambda^2)$ является целой функцией параметра λ^2 , следовательно, функция $M(\lambda^2, z)$ мероморфная. Ее полюсы — собственные значения задачи Штурма — Лиувилля, соответствующей (1.3), (1.4). Пусть $\lambda_n^2, \psi_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$; $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \dots$; $\|\psi_n\|^2 = \rho_1 g \psi_n^2(0) + \int_{-H}^0 \rho_1 N_1^2 \psi_n^2 dz = 1$) — совокупность всех собственных значений и ортонормированных собственных функций. Применяя теорему о разложении мероморфной функции на простейшие дроби, находим, что $M(\lambda^2, z)$ может быть представлена равномерно сходящимся рядом [6]:

$$(2.1) \quad M(\lambda^2, z) = \varphi_0(z) - \rho_1(-H) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \{ (\lambda^2 - \lambda_n^2)^{-1} + \lambda_n^{-2} \},$$

$$\varphi_0(z) = \Phi(z, 0) / \Phi(-H, 0), \quad \varphi_n(z) = \psi_n(z) \psi_{nz}(-H).$$

С учетом (2.1) выражение (1.6) приводится к виду

$$(2.2) \quad \zeta(x, y, z) = h \left\{ I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (I_{n1} + I_{n2}) \right\}, \quad I_0 = \varphi_0(z) f(x, y),$$

$$I_{n1} = \operatorname{Re} \pi^{-1} \int_L^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{f} \cos^2 \theta \cdot k (fr^{-2} - n^2 \cos^2 \theta)^{-1} \exp \{ ikR \cos(\theta - \gamma) \} dk d\theta,$$

$$I_{n2} = n^{-2} f(x, y), \quad \alpha_n = -\rho_1(-H) \varphi_n(z) n^2 \lambda_n^{-2}, \quad fr = c \lambda_n / n.$$

Формула (2.2) дает представление точного решения задачи в виде ряда по модам внутренних волн. Разлагая далее $\varphi_0(z)$ в обобщенный ряд

Фурье по системе собственных функций $\{\psi_n\}$ и используя известные свойства задачи Штурма — Лиувилля [7], можно показать, что

$$(2.3) \quad \varphi_0(z) = \rho_1(-H) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \lambda_n^{-2} \quad (-H < z \leq 0).$$

С учетом (2.1), (2.3) из (2.2) получаем

$$\zeta(x, y, z) = \begin{cases} h \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n I_{n1}, & z \neq -H, \\ hf(x, y), & z = -H. \end{cases}$$

Отсюда следует, что слагаемые I_0 и I_{n2} ($n = 1, 2, 3 \dots$) в (2.2) описывают локальные эффекты в ближней зоне препятствия, связанные с его обтеканием и слабо зависящие от стратификации и сдвига скорости, слагаемые I_{n1} ($n = 1, 2, 3 \dots$) — поле вынужденных внутренних волн вниз по потоку.

Для I_0 с использованием метода возмущений и условия «твердой крышки» на поверхности может быть получено явное представление

$$I_0 = \left\{ 1 - \int_{-H}^z \rho_1^{-1}(\xi) d\xi \right\} \left\{ \int_{-H}^0 \rho_1^{-1}(\xi) d\xi \right\} f(x, y).$$

3. В численных расчетах препятствие моделировалось функцией

$$f(x, y) = [(x/A)^2 + (y/B)^2 + 1]^{-3/2},$$

$$\bar{f}(k, \theta) = AB \exp[-k\kappa(\theta)], \quad \kappa(\theta) = (A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta)^{1/2}.$$

В этом случае интеграл по k в (2.2) вычисляется аналитически и выражение (2.2) приводится к виду

$$(3.1) \quad \zeta(x, y, z) = h \left\{ I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\operatorname{Re} AB \pi^{-1} \int_L \cos^2 \theta \cdot \Delta^{-1}(\theta) d\theta + I_{n2} \right) \right\},$$

$$\Delta(\theta) = (r^{-2} - n^2 \cos^2 \theta) [\kappa(\theta) - iR \cos(\theta - \gamma)]^2.$$

Интегрирование в (3.1) производится от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с обходом полюсов подынтегральной функции по малой полуокружности снизу при $\operatorname{Re} \theta < 0$ и сверху при $\operatorname{Re} \theta > 0$. Оставшийся интеграл в (3.1) аналогично [8] может быть вычислен с помощью теории вычетов, и решение задачи выписывается в элементарных функциях. Окончательное выражение для смещений жидких частиц не приводится ввиду его громоздкости.

Собственные значения λ_n^2 и собственные функции $\psi_n(z)$ находились на основе численного решения спектральной задачи для заданных распределений $N(z)$ и $U(z)$. В качестве модели распределения частоты Вэйсяля — Брента брался взятый из наблюдений профиль $N(z)$, представленный на рис. 1 сплошной линией. Глубина моря H в районе измерений составляла 900 м. Распределение скорости потока по глубине (штриховая линия) задавалось модельным с учетом основных свойств сдвиговых течений.

Характерные горизонтальные масштабы подводного препятствия выбирались из условия $A, B \geq 10H$, что

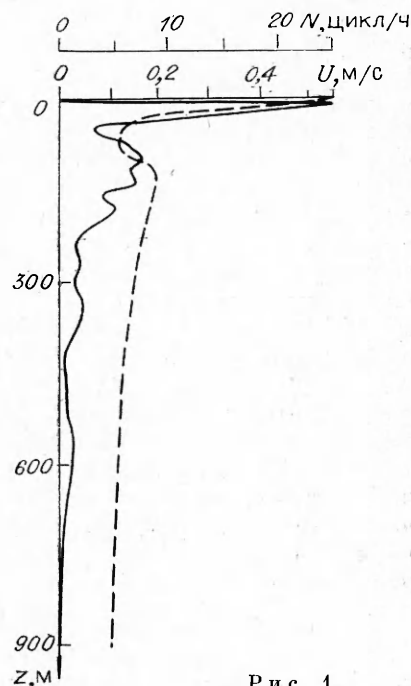


Рис. 1

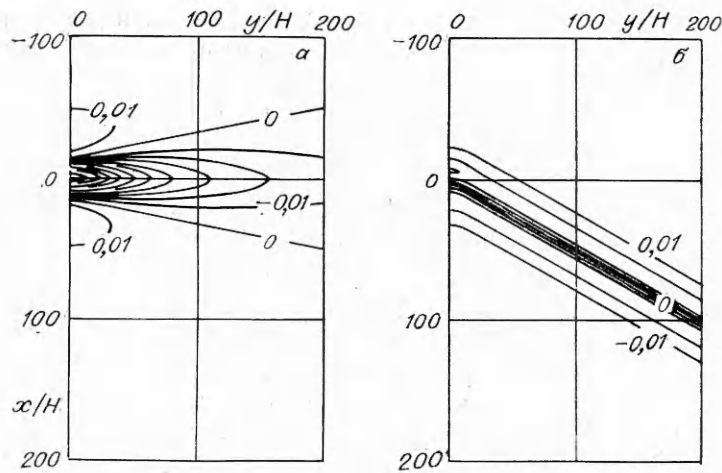


Рис. 2

оправдывает применимость длинноволнового приближения [9] и не противоречит реальным условиям. В расчетах значения параметров A , B и h принимались равными $A/H = 15$, $B/H = 15$, $h/H = 0,1$.

Для определения влияния сдвига скорости на характеристики подветренных волн в ближней зоне подводного препятствия были сопоставлены расчеты с учетом и без учета сдвига скорости при прочих равных условиях. Скорость бессдвигового потока принималась равной $U(0)$.

Установлено, что основные закономерности формирования поля вынужденных волн в сдвиговом потоке те же, что и в бессдвиговом [2, 9]. Волновые возмущения, создаваемые отдельной внутренней модой с номером n , локализованы в окрестности вертикальных плоскостей, составляющих с плоскостью xOz угол $\pm\gamma_n$, если $fr_n = c\lambda_n > 1$ (сверхкритическая мода). Значение γ_n определяется формулой $\gamma_n = \arcsin(fr_n^{-1})$. Если же $fr_n < 1$ (докритическая мода), то вклад такой моды заметен только в окрестности подводного препятствия и быстро затухает при удалении от него. Представление о горизонтальной структуре отдельной внутренней моды дает рис. 2, где с точностью до множителя $h\alpha_n(z)$ приведены результаты расчета шестой (докритической, $fr_6 = 0,97$ (а)) и седьмой (сверхкритической, $fr_7 = 1,12$ (б)) мод для указанных выше значений параметров модели. В силу симметрии показана только половина волновой картины. Максимальный вклад в суммарное волновое поле дает первая сверхкритическая мода (т. е. мода с номером l таким, что $fr_{l-1} < 1 < fr_l$). Величина γ_l определяет угловую ширину зоны основных волновых возмущений. Отметим, что значения $fr_n = 1$ в рассматриваемой модели являются резонансными. Оценки амплитуд волн для критических скоростей потока не могут быть получены в рамках линейного длинноволнового приближения. В этом случае необходим специальный анализ с учетом эффектов нелинейности и дисперсии, как это сделано, например, для волн в однородной жидкости в [10].

Основные отличия полей волн в сдвиговом и равномерном потоках наблюдаются в суммарной волновой картине. На рис. 3, 4 показаны вертикальный (на удалении $y/H = 200$ (а)) и горизонтальный (на глубине $z/H = -0,45$ (б)) разрезы поля подветренных внутренних волн без учета и с учетом сдвига скорости соответственно. На горизонтальных разрезах видна только половина волновой картины в силу ее симметрии. Суммирование в формуле (3.1) проводилось до выполнения в расчетной области условия

$$\max_{x,y} |\zeta_n(x,y) - \zeta_{n-1}(x,y)| / \max_{x,y} |\zeta_{n-1}(x,y)| < 0,01,$$

где ζ_n — значение ζ , вычисленное по (3.1) с учетом n слагаемых суммы.

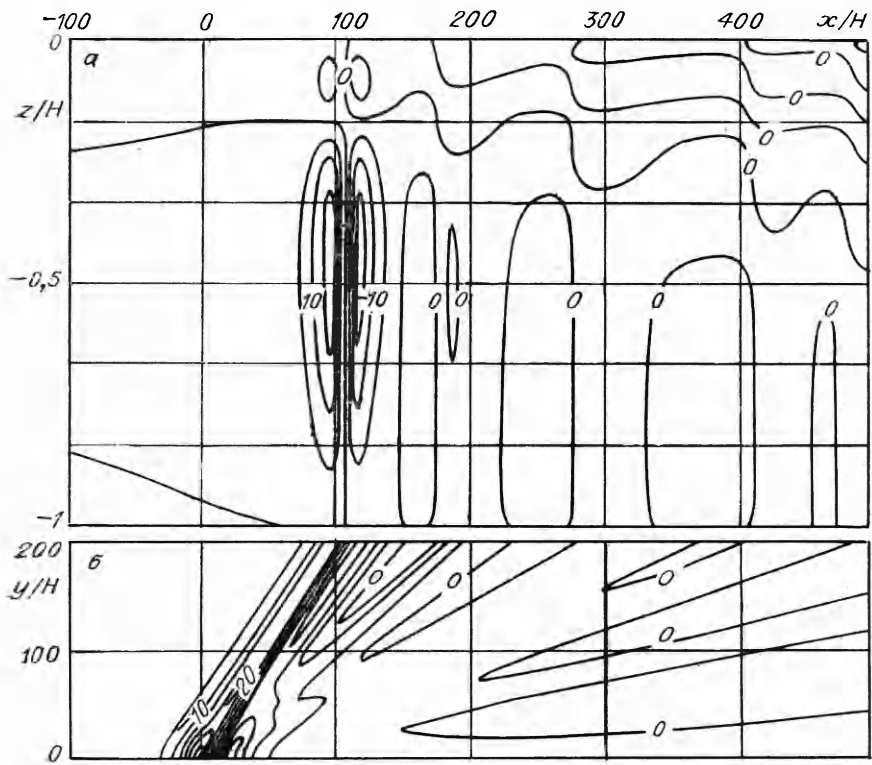


Рис. 3

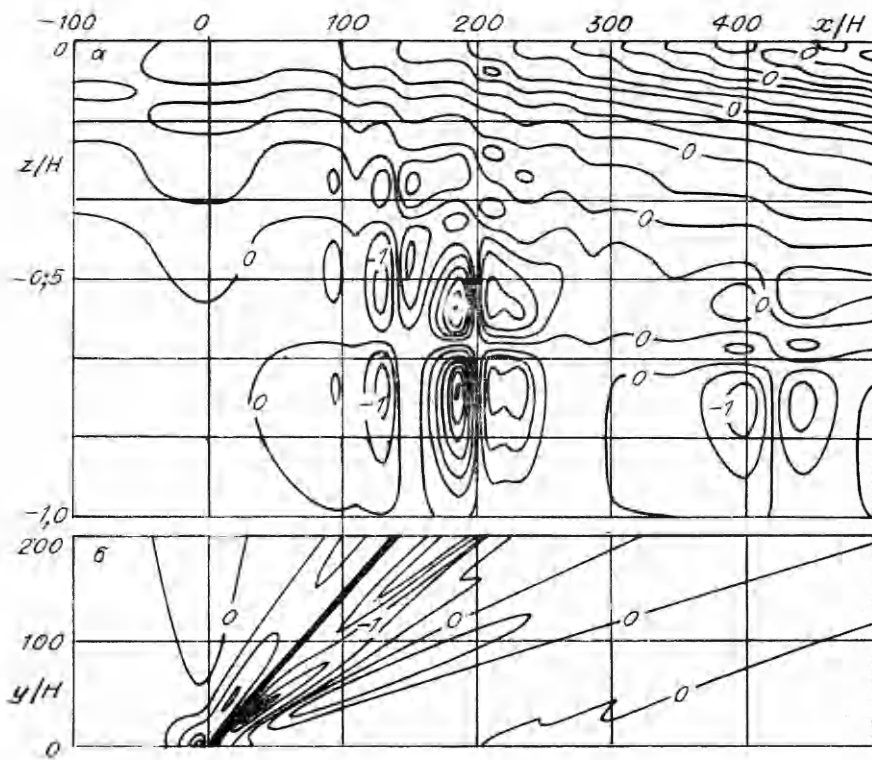


Рис. 4

Из сравнительного анализа следует, что учет сдвига скорости приводит к изменению угловой ширины зоны основных волновых возмущений, уменьшению амплитуд внутренних волн, существенному изменению вертикальной структуры поля подветренных волн. В сдвиговом потоке основной вклад в суммарное поле дают более высокие моды, чем в бессдвиговом. Последнее замечание согласуется с выводом о возможности доминирования высших мод в суммарном волновом движении, сделанном в [11] на основе анализа данных наблюдений в экваториальной зоне Индийского океана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бежанов К. А., Заец П. Г., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М. Пространственная задача обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 3.
2. Веденьков В. Е., Санников В. Ф. Ближнее поле пространственных внутренних волн, генерируемых возмущениями в стратифицированном потоке // Тр. науч.-техн. конф. «Эксперимент. и теорет. исследования волновых процессов в океане и использование их результатов для нужд народного хоз-ва», Севастополь, 28—30 ноября 1984/Мор. гидрофиз. ин-т АН УССР.— Севастополь, 1985.— Деп. в ВИНИТИ 12.06.85, № 4133—85.
3. Суворов А. М. Стационарные трехмерные волны в потоке стратифицированной жидкости со сдвигом скорости // Изв. АН СССР. ФАО.— 1981.— № 8.
4. Sturova I. V. Topographically generated three-dimensional internal waves in a shear flow // 2nd Intern. Symp. Stratified Flows, Trondheim, Norway, June, 1980.— Trondheim, s. a.
5. Miles J. W. On the stability of heterogeneous shear flow // J. Fluid Mech.— 1961.— V. 10, pt 4.
6. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций.— М.: Наука, 1978.
7. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию.— М.: Наука, 1970.
8. Smith R. B. Linear theory of stratified hydrostatic flow past an isolated mountain // Tellus.— 1980.— V. 32, N 4.
9. Веденьков В. Е., Антонова О. А. Длинные волны от движущихся барических возмущений в непрерывно стратифицированной жидкости // Поверхностные и внутренние волны в океане/Мор. гидрофиз. ин-т АН УССР.— Севастополь, 1987.— Деп. в ВИНИТИ 11.06.87, № 4266—В87.
10. Wu D. M., Wu T. Y. Three-dimensional nonlinear long waves due to moving surface pressure // 14th Symp. on Naval Hydrodynamics, Michigan, 1982: Proc.
11. Букатов А. Е., Кушнир А. М., Смирнов Г. В. и др. Внутренние волны приливного периода в экваториальной зоне Индийского океана // Океанология.— 1978.— Т. 18, вып. 5.

г. Севастополь

Поступила 16/X 1991 г.,
в окончательном варианте — 17/XII 1991 г.

УДК 532.59

Б. Е. Протопопов

ГЕНЕРАЦИЯ СОЛИТОНОВ ВВЕРХ ПО ПОТОКУ: ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ ОТ КЛЮЧЕВЫХ ПАРАМЕТРОВ

В последнее время повышенное внимание исследователей привлекает обнаруженное недавно явление — способность движущегося по поверхности жидкости источника возмущения генерировать волны солитонного вида, убегающие вперед по направлению движения этого источника [1—6]. Анализ процесса генерации солитонов представляет собой довольно трудную задачу, поскольку требует использования достаточно сложных математических моделей, учитывающих как нелинейность, так и дисперсию волн (в своеобразном балансе этих эффектов и кроется механизм яв-

© Б. Е. Протопопов, 1993