РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ДЕФОРМИРУЕМОМ ТРЕЩИНОВАТОМ КОЛЛЕКТОРЕ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА (ДЛЯ СЛУЧАЯ ПУСКА СКВАЖИНЫ)

Р. Г. Исаев (Грозный)

Процессы неустановившейся фильтрации жидкости в деформируемом трещиноватом коллекторе описываются нелинейными дифференциальными уравнениями параболического типа в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{rf(P)\frac{\partial P}{\partial r}\right\}=\frac{1}{\varkappa_{T0}}\frac{\partial P}{\partial t},\qquad \varkappa_{T0}=\frac{k_{T0}}{\mu\beta_T^*}\tag{1}$$

где $\varkappa_{T0}$ — коэффициент пьезопроводности, β_T^* — коэффициент упругоемкости трещиноватого коллектора, $f(P)$ — функция давления, k_{T0} — проницаемость трещиноватого коллектора при $P=P_0$.

Так же, как и для случая восстановления давления, будем искать решение уравнения (I) методом малого параметра, известным из [1,2]. Полагаем, что скважина запускается в эксплуатацию с постоянным объемным дебитом. Пусть

$$f(P)=[1-\beta(P_0-P)]^3$$

где β — коэффициент, зависящий от трещиноватости и упругих свойств породы [3]. Уравнение (I) представим в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\Phi^3\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right\}=\frac{1}{\varkappa_{T0}}\frac{\partial \Phi}{\partial t},\quad \Phi=1-\beta(P_0-P)\tag{2}$$

Полагаем, что после пуска скважины ее дебит остается постоянным, т. е. на стенке скважины реализуется условие

$$Q=\frac{2\pi hk_{T0}}{\mu}\left\{r[1-\beta(P_0-P)]^3\frac{\partial P}{\partial r}\right\}_{r=r_c\to 0}\tag{3}$$

Здесь h — мощность пласта, μ — вязкость жидкости.

Считается, что в начальный момент давление в пласте повсюду постоянно и равно

$$P(r,0)=P_0>0\quad\text{или}\quad\Phi(r,0)=\Phi_0>0\tag{4}$$

Для неограниченного трещиноватого пласта имеем также

$$P(\infty,t)=P_0>0\quad\text{или}\quad\Phi(\infty,t)=\Phi_0>0\tag{5}$$

Представим решение нашего уравнения в виде бесконечного ряда функций Φ

$$\Phi^4(r,t)=\Phi_0^4+\Omega\Phi_1(r,t)+\Omega^2\Phi_2(r,t)+\Omega^3\Phi_3(r,t)+\ldots\tag{6}$$

где $\Phi_1(r,t)$, $\Phi_2(r,t)$, $\Phi_3(r,t),\ldots$ — подлежат определению. Из (6) следует [4]

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(r,t)}{\Phi_0}&=\left(1+\frac{\Omega}{\Phi_0^4}\Phi_1(r,t)+\frac{\Omega^2}{\Phi_0^4}\Phi_2(r,t)+\frac{\Omega^3}{\Phi_0^4}\Phi_3(r,t)+\ldots\right)^{1/4}=\\&=1+\frac{1}{4}\frac{\Omega}{\Phi_0^4}\Phi_1(r,t)+\frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Phi_0^4}\left[\Phi_2(r,t)-\frac{3}{8}\frac{\Phi_1^2(r,t)}{\Phi_0^4}\right]+\\&+\frac{1}{4}\frac{\Omega^3}{\Phi_0^3}\left[\Phi_3(r,t)-\frac{\Phi_1(r,t)\Phi_2(r,t)}{4\Phi_0^4}+\frac{7}{32\Phi_0^8}\Phi_1^3(r,t)\right]+\cdots\end{aligned}\tag{7}$$

$$(\Omega=\mu\beta Q/\pi hk_{T0}\quad(\Omega\ll 1))$$

Если подставить выражения (7) и (6) в уравнение (2), то получается следующая последовательная цепочка линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}=\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}=\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)+\frac{3}{8\Phi_0^4}\frac{\partial\Phi_1^2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}=\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)+\frac{1}{4\Phi_0^4}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_1\Phi_2)-\frac{7}{32\Phi_0^8}\frac{\partial\Phi_1^3}{\partial t}$$

. . . .

$$\lambda=\varkappa_{T0}\Phi_0^3\tag{8}$$

Наша задача сводится, таким образом, к решению цепочки уравнений со следующими граничными и начальными условиями для Φ_1, Φ_2, Φ_3 и т. д.: (9)

$$\Phi_1(r,\ 0) = \Phi_2(r,\ 0) = \Phi_3(r,\ 0) = \ldots = 0,\ \Phi_1(\infty,\ t) = \Phi_2(\infty,\ t) = \Phi_3(\infty,\ t) = \ldots = 0$$
$$(r\ \partial\Phi_1/\partial r)_{r=r_c\to 0} = -1$$

Отыскание функции $\Phi_1(r,\ t)$ сводится к решению линейного дифференциального уравнения типа уравнения теплопроводности [5]. Следовательно, функция $\Phi_1(r,\ t)$ имеет вид

$$\Phi_1(r,\ t) = \mathrm{Ei}(-u) \qquad u = \frac{r^2}{4\varkappa_{T0}\, t} \qquad \mathrm{Ei}(-u) = -\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du \tag{10}$$

В соответствии с (8) находим

$$\frac{3}{8\Phi_0^4}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_1^2 = \frac{6}{8\Phi_0^4 t}\mathrm{Ei}(-u)\, e^{-u} \tag{11}$$

Следовательно

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} = \lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right) - \frac{3}{4\Phi_0^4 t}\mathrm{Ei}(-u)\, e^{-u} \tag{12}$$

Введем новую переменную $\xi = \sqrt{u} = r / 2\sqrt{\varkappa_{T0} t}$, тогда уравнение (12) примет вид

$$\frac{d\Phi_2}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \lambda\frac{1}{r}\frac{d\Phi_2}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial r} + \lambda\frac{d^2\Phi_2}{d\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + \lambda\frac{d\Phi_2}{d\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} - \frac{3}{4\Phi_0^4 t}\mathrm{Ei}(-u)\, e^{-u} \tag{13}$$

Полагая, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{r}{4\sqrt{\varkappa_{T0} t}\, t}, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa_{T0} t}}$$

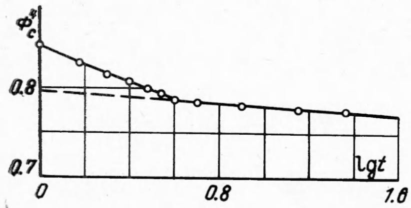
после ряда простых преобразований получаем

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\xi^2} + \frac{d\Phi_2}{d\xi}\left(2\xi\Phi_0^3 + \frac{1}{\xi}\right) = \frac{3}{\Phi_0^7}\mathrm{Ei}(-u)\, e^{-u} \tag{14}$$

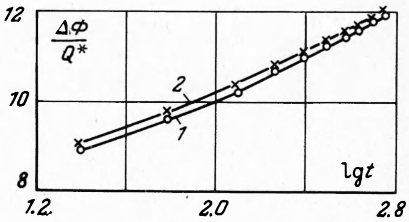
Имея в виду, что $\Phi_0 = 1$, из (14) следует

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\xi^2} + \frac{d\Phi_2}{d\xi}\left(2\xi + \frac{1}{\xi}\right) = 3\mathrm{Ei}(-u)\, e^{-u} \tag{15}$$

Из (15) видно, что получилось неоднородное дифференциальное уравнение с правой частью в полных производных.



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение уравнения (15) можно найти методом вариации постоянных [6].

Фундаментальной системой уравнения (15) без правой части будет $\mathrm{Ei}(-\xi^2)$, 1. Следовательно

$$\Phi_2 = C_1(\xi) + C_2(\xi)\,\mathrm{Ei}(-\xi^2) \tag{16}$$

где переменные $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ определяются из

$$\frac{dC_1}{d\xi} + \mathrm{Ei}(-\xi^2)\frac{dC_2}{d\xi} = 0, \qquad \frac{d}{d\xi}\mathrm{Ei}(-\xi^2)\,\frac{dC_2}{d\xi} = 3\mathrm{Ei}(-\xi^2)e^{-\xi^2} \tag{17}$$

Интегрируя (17) и подставляя в (16), получаем

$$\Phi_2(r,\ t) = {}^3/_2\,\mathrm{Ei}(-2u) - {}^3/_4\, e^{-u}\mathrm{Ei}(-u) - {}^3/_4\,\eta_2\,\mathrm{Ei}(-u) + {}^3/_4\,\eta_1 \tag{18}$$

Постоянные η_1 и η_2 определяются из условий (9), а именно

$$\lim_{u\to\infty} \Phi_2 = 0, \quad \left(\xi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = 0$$

Следовательно, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$. Окончательно получаем

$$\Phi_2(r, t) = {}^3/_2 \operatorname{Ei}(-2u) - {}^3/_4 e^{-u} \operatorname{Ei}(-u) - {}^3/_4 \operatorname{Ei}(-u) \tag{19}$$

Аналогичным образом можно определить все последующие приближения.

Ограничиваясь вторым приближением (погрешность в допустимых пределах), получаем такое решение уравнения (2) для случая пуска скважины: (20)

$$\Phi_c^4(r_c, t) = 1 - \Omega \operatorname{Ei}(-u) + \Omega^2 [{}^3/_2 \operatorname{Ei}(-2u) - {}^3/_4 e^{-u} \operatorname{Ei}(-u) - {}^3/_4 \operatorname{Ei}(-u)]$$

Формула (20) для обработки кривых понижения забойного давления после пуска скважины требует значительных расчетов. Однако для малых значений u при $r = r_c$ формула (20) может быть переписана в виде

$$\Phi_c^4(r_c, t) = 1 + \Omega \ln \frac{2.25\varkappa_{T0} t}{r_c^2} + \Omega^2 0.75 \ln \frac{4\varkappa_{T0} t}{r_c^2} - 2.783\Omega^2 =$$

$$= 1 + \Omega \ln \frac{2.25\varkappa_{T0}}{r_c^2} + 0.75\Omega^2 \ln \frac{4\varkappa_{T0}}{r_c^2} - 2.783\Omega^2 + (\Omega + 0.75\Omega^2) \ln t = B_1 + C_1 \ln t \tag{21}$$

$$C_1 = \Omega(1 + 0.75\Omega), \quad B_1 = 1 + \Omega \ln \frac{2.25\varkappa_{T0}}{r_c^2} + 0.75\Omega^2 \ln \frac{4\varkappa_{T0}}{r_c^2} - 2.783\Omega^2$$

Как видно из (21), обработка кривых понижения давления предполагает построение преобразованного графика в координатах $\Phi_c^4 - \lg t$, а затем определение по прямолинейному участку углового коэффициента. Затем, решая полученное квадратное уравнение, находим Ω, а по численному значению Ω определяется k_{T0}. Степень точности расчетов повышается введением в рассмотрение четвертого слагаемого разложения (6) и решением кубического уравнения при $\lg t$ и т. д.

Обработка кривой понижения давления по скв. 160—5 (месторождения Малгобек — Вознесенское), преобразованный график по которой приведен на фиг. 1, показала, что $k_{T0} = 0.045$ *дарси*.

Данные для построения преобразованного графика приведены в таблицу при значениях:
$Q_v = 378$ *м*^{3} / *сутки*, $\beta = 0.0025$ 1/*ат*
$\mu = 0.306$ *спз*, $h = 13$ *м*
$k = 0.045$ *дарси*.

ΔP, *ат*	t, *мин*	$\lg t$	Φ_c^4	$\Phi_0^4 - \Phi_c^4$
0	0	—	1	0
9	0.5	—	0.9149	0.0851
16	1.0	0	0.8493	0.1507
18.5	1.5	0.18	0.8283	0.1717
20.0	2.0	0.30	0.8145	0.1855
21.0	2.5	0.40	0.8077	0.1923
22.0	3.0	0.48	0.7975	0.2025
22.5	3.5	0.54	0.7941	0.2059
23.0	4.0	0.60	0.7874	0.2126
23.5	5.0	0.70	0.7841	0.2159
23.8	8.0	0.90	0.7807	0.2193
24.3	14.0	1.15	0.7774	0.2226
24.8	23.0	1.36	0.7741	0.2259

Сопоставление этого приближенного способа решения с автомодельным решением проведено на фиг. 2 при значениях $Q = 100$ *м*^{3}/*сутки*; $\beta = 0.005$ 1/*ат*; $\mu = 1$ *спз*; $h = 10$ *м*; $k_{T0} = 0.01$ *дарси*; $Q^* = 0.1$. Из него видно, что приближенное решение весьма близко к точному решению.

Поступила 4 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. Бузинов С. Н., Умрихин И. Д. Исследование пластов и скважин при упругом режиме фильтрации. «Недра», 1964.
3. Исаев Р. Г. О притоке сжимаемой жидкости в скважину из трещиноватого коллектора. Нефть и газ, 1963, № 6.
4. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Гостехиздат, 1957, стр. 324.
5. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз, 1959.