ПМТФ, № 4, 1973

УДК 532.516

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ДИФФУЗОРЕ

В. И. Найденов

(Москва)

В работе рассматривается распределение скорости и температуры в потоке вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре. Исследуется развитое течение, т. е. влияние входного участка в расчет не принимается. Предполагается, что стенки диффузора поддерживаются при температуре, зависящей от полярного радиуса. Динамический коэффициент вязкости считается экспоненциальной функцией температуры. Задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Доказана сходимость итерационного процесса.

1. Рассмотрим установившееся течение вязкой жидкости в плоском диффузоре. Примем, что коэффициент вязкости и температура связаны зависимостью

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta T} \tag{1.1}$$

где μ_0 — коэффициент вязкости при нулевой температуре, β — параметр, зависящий от рода жидкости и интервала температур.

Система уравнений течения без учета инерционных и диссипативных членов имеет вид [1]

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta\psi = {} & 4\left(\beta^2 \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial^2 T}{\partial r\,\partial\varphi}\right)\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) - \\
& - \beta \frac{\partial T}{\partial r}\left(-\frac{2}{r}\frac{\partial^3\psi}{\partial\varphi^2\,\partial r} - 2r\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \\
& - \beta \frac{\partial T}{\partial \varphi}\left(-\frac{2}{r}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\,\partial\varphi} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3\psi}{\partial\varphi^3} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r\,\partial\varphi} - \frac{4}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \\
& + \left(\beta^2 \frac{\partial T^2}{\partial\varphi} - \beta\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \\
& - \left(\beta^2\frac{\partial T^2}{\partial r} - \beta\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)\left(r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \\
a\Delta T = {} & -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где ψ — функция тока, a — постоянный коэффициент температуропроводности.

Зададим краевые условия и условие постоянства расхода через любое поперечное сечение диффузора

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \quad \left(\varphi = \pm\frac{\alpha}{2}\right) \\
& \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \to 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} \to 0 \quad (r \to \infty) \\
& \psi\left(r, \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{Q}{2} \quad (\psi(r, 0) = 0)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь α — угол раствора диффузора, Q — расход жидкости.

Пусть температура на стенках диффузора задана функцией

$$T = f(r) = \sum_{k=1}^{j} T_k r^{-k} \tag{1.4}$$

где T_k — известные числа.

Очевидно, что условия (1.4) неприменимы в окрестности начала координат ($r = 0$), поэтому последующее решение будет иметь смысл в окрестности бесконечно удаленной точки. Иначе говоря, влиянием входного участка и температурными условиями на его границе пренебрегается.

Определяющими переменными и параметрами в задаче являются величины r, φ, α, μ_0, Q, β, $f(r)$, a, ρ, c_p (ρ — плотность жидкости, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении), так что безразмерная функция тока ψ / Q должна зависеть от безразмерных комбинаций перечисленных выше независимых переменных и параметров

$$\psi / Q = F(\varphi, \alpha, \beta f(r), P, R, H) \tag{1.5}$$

$$(P = |Q| / a, \qquad R = |Q| \rho / \mu_0, \qquad H = \beta\mu_0 Q^2 / a\rho c_p J r^2)$$

где P — число Пекле, R — число Рейнольдса, H — параметр, характеризующий диссипативный эффект.

Если инерция и диссипация течения малы ($R \ll 1$, $H \ll 1$),

$$\psi / Q = F(\beta f(r), \varphi, \alpha, P) \tag{1.6}$$

Из (1.6) вытекает, что $\partial F / \partial r \neq 0$ и, следовательно, радиальные направления в диффузоре не являются линиями тока, в то время как при $\mu = \mathrm{const}$ ($\beta = 0$) течение будет всюду радиальным.

Если учитывать диссипацию энергии и считать температуру стенок постоянной, то переменную r будет содержать параметр H, и радиальность течения нарушается. При постоянстве вязких свойств безразмерных критериев, содержащих r в степени, отличной от нуля, построить нельзя. При $\mu = \mathrm{const}$ точное решение уравнения энергии получено в работах [2,3].

Решение уравнений (1.2) будем искать в виде рядов

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varphi) r^{-k}, \qquad T(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\varphi) r^{-k} \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} a_k^{IV} + (2k^2 + 4k + 4) a_k'' + k^2 (k+2)^2 a_k = \\ = F_k(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_k) \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$a\left[b_k'' + \left\{k^2 + kP\left(\frac{\cos 2\varphi - \cos\alpha}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}\right)\right\} b_k\right] = \Psi_k(a_1, \ldots, a_{k-1}, b_0, \ldots, b_{k-1})$$

$$\begin{aligned} F_k(\varphi) = \beta^2 \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} \{ & b'_{k-(m+n)} b_n' (m(m+2) a_m - a_m'') - \\ & -(k-(m+n)) b_{k-(m+n)} [4(m+1) b_n' a_m' + n b_n (m(m+2) a_m - a_m'')]\} + \\ & + \beta \sum_{n=0}^{k} \{(k-n)(2n+3) a_n'' b_{k-n} + 4(k-n)(n+1) b_{k-n}' a_n' + \end{aligned}$$

$$+ (k - n)\, 2n\,(n + 2)(2n + 1)\, b_{k-n} a_n + (2n^2 + 4n + 4)\, b_{k-n}' a_n' -$$
$$- b_{k-n}'' \left[n\,(n + 2)\, a_n - a_n'' \right] + (k - n)(k - n + 1) \times$$
$$\times\, b_{k-n} \left[n\,(n + 2)\, a_n - a_n'' \right] + 2 b_{k-n} a_n''' \}$$

$$\Psi_k(\varphi) = \sum_{n=0}^{k} \{ -n a_n b_{k-n}' + (k - n)\, a_n' b_{k-n} \}$$

причем $m + n \leqslant k$.

При выводе уравнений (1.8) предполагалось, что

$$a_0(\varphi) = -\frac{Q\,(\sin 2\varphi - 2\varphi \cos \alpha)}{2\,(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}, \quad b_0(\varphi) \equiv 0 \tag{1.9}$$

Уравнения (1.9) описывают медленное изотермическое течение вязкой жидкости, являясь нулевым приближением исходной задачи [4].

Условия (1.3), (1.4), с учетом (1.7) примут вид

$$a_k(\pm \alpha/2) = 0, \quad b_k(\pm \alpha/2) = T_k \quad (k = 1, 2, 3 \ldots) \tag{1.10}$$
$$a_k'(\pm \alpha/2) = 0, \quad a_0(\alpha/2) = -Q/2 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

Таким образом, задача сведена к интегрированию неоднородных линейных уравнений, из которых одно с постоянными коэффициентами, а второе — уравнение Матье [5].

Используя метод Лагранжа [6], запишем общее решение системы (1.8) в квадратурах

$$a_k(\varphi) = A_k \sin k\varphi + B_k \sin (k + 2)\,\varphi +$$
$$+ \frac{1}{k} \left(-\cos k\varphi \int_0^{\varphi} V_k \sin k\theta\, d\theta + \sin k\varphi \int_0^{\varphi} V_k \cos k\theta\, d\theta \right)$$

$$b_k(\varphi) = D_k y_{1k}(\varphi) + \frac{1}{c^2} \left(-y_{1k} \int_0^{\varphi} \Psi_k y_{2k}\, d\theta + y_{2k} \int_0^{\varphi} \Psi_k y_{1k}\, d\theta \right) \tag{1.11}$$

Здесь $\sin k\varphi$, $\sin (k+2)\,\varphi$, $\cos k\varphi$, $\cos (k + 2)\,\varphi$ — фундаментальная система решений первого уравнения (1.8) без правой части, $y_{1k}(\varphi)$, $y_{2k}(\varphi)$ — четное и нечетное решения уравнения Матье

$$V_k(\varphi) = \frac{1}{k + 2} \left(-\cos (k + 2)\,\varphi \int_0^{\varphi} F_k \sin (k + 2)\,\theta\, d\theta + \right.$$
$$\left. + \sin (k + 2)\,\varphi \int_0^{\varphi} F_k \cos (k + 2)\,\theta\, d\theta \right)$$

$F_k(\varphi), \Psi_k(\varphi)$ — правые части системы (1.8). A_k, B_k, D_k — постоянные, определяемые из условий (1.10), $c^2 = y_{1k}(0) y_{2k}'(0) - y_{2k}(0)\, y_{1k}'(0)$ — фундаментальное тождество.

Если краевые условия (1.4) представить в виде

$$T\,(r, \pm \alpha / 2) = T_k\, r^{-k} \tag{1.12}$$

где k — достаточно большое число, что соответствует быстрому изменению температуры стенок диффузора, или рассматривать течение жидкости при малых P, то для решения уравнения Матье можно воспользоваться асимптотическими формулами

$$(1.13)\qquad y_{1k}(\varphi)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i I_i(h_k)\cos(m_k^{0,5}-2i)\varphi$$

$$y_{2k}(\varphi)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i I_i(h_k)\sin(m_k^{0.5}-2i)\varphi$$

$$m_k=k^2-\frac{kP\cos\alpha}{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha},\quad q_k=-\frac{kP}{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha},\quad h_k=q_k/2m_k^{0.5}$$

где $I_i(h_k)$ — функции Бесселя.

Критерием применимости формул (1.13) служит величина $m_k\gg q_k$. Соотношение (1.13) целесообразно использовать при вычислении высоких степеней приближения. Из вида краевых условий (1.12) следует, что первым ненулевым приближением для второго уравнения (1.8) будет функция

$$(1.14)\qquad b_k(\varphi)=\frac{T_k}{y_{1k}(\alpha/2)}\,y_{1k}(\varphi)$$

Для отыскания функции $a_k(\varphi)$ необходимо найти интеграл уравнения

$$(1.15)\qquad a_k^{\mathrm{IV}}+(2k^2+4k+4)\,a_k''+k^2(k+2)^2a_k=$$
$$=\beta\,[(2k-k^2)\,a_0''b_k+4\,(k+1)\,a_0'b_k'+b_k''a_0''+2b_k'a_0'']$$

Подставляя (1.14) и (1.9) в правую часть (1.15), получим

$$a_k^{\mathrm{IV}}+(2k^2+4k+4)\,a_k''+k^2(k+2)^2a_k=K\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i I_i(h_k)\times$$
$$\times\,[A_i\sin(m_k^{1/2}-2i+2)\varphi+B_i\sin(m_k^{1/2}-2i-2)\varphi+$$
$$+\,C_i\sin(m_k^{1/2}-2i)\varphi]$$

$$(1.16)\qquad \Big(A_i=1-(m_k^{1/2}-2i-k+1)^2,\quad B_i=1-(m_k^{1/2}-2i+k-1)^2,$$
$$C_i=-4(k+1)\,(m_k^{1/2}-2i)\cos\alpha,\quad K=\frac{\beta T_kQ}{y_{1k}(\alpha/2)(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}\Big)$$

Следует отметить, что $I_i(h_k)$ являются быстроубывающими при $i\to\infty$ и поэтому для конкретных расчетов можно ограничиться небольшим числом членов.

Общее решение уравнения (1.16) вычислим методом неопределенных коэффициентов

$$(1.17)\qquad a_k(\varphi)=A_k\sin k\varphi+B_k\sin(k+2)\varphi+$$
$$+K\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i I_i(h_k)\,[\Delta_i^1\sin(m_k^{1/2}-2i+2)\varphi+$$
$$+\Delta_i^2\sin(m_k^{1/2}-2i-2)\varphi+\Delta_i^3\sin(m_k^{1/2}-2i)\varphi]$$

$$\left(\Delta_i^1=\frac{A_i}{L(m_k^{1/2}-2i+2)},\quad \Delta_i^2=\frac{B_i}{L(m_k^{1/2}-2i-2)},\quad \Delta_i^3=\frac{C_i}{L(m_k^{1/2}-2i)}\right)$$

где $L(p)$ — значение характеристического уравнения (1.16) в точке p

$$A_k = -\begin{vmatrix} \Phi(\alpha/2)\sin k\alpha/2 & \sin(k+2)\alpha/2 \\ \Phi'(\alpha/2)k\cos k\alpha/2 & (k+2)\cos(k+2)\alpha/2 \end{vmatrix} t^{-1}$$

$$B_k = -\begin{vmatrix} \sin k\alpha/2 & \Phi(\alpha/2)\sin(k+2)\alpha/2 \\ k\cos k\alpha/2 & \Phi'(\alpha/2)(k+2)\cos(k+2)\alpha/2 \end{vmatrix} t^{-1}$$

$$t = \sin(k+1)\alpha - (k+1)\sin\alpha$$

$\Phi(\alpha/2)$, $\Phi'(\alpha/2)$ — значения частного решения и его производной на стенке диффузора.

Отметим, что задача может быть решена не для всех значений угла раствора диффузора, а только для значений, определяемых неравенствами $\alpha < 2.545$, $y_{1k}(\alpha/2) \neq 0$.

Обратимся к выяснению структуры течения. Для упрощения выкладок будем считать, что качественную информацию о поведении линии тока даст использование главного члена разложений формул (1.13) по степеням параметра P. Температуру стенок примем равной $T_1 r^{-1}$. Тогда в соотношениях (1.16) необходимо считать

$$k = 1, \quad A_0 = B_0 = 0, \quad C_0 = -8\cos\alpha \tag{1.18}$$

$$I_0(0) = 1, \quad I_i(0) = 0 \quad (i \geqslant 1), \quad K = \beta T_1 Q\left[\cos\frac{\alpha}{2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\right]^{-1}$$

Находим решение уравнения (1.16) с учетом (1.9), (1.10), (1.18)

$$a_1(\varphi) = A_1\sin\varphi + B_1\sin 3\varphi + K\cos\alpha\,(\varphi\cos\varphi)/2 \tag{1.19}$$

где постоянные A_1, B_1 определены из краевых условий (1.10)

$$A_1 = K\operatorname{ctg}\alpha\left[\frac{(\sin\alpha - \alpha)(2\cos\alpha + 1) + 2\alpha\sin^2\alpha}{8(\cos\alpha - 1)}\right]$$

$$B_1 = K\operatorname{ctg}\alpha\left[\frac{\alpha - \sin\alpha}{8(\cos\alpha - 1)}\right] \tag{1.19}$$

Если считать угол раствора диффузора малым, то, разлагая функции (1.9), (1.19) в ряд по степеням α и φ, для функции тока и радиальной компоненты скорости получим

$$\psi(r,\varphi) = -\frac{3}{2}\frac{Q}{\alpha^3}\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\varphi^2\right)\varphi - \frac{1}{r}\frac{\beta T_1 Q}{80\alpha^3}(4\varphi^2 - \alpha^2)^2\varphi \tag{1.20}$$

$$v_r(r,\varphi) = \frac{3Q}{2r\alpha^3}(\alpha^2 - 4\varphi^2) + \frac{1}{r^2}\frac{\beta T_1 Q}{80\alpha^3}(\alpha^4 - 24\alpha^2\varphi^2 + 80\varphi^4)$$

Анализируя распределение радиальной скорости, отметим, что при $T_1 > 0$ (стенки холоднее жидкости) скорость на оси диффузора возрастает, а в окрестности стенок падает по сравнению с изотермическим течением. При $T_1 < 0$ профиль скорости более равномерно распределен по сечению диффузора.

Используя (1.20) и следуя [7], функцию тока представим в виде

$$\psi(r,\varphi) = -\lambda_1(\varphi) - T_1\lambda_2(\varphi)/r \tag{1.21}$$

$$\lambda_1(\varphi) = \frac{3}{2}\frac{Q}{\alpha^3}\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\varphi^2\right)\varphi, \quad \lambda_2(\varphi) = \frac{\beta Q}{80\alpha^3}(4\varphi^2 - \alpha^2)^2\varphi$$

$$\lambda_1(\varphi) \geqslant 0, \quad \lambda_2(\varphi) \geqslant 0 \quad \text{при } 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha/2$$

Рассмотрим случай $T_1 > 0$. Так как исследуется поведение линий тока для достаточно больших r, то для расходящегося течения естественно принять $\psi(r, \varphi) < 0$. Из (1.21) следует:

$$r = -T_1\lambda_2(\varphi) / (\psi(r, \varphi) + \lambda_1(\varphi)) \tag{1.22}$$

Чтобы величина r, определяемая равенством (1.22), была положительная, значение φ должно находиться в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$, где φ_1 удовлетворяет уравнению

$$\psi(r, \varphi_1) + \lambda_1(\varphi_1) = 0 \tag{1.23}$$

Линии тока $\psi = \mathrm{const}$ в этом случае будут располагаться ближе к оси диффузора, обращаясь к ней своей выпуклостью.

Если $T_1 < 0$, то величина φ должна изменяться в интервале $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \leqslant \alpha / 2$ и траектории частиц жидкости при входе в диффузор из бесконечности будут отклоняться к стенкам диффузора, обращаясь к прямой (1.23) своей вогнутостью.

Если считать, что температура стенок диффузора постоянна и различна

$$T(r, +\alpha / 2) = T_0, \quad T(r, -\alpha / 2) = T_1$$

то для определения радиальной скорости получим уравнение

$$z'' - \beta\left(\frac{T_0 - T_1}{\alpha}\right)z' + 4z = \exp\beta\left(\frac{T_0 - T_1}{\alpha}\right)\varphi \tag{1.24}$$

где $z(\varphi) = v_r r$. Общее решение (1.24) имеет вид

$$z(\varphi) = e^{0.5\delta\varphi}(A_1 e^{\omega\varphi} + B_1 e^{-\omega\varphi}) + 0.25 D_1 e^{\delta\varphi} \qquad (\delta = \beta(T_0 - T_1)/\alpha)$$

$\omega = (0{,}25\,\delta^2 - 4)^{1/2}$ — в общем случае комплексная величина.

Постоянные A_1, B_1, C_1 определяются из условий

$$z(\pm\alpha/2) = 0, \qquad \int\limits_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} z(\varphi)\,d\varphi = Q$$

2. Исследуем сходимость процесса последовательных приближений, воспользовавшись методом доказательства, примененным в работе [7].

Оценим по модулю частное решение первого уравнения системы (1.8) и его первые три производные. Из (1.11) имеем

$$f_k(\varphi) = \frac{1}{k}\left(-\cos k\varphi \int\limits_0^\varphi V_k \sin k\theta\,d\theta + \sin k\varphi \int\limits_0^\varphi V_k \cos k\theta\,d\theta\right) \tag{2.1}$$

$$\left(V_k(\varphi) = \frac{1}{k+2}\left(-\cos(k+2)\varphi \int\limits_0^\varphi F_k \sin(k+2)\theta\,d\theta + \sin(k+2)\varphi \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \int\limits_0^\varphi F_k \cos(k+2)\theta\,d\theta\right)\right)$$

Введем обозначения

$$\max|V_k| \leqslant M_k, \qquad \max|V_k'| \leqslant N_k, \qquad \max|F_k| \leqslant R_k \tag{2.2}$$

Существование чисел M_k, N_k, R_k следует из того, что рассматриваются функции, непрерывные на замкнутом интервале. Используя соотношение (2.2) и вычисляя определенные интегралы, придем к оценкам

(2.3) $$|f_k| \leqslant M_k |1 - \cos k\varphi| / k^2, \quad |f_k''| \leqslant M_k |\cos k\varphi|$$
$$|f_k'| \leqslant M_k |\sin k\varphi| / k, \quad |f_k'''| \leqslant M_k k |\sin k\varphi| k + N_k$$

Аналогично будем иметь

(2.4) $$|V_k| \leqslant R_k |1 - \cos(k+2)\varphi| / (k+2)^2, \; |V_k'| \leqslant R_k |\sin(k+2)\varphi| / (k+2)$$

Очевидно, в качестве M_k и N_k можно взять выражения

(2.5) $$M_k = 2R_k / (k+2)^2, \quad N_k = R_k / (k+2)$$

Таким образом, с учетом (2.5) получаем окончательные неравенства для частного решения и его первых трех производных

(2.6) $$\begin{aligned} &|f_k| \leqslant 2R_k |1 - \cos k\varphi| / k^2 (k+2)^2 \\ &|f_k'| \leqslant 2R_k |\sin k\varphi| / k (k+2)^2 \\ &|f_k''| \leqslant 2R_k |\cos k\varphi| / (k+2)^2 \\ &|f_k'''| \leqslant R_k [2k |\sin k\varphi| / (k+2)^2 + 1 / (k+2)] \end{aligned}$$

Обратимся к оценке полного решения и его производных. Учитывая условия (1.10), получим выражение для k-приближения функции тока

(2.7) $$a_k(\varphi) = f_k(\varphi) + f_k(\alpha/2)\chi_{1k}(\alpha, \varphi) + f_k'(\alpha/2)\chi_{2k}(\alpha, \varphi)$$
$$\chi_{1k} = \begin{vmatrix} \sin k\varphi & \sin(k+2)\varphi \\ k\cos(k\alpha/2) & (k+2)\cos[(k+2)\alpha/2] \end{vmatrix} t^{-1}$$
$$\chi_{2k} = \begin{vmatrix} \sin(k+2)\varphi & \sin k\varphi \\ \sin[(k+2)\alpha/2] & \sin(k\alpha/2) \end{vmatrix} t^{-1}$$

Введем функцию

(2.8) $$|\varphi_k| = 2|1 - \cos k\varphi| + 2|1 - \cos(k\alpha/2)| \times \chi_{1k}(\alpha, \varphi) + 2k|\sin(k\alpha/2)| \chi_{2k}(\alpha, \varphi)$$

С помощью (2.8) получаем неравенства для оценки полного решения и его первых трех производных

(2.9) $$|a_k| \leqslant R_k |\varphi_k| / k^2 (k+2)^2, \quad |a_k''| \leqslant R_k |\varphi_k''| / k^2 (k+2)^2$$
$$|a_k'| \leqslant R_k |\varphi_k'| / k^2 (k+2)^2, \quad |a_k'''| \leqslant R_k [|\varphi_k'''| / k^2 + k + 2] / (k+2)^2$$

Используя (2.9), получим

(2.10) $$\begin{aligned} &k(k+2)|a_k| \leqslant R_k |\varphi_k| / k(k+2) \\ &4(k+1)|a_k'| \leqslant 4(k+1) R_k |\varphi_k'| / k^2 (k+2)^2 \\ &(2k+3)|a_k''| \leqslant (2k+3) R_k |\varphi_k''| / k^2 (k+2)^2 \\ &2k(k+2)(2k+1)|a_k| \leqslant 2(2k+1) R_k |\varphi_k| / k(k+2) \\ &(2k^2 + 4k + 4) / |a_k'| \leqslant (2k^2 + 4k + 4) R_k |\varphi_k'| / k^2 (k+1)^2 \end{aligned}$$

Множители при R_k в правых частях неравенства (2.9), (2.10) являются ограниченными функциями для $k = 1, 2, 3, \ldots$ Обозначая через h максимальное число, ограничивающее эти функции, будем иметь

$$|a_k'| \leqslant U_k, \quad |a_k''| \leqslant U_k, \quad |a_k'| \leqslant U_k \quad |a_k'''| \leqslant U_k, \; U_k = hR_k \tag{2.11}$$

Левые части неравенств (2.10) будут также меньше введенного числа U_k.

Перейдем к оценке решения второго уравнения системы (1.8). На основании краевых условий (1.10) имеем

$$b_k(\varphi) = \frac{T_k - f_{1k}(\alpha/2)}{y_{1k}(\alpha/2)} y_{1k}(\varphi) + f_{1k}(\varphi) \tag{2.12}$$

$$\left(f_{1k}(\varphi) = \frac{1}{c^2}\left(-y_{1k}\int_0^\varphi \Psi_k y_{2k} d\theta + y_{2k}\int_0^\varphi \Psi_k y_{1k} d\theta\right)\right)$$

Применяя асимптотические выражения (1.13), нетрудно установить, что c^2 и k — однопорядковые величины при $k \to \infty$. Далее пусть

$$\max |\Psi_k(\varphi)| \leqslant H_k$$

Тогда

$$|f_{1k}| \leqslant \frac{H_k}{ac^2}\left| - y_{1k}\int_0^\varphi y_{2k} d\theta + y_{2k}\int_0^\varphi y_{2k} d\theta\right|$$

$$|f_{2k}'| \leqslant \frac{H_k}{ac^2}\left| - y_{1k}'\int_0^\varphi y_{2k} d\theta + y_{2k}'\int_0^\varphi y_{1k} d\theta\right| \tag{2.13}$$

$$|f_{1k}''| \leqslant \frac{H_k}{ac^2}\left| - y_{1k}''\int_0^\varphi y_{2k} d\theta + y_{2k}''\int_0^\varphi y_{1k} d\theta + c^2\right|$$

Учитывая неравенства (2.13), получим следующие оценки для полного решения второго уравнения системы (1.8):

$$|b_k| \leqslant |T_k|\,|g_{1k}(\varphi)| + \frac{H_k}{ac^2}\left(|g_{1k}(\varphi)|\left|g_{2k}\frac{\alpha}{2}\right| + |g_{2k}(\varphi)|\right)$$

$$|b_k'| \leqslant |T_k|\,|g_{1k}'(\varphi)| + \frac{H_k}{ac^2}\left(|g_{1k}'(\varphi)|\left|g_{2k}\frac{\alpha}{2}\right| + |g_{2k}'(\varphi)|\right) \tag{2.14}$$

$$|b_k''| \leqslant |T_k|\,|g_{1k}''(\varphi)| + \frac{H_k}{ac^2}\left(|g_{1k}''(\varphi)|\left|g_{2k}\frac{\alpha}{2}\right| + |g_{2k}''(\varphi)|\right)$$

$$\left(g_{1k} = \frac{y_{1k}(\varphi)}{y_{1k}(\alpha/2)}, \quad g_{2k}(\varphi) = -y_{1k}\int_0^\varphi y_{2k} d\theta + y_{2k}\int_0^\varphi y_{1k} d\theta\right)$$

Согласно неравенствам (2.14) будем иметь

$$k(k+1)\,|b_k(\varphi)| \leqslant k(k+1)\,|T_k|\,|g_{1k}(\varphi)| + \frac{k(k+1)H_k}{ac^2} \times$$
$$\times (|g_{1k}|\,|g_{2k}(\alpha/2)| + |g_{2k}'|)$$

Множители при $|T_k|$ в неравенствах (2.14) являются ограниченными функциями, так как k принимает конечное число значений. Ограниченными являются также множители при H_k для всех значений k, поэтому, обозначая через d число, превышающее максимумы упомянутых функций, придем к неравенствам

$$k(k+1)\,|b_k| \leqslant (|T_k| + H_k / a)\,d = \theta_k \tag{2.15}$$

$$|b_k'| \leqslant \theta_k, \qquad |b_k''| \leqslant \theta_k$$

Образуем следующие ряды:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k s^k, \quad \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k s^k \quad (s = 1/r) \tag{2.16}$$

Если в окрестности нулевой точки эти ряды будут сходиться, то ряды (1.7) будут сходиться равномерно в силу неравенств (2.11) и (2.15). Для общих членов рядов (2.16) имеет место равенство

$$U_k = 5\beta^2 h \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} U_m \theta_{k-(m+n)} \theta_m + 9\beta h \sum_{n=0}^{k} U_n \theta_{k-n}$$

$$\theta_k = \frac{2d}{a} \sum_{n=1}^{k} U_n \theta_{k-n} + d\,|T_k| \tag{2.17}$$

Формулы (2.17) легко получить, оценивая по модулю функции F_k, Ψ_k, определяя тем самым числа R_k, H_k и учитывая при этом неравенства (2.11) и (2.15).

Заменяя общий член рядов (2.16) равенствами (2.17), получим соотношения

$$U = U_0 + 5\,\beta^2 h\, U\,\theta^2 + 9\,\beta h\, U\,\theta, \quad \theta = 2da^{-1}(U - U_0)\,\theta + dT(s)$$

Здесь $T(s)$ — рациональная функция s в силу условия (1.4).

Обозначая через $W = U\theta$ произведение рядов (2.16) и выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\frac{20\beta^2 hm^2}{a^2} W^3 + \left[\frac{20\beta^2 hm^2}{a} T(s) + \frac{18\beta hm}{a}\right] W^2 + (5\beta^2 hm^2 T^2(s) +$$

$$+ 9\beta hmT(s) + \frac{2mU_0}{a} - 1\Big) W + mU_0 T(s) = 0 \quad (m = da(a + 2dU_0)^{-1}) \tag{2.18}$$

Из уравнения (2.18) следует, что функция $W(s)$ алгебраическая, и поэтому в окрестности $s = 0$ имеет ненулевой радиус сходимости. Радиус сходимости будет определяться расстоянием до ближайшей особой точки функции $W(s)$. Из сходимости функции $W(s)$ вытекает сходимость рядов (2.16).

В заключение автор благодарит Л. А. Галина и Н. Н. Гвоздкова за помощь в работе.

Поступила 17 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
2. *Тирский Г. А.* Об одном точном решении уравнения энергии в частном случае движения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
3. *Millsaps K., Pohlhausen K.* Thermal distributions in Jeffery—Hamel flows between nonparallel plane walls. J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, No. 3.
4. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
5. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971.
7. *Слезкин Н. А.* Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами. Матем. сб., 1935, т. 42, № 1.