УДК 539.3

ЗАДАЧА ЛАМЕ ДЛЯ СЛАБОАНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ УПРУГИХ СВОЙСТВ

В. Д. Соловей

Институт машиноведения УрО РАН, 620219 Екатеринбург
E-mail: SoloveiVD@yandex.ru

Решена задача Ламе для тела, обладающего кубической симметрией упругих свойств, определен параметр упругой анизотропии. В случае плоской деформации с точностью до членов первого порядка по малому параметру анизотропии найдены напряжения в кольце. Рассчитаны напряжения в кольце из KCl, находящемся под действием внутреннего давления.

Ключевые слова: слабоанизотропное тело, кубическая симметрия упругих свойств, задача Ламе.

Фиктивное упругое изотропное тело. Параметр упругой анизотропии. Тензор модулей упругости c_{ijkl} $(i,j,k,l = x,y,z)$ для тела с кубической симметрией упругих свойств имеет три независимые компоненты [1]: c_{1111}, c_{1122} и c_{1212}. При матричном описании упругих свойств три независимых элемента матрицы c_{11}, c_{12}, c_{44} определяются соотношениями

$$c_{11} = c_{1111}, \qquad c_{12} = c_{1122}, \qquad c_{44} = c_{1212}. \tag{1}$$

В главных осях анизотропии x, y, z уравнения состояния для рассматриваемого тела в случае его плоской деформации в плоскости (x,y) имеют вид

$$\sigma_{xx} = c_{11}e_{xx} + c_{12}e_{yy}, \quad \sigma_{yy} = c_{12}e_{xx} + c_{11}e_{yy}, \quad \sigma_{xy} = 2c_{44}e_{xy}, \tag{2}$$

при этом

$$\sigma_{zz} = c_{12}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/(c_{11} + c_{12})$$

(σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy} и e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} — компоненты тензоров напряжения и деформации соответственно).

Рассмотрим фиктивное изотропное упругое тело, тензор модулей упругости которого

$$c^0_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

в наименьшей степени отличается от заданного тензора c_{ijkl}. Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе; δ_{ij} — символ Кронекера.

Элементы матрицы модулей упругости фиктивного изотропного тела выражаются через коэффициенты Ламе следующим образом:

$$c^0_{11} = \lambda + 2\mu, \qquad c^0_{12} = \lambda, \qquad c^0_{44} = \mu. \tag{3}$$

Коэффициенты Ламе для фиктивного изотропного тела найдем из условия минимума функции F по λ и μ:

$$F = (c_{ijkl} - c^0_{ijkl})(c_{ijkl} - c^0_{ijkl}) = \min. \tag{4}$$

В выражении (4) по повторяющимся индексам проводится суммирование. Учитывая свойства симметрии тензоров c_{ijkl} и c^0_{ijkl}, а также (1), находим

$$F = 3c_{11}^2 + 6c_{12}^2 + 12c_{44}^2 - 6(\lambda + 2\mu)c_{11} - 12\lambda c_{12} - 24\mu c_{44} + 3(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 8\mu^2).$$

Условие минимума F по λ и μ дает искомые соотношения

$$\lambda = (c_{11} + 4c_{12} - 2c_{44})/5, \qquad \mu = (c_{11} - c_{12} + 3c_{44})/5, \tag{5}$$

при этом функция F в точке минимума равна

$$F_{\min} = 6(c_{11} - c_{12} - 2c_{44})^2/5.$$

Пусть в 81-мерном пространстве компонент тензоров четвертого ранга тензору c_{ijkl} соответствует вектор анизотропного упругого состояния, а тензору c^0_{ijkl} — вектор изотропного упругого состояния. Тогда длина вектора, являющегося разностью этих двух векторов, равна

$$\rho = \sqrt{6}\,|c_{11} - c_{12} - 2c_{44}|\,/\sqrt{5}\,, \tag{6}$$

а длина вектора анизотропного упругого состояния равна

$$R \equiv \sqrt{c_{ijkl}c_{ijkl}} = \sqrt{3(c_{11}^2 + 2c_{12}^2 + 4c_{44}^2)}\,.$$

Параметр упругой анизотропии ε определяется по формуле

$$\varepsilon = \rho/R = \sqrt{2}\,|c_{11} - c_{12} - 2c_{44}|\,/\sqrt{5(c_{11}^2 + 2c_{12}^2 + 4c_{44}^2)}\,. \tag{7}$$

Для упругого изотропного тела $\rho = 0$, поэтому из (6), (7) следует, что $\varepsilon = 0$.

С учетом (3) выражения для модулей упругости рассматриваемого упругого анизотропного тела можно представить в виде

$$c_{11} = \lambda + 2\mu + 2\beta\varepsilon, \qquad c_{12} = \lambda - \beta\varepsilon, \qquad c_{44} = \mu - \beta\varepsilon, \tag{8}$$

где $\beta = \sqrt{c_{11}^2 + 2c_{12}^2 + 4c_{44}^2}\,/\sqrt{10}$.

Постановка граничной задачи. Рассматривается упругое анизотропное кольцо, ограниченное концентрическими окружностями с радиусами $r = a$, $r = b$ и деформируемое под действием внутреннего p_a и внешнего p_b давлений (рис. 1).

В цилиндрических координатах r, φ, z уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{rr,r} + \sigma_{r\varphi,\varphi}/r + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/r = 0, \qquad \sigma_{\varphi\varphi,\varphi}/r + \sigma_{r\varphi,r} + 2\sigma_{r\varphi}/r = 0, \tag{9}$$

геометрические соотношения записываются следующим образом:

$$e_{rr} = u_{r,r}, \qquad e_{\varphi\varphi} = u_{\varphi,\varphi}/r + u_r/r, \qquad e_{r\varphi} = (u_{r,\varphi}/r + u_{\varphi,r} - u_\varphi/r)/2. \tag{10}$$

Здесь u_r, u_φ — компоненты вектора перемещения; запятая перед индексом обозначает дифференцирование по соответствующей этому индексу координате.

С учетом (8) уравнения состояния (2) принимают вид

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = h_1 e_{rr} + h_2 e_{\varphi\varphi} - 2h_4 e_{r\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = h_2 e_{rr} + h_1 e_{\varphi\varphi} + 2h_4 e_{r\varphi}, \\ \sigma_{r\varphi} = -h_4 e_{rr} + h_4 e_{\varphi\varphi} + h_3 e_{r\varphi}; \end{gathered} \tag{11}$$

$$\sigma_{zz} = h_5(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})/h_6, \tag{12}$$

где

$$h_1 = \lambda + 2\mu + (3 + 5\cos 4\varphi)\beta\varepsilon/4, \qquad h_2 = \lambda + (1 - 5\cos 4\varphi)\beta\varepsilon/4,$$

$$h_3 = 2\mu + (1 - 5\cos 4\varphi)\beta\varepsilon/2, \quad h_4 = 5\sin 4\varphi\beta\varepsilon/4, \quad h_5 = \lambda - \beta\varepsilon, \quad h_6 = 2(\lambda + \mu) + \beta\varepsilon.$$

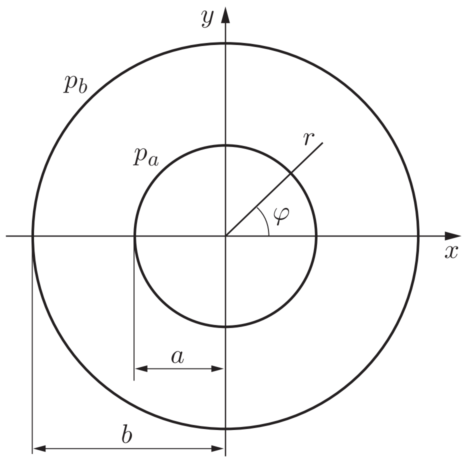

Рис. 1. Упругое анизотропное кольцо под действием внутреннего p_a и внешнего p_b давлений

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_{rr}\big|_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_{rr}\big|_{r=b} = -p_b, \quad \sigma_{r\varphi}\big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}\big|_{r=b} = 0.$$

Рассматривается упругое слабоанизотропное тело, для которого $|\varepsilon| < 1$ (этому условию удовлетворяет ряд кристаллов с кубической структурой). Перемещения и напряжения разлагаются в ряды по малому параметру анизотропии ε, при этом учитываются только члены нулевого и первого порядков по этому малому параметру:

$$u_\alpha = u^0_\alpha + \varepsilon u^1_\alpha; \tag{13}$$

$$e_{\alpha\gamma} = e^0_{\alpha\gamma} + \varepsilon e^1_{\alpha\gamma}; \tag{14}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma^0_{\alpha\gamma} + \varepsilon\sigma^1_{\alpha\gamma}. \tag{15}$$

Здесь $\alpha, \gamma = r, \varphi, z$; верхние индексы 0 и 1 у переменных соответствуют нулевому (изотропному) и первому приближениям по малому параметру ε.

Из решения граничных задач нулевого (изотропного) и первого приближений по малому параметру анизотропии ε определяются напряжения $\sigma^0_{\alpha\gamma}$ и $\sigma^1_{\alpha\gamma}$ соответственно.

Граничная задача в изотропном приближении по малому параметру анизотропии. С учетом (13)–(15) в изотропном приближении уравнения равновесия и геометрические соотношения имеют вид (9), (10). С учетом (14), (15) уравнения состояния (11) в изотропном приближении записываются в виде

$$\sigma^0_{rr} = (\lambda + 2\mu)e^0_{rr} + \lambda e^0_{\varphi\varphi}, \quad \sigma^0_{\varphi\varphi} = \lambda e^0_{rr} + (\lambda + 2\mu)\, e^0_{\varphi\varphi}, \quad \sigma^0_{r\varphi} = 2\mu e^0_{r\varphi}. \tag{16}$$

При этом

$$\sigma^0_{zz} = \lambda(\sigma^0_{rr} + \sigma^0_{\varphi\varphi})/[2(\lambda + \mu)].$$

Граничные условия задачи в изотропном приближении принимаем в виде

$$\sigma^0_{rr}\big|_{r=a} = -p_a, \qquad \sigma^0_{rr}\big|_{r=b} = -p_b, \qquad \sigma^0_{r\varphi}\big|_{r=a} = \sigma^0_{r\varphi}\big|_{r=b} = 0. \tag{17}$$

В силу симметрии граничной задачи в изотропном приближении имеют место соотношения

$$u^0_\varphi = 0, \quad u^0_{\alpha,\varphi} = 0, \quad e^0_{\alpha\gamma,\varphi} = 0, \quad \sigma^0_{\alpha\gamma,\varphi} = 0. \tag{18}$$

С использованием (16), геометрических соотношений (10) в изотропном приближении и с учетом соотношений (18) уравнения равновесия в изотропном приближении запишем в перемещениях u_α^0. В результате получаем уравнение для u_r^0

$$u^0_{r,rr} + u^0_{r,r}/r - u^0_r/r^2 = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u^0_r = a_1/r + a_2 r. \tag{19}$$

Константы интегрирования a_1, a_2 находим из граничных условий (17), используя (19), (10) для случая изотропного приближения и (16). В результате получаем

$$u^0_r = \frac{p_1}{2\mu}\,\frac{1}{r} + \frac{p_2}{2(\lambda+\mu)}\,r, \tag{20}$$

где $p_1 = a^2b^2(p_a - p_b)/(b^2 - a^2)$; $p_2 = (a^2p_a - b^2p_b)/(b^2 - a^2)$.

Из (20), (10) для случая изотропного приближения и (16) находим напряжения в изотропном приближении:

$$\sigma^0_{rr} = -p_1/r^2 + p_2, \quad \sigma^0_{\varphi\varphi} = p_1/r^2 + p_2, \quad \sigma^0_{r\varphi} = 0, \quad \sigma^0_{zz} = \lambda p_2/(\lambda+\mu). \tag{21}$$

Граничная задача в первом приближении по малому параметру анизотропии. Уравнения равновесия и геометрические соотношения в первом приближении по малому параметру анизотропии ε имеют тот же вид, что и уравнения (9) и (10) соответственно. С учетом (14), (15) и (20), (10), (21) в первом приближении по малому параметру ε уравнения состояния (11) записываются в виде

$$\begin{gathered}
\sigma^1_{rr} = (\lambda+2\mu)e^1_{rr} + \lambda e^1_{\varphi\varphi} + \omega_1 - \omega_2(1 + 5\cos 4\varphi)/r^2,\\
\sigma^1_{\varphi\varphi} = \lambda e^1_{rr} + (\lambda+2\mu)e^1_{\varphi\varphi} + \omega_1 + \omega_2(1 + 5\cos 4\varphi)/r^2,\\
\sigma^1_{r\varphi} = 2\mu e^1_{r\varphi} + 5\omega_2 \sin 4\varphi/r^2,
\end{gathered} \tag{22}$$

а выражение (12) с учетом (15), (21) преобразуется к виду

$$\sigma^1_{zz} = \lambda(\sigma^1_{rr} + \sigma^1_{\varphi\varphi})/[2(\lambda+\mu)] - \omega_3. \tag{23}$$

Здесь $\omega_1 = \beta p_2/[2(\lambda+\mu)]$; $\omega_2 = \beta p_1/(4\mu)$; $\omega_3 = \beta(3\lambda+2\mu)p_2/[2(\lambda+\mu)^2]$.

Для задачи в первом по ε приближении граничные условия являются однородными:

$$\sigma^1_{rr}\big|_{r=a} = \sigma^1_{rr}\big|_{r=b} = 0, \qquad \sigma^1_{r\varphi}\big|_{r=a} = \sigma^1_{r\varphi}\big|_{r=b} = 0. \tag{24}$$

С использованием соотношений (22) и геометрических соотношений в первом по ε приближении уравнения равновесия в первом по малому параметру анизотропии ε приближении запишем в перемещениях u^1_α. В результате получаем

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)r^3u^1_{r,rr} + \mu r u^1_{r,\varphi\varphi} + (\lambda+\mu)r^2u^1_{\varphi,r\varphi} + (\lambda+2\mu)r^2u^1_{r,r} -\\
&\qquad - (\lambda+3\mu)ru^1_{\varphi,\varphi} - (\lambda+2\mu)ru^1_r = -5\beta p_1\cos 4\varphi/\mu,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$(\lambda+\mu)r^2u^1_{r,r\varphi} + \mu r^3u^1_{\varphi,rr} + (\lambda+2\mu)ru^1_{\varphi,\varphi\varphi} + (\lambda+3\mu)ru^1_{r,\varphi} + \mu r^2u^1_{\varphi,r} - \mu r u^1_\varphi = 5\beta p_1\sin 4\varphi/\mu.$$

Напряжения $\sigma^1_{\alpha\gamma}$, определенные по решению системы неоднородных уравнений (25) с помощью геометрических соотношений (10) и уравнений состояния (22) для случая первого приближения по малому параметру ε, должны удовлетворять однородным граничным условиям (24). Эти напряжения удобно искать в следующем виде:

$$\sigma^1_{\alpha\gamma} = \sigma^{(1)}_{\alpha\gamma} + \sigma^{[1]}_{\alpha\gamma}. \tag{26}$$

Здесь напряжения $\sigma^{(1)}_{\alpha\gamma}$ создаются каким-либо частным решением системы неоднородных уравнений (25); напряжения $\sigma^{[1]}_{\alpha\gamma}$ создаются решением системы однородных уравнений, соответствующей системе неоднородных уравнений (25), и удовлетворяют граничным условиям, отличающимся от граничных условий для напряжений $\sigma^{(1)}_{\alpha\beta}$ только знаком:

$$\begin{gathered} \sigma^{[1]}_{rr}\big|_{r=a} = -\sigma^{(1)}_{rr}\big|_{r=a}, \qquad \sigma^{[1]}_{rr}\big|_{r=b} = -\sigma^{(1)}_{rr}\big|_{r=b}, \\ \sigma^{[1]}_{r\varphi}\big|_{r=a} = -\sigma^{(1)}_{r\varphi}\big|_{r=a}, \qquad \sigma^{[1]}_{r\varphi}\big|_{r=b} = -\sigma^{(1)}_{r\varphi}\big|_{r=b}. \end{gathered} \tag{27}$$

Частное решение системы неоднородных уравнений (25) имеет вид

$$u^{(1)}_r = \frac{5\beta p_1}{8\mu^2}\,\frac{\cos 4\varphi}{r}, \qquad u^{(1)}_\varphi = -\frac{5\beta p_1}{8\mu(\lambda+2\mu)}\,\frac{\sin 4\varphi}{r}. \tag{28}$$

Напряжения $\sigma^{(1)}_{\alpha\beta}$ определяются по перемещениям $u^{(1)}_r$, $u^{(1)}_\varphi$.

Используя (28) и геометрические соотношения для случая первого по ε приближения, из (22) получаем

$$\begin{gathered} \sigma^{(1)}_{rr} = -c_1\cos 4\varphi/r^2 - c_2/r^2 + c_3, \qquad \sigma^{(1)}_{\varphi\varphi} = c_2/r^2 + c_3, \\ \sigma^{(1)}_{r\varphi} = -c_1 \sin 4\varphi/(4r^2), \end{gathered} \tag{29}$$

где $c_1 = 5\beta(\lambda+\mu)p_1/[\mu(\lambda+2\mu)]$; $c_2 = \beta p_1/(4\mu)$; $c_3 = \beta p_2/[2(\lambda+\mu)]$.

Согласно сказанному выше напряжения $\sigma^{[1]}_{\alpha\gamma}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия (9), поэтому их можно выразить через функцию напряжений Эри

$$\Psi = \gamma_1 \ln r + \gamma_2 r^2 + (\delta_1 r^{-4} + \delta_2 r^{-2} + \delta_3 r^4 + \delta_4 r^6)\cos 4\varphi, \tag{30}$$

которая является решением бигармонического уравнения [2].

Компоненты тензора напряжений $\sigma^{[1]}_{\alpha\gamma}$ определяются по формулам

$$\sigma^{[1]}_{rr} = \Psi_{,\varphi\varphi}/r^2 + \Psi_{,r}/r, \quad \sigma^{[1]}_{\varphi\varphi} = \Psi_{,rr}, \quad \sigma^{[1]}_{r\varphi} = -\Psi_{,r\varphi}/r + \Psi_{,\varphi}/r^2. \tag{31}$$

Используя (29)–(31), из граничных условий (27) находим значения констант γ_1, γ_2, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4. Подставляя найденные константы в (30), с помощью (31) после ряда преобразований получаем

$$\begin{gathered} \sigma^{[1]}_{rr} = -c_1(20k_1r^{-6} + 18k_2r^{-4} + 12k_3r^2 + 10k_4r^4)\cos 4\varphi + c_2/r^2 - c_3, \\ \sigma^{[1]}_{\varphi\varphi} = c_1(20k_1r^{-6} + 6k_2r^{-4} + 12k_3r^2 + 30k_4r^4)\cos 4\varphi - c_2/r^2 - c_3, \\ \sigma^{[1]}_{r\varphi} = c_1(-20k_1r^{-6} - 12k_2r^{-4} + 12k_3r^2 + 20k_4r^4)\sin 4\varphi, \end{gathered} \tag{32}$$

где

$$k_1 = a^4b^4(a^4 + 4a^2b^2 + b^4)/(2k), \quad k_2 = -a^2b^2(a^6 + 4a^4b^2 + 4a^2b^4 + b^6)/k,$$

$$k_3 = -(3a^4 + 4a^2b^2 + 3b^4)/(2k), \quad k_4 = (a^2+b^2)/k, \quad k = 8(a^8 + 4a^6b^2 + 10a^4b^4 + 4a^2b^6 + b^8).$$

Окончательно из (26), (29), (32) находим напряжения в первом приближении по малому параметру анизотропии ε:

$$\begin{gathered} \sigma^1_{rr} = -c_1(20k_1r^{-6} + 18k_2r^{-4} + r^{-2} + 12k_3r^2 + 10k_4r^4)\cos 4\varphi, \\ \sigma^1_{\varphi\varphi} = c_1(20k_1r^{-6} + 6k_2r^{-4} + 12k_3r^2 + 30k_4r^4)\cos 4\varphi, \\ \sigma^1_{r\varphi} = c_1(-80k_1r^{-6} - 48k_2r^{-4} - r^{-2} + 48k_3r^2 + 80k_4r^4)\sin 4\varphi. \end{gathered} \tag{33}$$

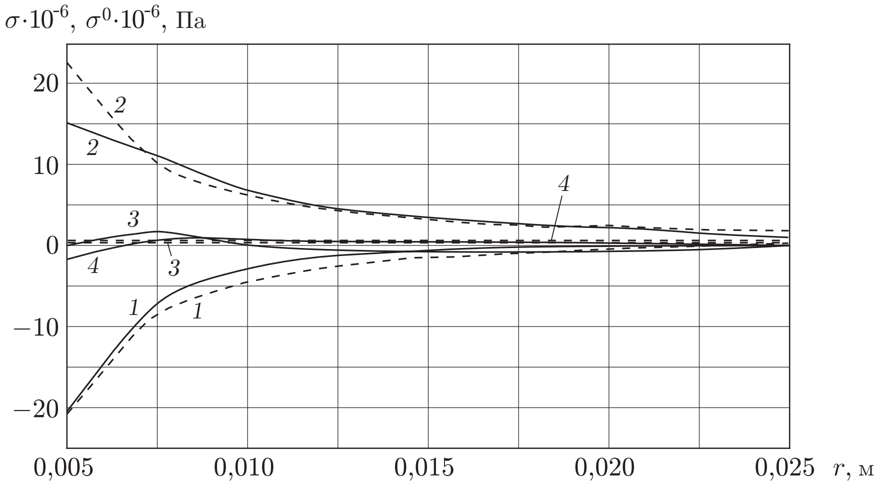

Рис. 2. Зависимости компонент тензора напряжений от радиуса в кольце из KCl, находящемся под действием внутреннего давления ($\varphi = 30°$):
1 — σ_{rr}, σ^0_{rr}; *2* — $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma^0_{\varphi\varphi}$; *3* — $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma^0_{r\varphi}$; *4* — σ_{zz}, σ^0_{zz}; сплошные линии — компоненты тензора напряжений, рассчитанные с точностью до членов первого порядка по малому параметру упругой анизотропии; штриховые — компоненты тензора напряжений, рассчитанные в изотропном приближении

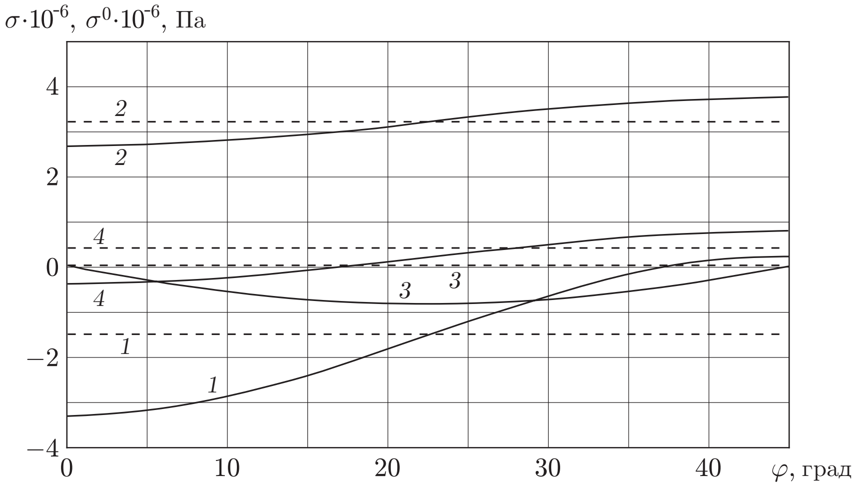

Рис. 3. Зависимости компонент тензора напряжений от угловой координаты в кольце из KCl, находящемся под действием внутреннего давления ($r = 0{,}015$ м) (обозначения те же, что на рис. 2)

Из (23) и (33) также следует

$$\sigma_{zz}^1 = \frac{c_1\lambda}{2(\lambda+\mu)}\,(-12k_2r^{-4} - r^{-2} + 20k_4r^4)\cos 4\varphi - \omega_3. \qquad (34)$$

Выражения (15), (7), (21), (33), (34) определяют напряжения в анизотропном кольце с точностью до членов первого порядка по малому параметру анизотропии ε. Коэффициенты Ламе в этих выражениях определяются соотношениями (5).

Напряженное состояние в кольце из KCl, находящемся под действием внутреннего давления. С помощью полученного решения найдены напряжения в кольце из KCl, находящемся под действием внутреннего давления. Внутренний и внешний радиусы кольца принимались равными $a = 0{,}005$ м, $b = 0{,}025$ м. Для KCl значения анизотропных модулей упругости взяты из работы [3]: $c_{11} = 3{,}980 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{12} = 0{,}620 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{44} = 0{,}625 \cdot 10^{10}$ Па. Согласно (5) коэффициенты Ламе для фиктивного изотропного тела равны $\lambda = 1{,}042 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 1{,}047 \cdot 10^{10}$ Па. Параметр упругой анизотропии имеет значение $\varepsilon = 0{,}313$. Внутреннее давление принято равным $p_a = 2{,}051 \cdot 10^7$ Па исходя из условия $e_{rr}^0\big|_{r=a} = -0{,}001$.

На рис. 2, 3 приведены зависимости компонент тензора напряжений в кольце от радиуса (при $\varphi = 30^\circ$) и угловой координаты (при $r = 0{,}015$ м) соответственно. Видно, что напряжения, рассчитанные с точностью до членов первого порядка по малому параметру упругой анизотропии, значительно отличаются от напряжений, рассчитанных в изотропном приближении. Наиболее существенные различия имеют место при малых значениях r. Для анизотропных материалов с параметром анизотропии $\varepsilon > 0{,}313$ рассматриваемые различия еще более значительны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
2. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
3. **Хантингтон Г.** Упругие постоянные кристаллов // Успехи физ. наук. 1961. Т. 74, вып. 3. С. 461–514.

Поступила в редакцию 11/VI 2008 г.,
в окончательном варианте — 5/X 2009 г.