

ЛИТЕРАТУРА

1. *Howard G. C., Fast C. R.* Hydraulic fracturing. N. Y. — Dallas, AIME, 1970, p. 240.
2. *Губанов Б. Ф., Желтов Ю. П., Шовкринский Г. Ю.* Физические основы интенсификации разработки нефтяных месторождений и увеличения их нефтеотдачи при повышенных давлениях нагнетания. Ежегодник ВНИИ. М. «Недра», 1971, с. 236—245.
3. *Христианович С. А., Желтов Ю. П.* Образование вертикальных трещин при помощи очень вязкой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1955, с. 33.
4. *Желтов Ю. В., Желтов Ю. П.* О распространении горизонтальной трещины в горной породе под воздействием нефилтующей жидкости в случае постоянного горного давления. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение», 1959, № 5, с. 166—169.
5. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966, с. 707.
6. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
7. *Баренблатт Г. И.* О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. — ПММ, 1956, т. 20, № 4, с. 475—486.

УДК 532.5:532.135

**КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН ПРИ СТРУКТУРНОМ ТЕЧЕНИИ
В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ,
РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОТОРОЙ
ЗАВИСЯТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

В. Е. Первушин

(Москва)

Исследуется теплообмен в вязкопластичной жидкости, движущейся в круглой трубе, с учетом зависимости пластичной вязкости и предельного напряжения сдвига от температуры. Система уравнений движения, энергии и неразрывности, преобразованная в предположении, что числа Re , $Pr \gg 1$, решается на ЭЦВМ методом конечных разностей с использованием итераций. Подробно анализируются результаты численных решений для экспоненциального вида зависимостей реологических характеристик от температуры. Сопоставление численных решений с известными теоретическими решениями в частных случаях, а также с экспериментальными данными свидетельствует об их высокой точности.

Известны многочисленные теоретические решения задачи о конвективном теплопереносе в ньютоновских и неньютоновских жидкостях, выполненные в предположении постоянства свойств жидкости [1-7].

В последнее время все большее внимание привлекает вопрос об учете влияния на течение и теплоотдачу температурной зависимости реологических характеристик жидкости. Этот вопрос исследован на примере ньютоновской [2,8] и неньютоновской жидкостей со степенным реологическим уравнением [9-11]. В недавно опубликованных работах [12,13] рассмотрена задача о конвективном теплообмене в жидкости, подчиняющейся реологическому уравнению Бакли — Гершеля. В [12] предполагается, что предельное напряжение сдвига постоянно, а консистенция зависит от температуры по гиперболическому закону, радиальный конвективный теплоперенос пренебрежимо мал. Работа [13] свободна

от ограничительных предположений, сделанных в [12]. Однако автор игнорирует специфическую особенность задачи, заключающуюся в наличии ядра течения, откуда, в частности, следует, что найденное таким путем решение не будет согласовываться с известными решениями задачи в частных случаях [3-7]. Конкретных результатов решения поставленной задачи [13] не содержит.

В данной работе вопрос о влиянии на течение и теплоотдачу температурной зависимости реологических характеристик исследуется на примере конвективного теплообмена в вязкопластичной жидкости, подчиняющейся уравнению Шведова — Бингама. Последнее является частным случаем уравнения Бакли — Гершеля и используется как наиболее употребительная аппроксимация реологического поведения парафинистых и смолистых нефтей и нефтепродуктов в широком интервале температур.

Рассмотрим установившееся структурное течение вязкопластичной жидкости в круглой трубе радиуса R , вызванное действием продольного перепада давления.

На стенке трубы поддерживается постоянная температура T_w , на входе в трубу температура жидкости распределена равномерно и равна T_0 , причем $T_w \neq T_0$.

Пусть реологические характеристики вязкопластичной жидкости, пластичная вязкость μ и предельное напряжение сдвига τ_0 зависят от температуры T

$$(1) \quad \mu(T) = \mu_0 f_1(T), \quad \tau_0(T) = \tau_{00} f_2(T),$$

а плотность, теплопроводность, теплоемкость постоянны. Предположим, кроме того, что жидкость является несжимаемой.

В (1) μ_0 и τ_{00} — пластичная вязкость и предельное напряжение сдвига при температуре T_0 соответственно.

Сформулированной задаче при условии, что массовыми силами можно пренебречь, соответствует следующая система уравнений:

$$(2) \quad \begin{aligned} \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= \text{div } \Pi; \\ \Pi &= 2[\mu(T) + 1/h\tau_0(T)] \dot{S} - p\mathcal{E}; \\ \mathbf{v} \text{ grad } T &= a[\nabla^2 T + 1/k J[\mu(T)h + \tau_0(T)h]]; \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

где Π и \dot{S} — тензор напряжений и тензор скоростей деформаций; \mathcal{E} — единичный тензор; h — интенсивность скоростей деформаций сдвига; \mathbf{v} — вектор скорости; p — давление; ρ — плотность; a и k — соответственно температуропроводность и теплопроводность жидкости; J — механический эквивалент тепла.

Первые два уравнения системы (2) есть уравнения движения вязкопластичной среды Генки — Ильюшина, третье — уравнение теплопроводности, в котором для общности учтен член диссипативного выделения тепла [3], четвертое — уравнение неразрывности.

Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой направим вдоль оси трубы. Принимая во внимание осевую симметрию, находим, что касательная составляющая скорости v_φ и производные от всех величин по φ равны нулю. В этом случае система (2) в компонентной форме имеет вид

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[2(\mu + 1/h\tau_0) \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + 1/h\tau_0) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] + \frac{2}{r} (\mu + 1/h\tau_0) \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right); \\
& \rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + 1/h\tau_0) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[2(\mu + 1/h\tau_0) \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + 1/r (\mu + 1/h\tau_0) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right); \\
& v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 1/hJ (\mu h + \tau_0) h \right]; \\
& \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rv_z)}{\partial z} = 0; \\
& h \equiv \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Здесь r — текущий радиус; v_z и v_r — соответственно продольная и поперечная составляющие скорости.

Решение системы (3) даже численными методами на ЭЦВМ сталкивается со значительными трудностями.

Естественный путь для их преодоления состоит в переходе к соответствующим образом выбранным безразмерным переменным с последующим отбрасыванием малых членов в преобразованных уравнениях.

При выборе безразмерных переменных привлечем физические соображения. Конвективный теплообмен в трубах развивается существенно различным образом в продольном и поперечном направлениях: в продольном направлении имеет место конвективный теплоперенос, в поперечном — молекулярный. Мерой отношения конвективного теплопереноса к теплу, проникающему в поток за счет теплопроводности, является число Пекле $Pe = 2 \langle v \rangle R/a$ ($\langle v \rangle$ — средняя скорость течения, определяемая отношением объемного расхода жидкости к площади поперечного сечения трубы). Поэтому существуют два различных физических масштаба длины: поперечный R и продольный, пропорциональный Pe .

Примем в качестве продольного масштаба длины величину $L = PeR/2$ и в качестве характерного давления — перепад давления на длине L при изотермическом течении вязкопластичной жидкости в круглой трубе

$$p_0 = \lambda_0 \rho \langle v \rangle^2 / 2L / 2R,$$

где λ_0 — коэффициент гидравлического сопротивления.

Введем безразмерные переменные

$$\eta = r/R; \quad \xi = z / \frac{R}{2} Pe; \quad P = p/p_0; \quad \theta = (T - T_w)/(T_0 - T_w);$$

$$V_z = v_z / \langle v \rangle; \quad V_r = v_r / \langle v \rangle; \quad Re = 2R \langle v \rangle \rho / \mu_0;$$

$$II = 2\tau_{00} R / \langle v \rangle \mu_0; \quad \alpha = \langle v \rangle^2 \mu_0 / 2\kappa J (T_0 - T_w),$$

где Re — параметр Рейнольдса; II — параметр Сен-Венана — Ильюшина; α — диссипативный параметр.

Коэффициент гидравлического сопротивления зависит от параметров Re и II [14]:

$$\lambda_0 = 64 / Re \varphi(II).$$

Преобразуем систему (3) к новым переменным с одновременной оценкой порядка каждого члена уравнения. При этом существенным образом используем то обстоятельство, что для большинства случаев структурных течений вязкопластичных жидкостей в трубах критерий Re достигает весьма больших значений, вплоть до нескольких тысяч и даже сотен тысяч, а критерий Прандтля Pr ($Pr = \mu_0/a\rho$) изменяется в пределах от нескольких сотен до тысячи и выше. Поэтому члены преобразованных уравнений с множителями Re^{-n} , Pr^{-n} ($n \geq 1$) оценим порядком их величины.

Отбрасывая малые члены в уравнениях (3), приходим к следующим уравнениям:

$$(4) \quad \begin{aligned} dP/d\eta &= 0 \text{ или } P = P(\xi), \\ \frac{dP}{d\xi} &= \frac{1}{8\varphi(I)} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta \left[F_1(\theta) \frac{\partial V_z}{\partial \eta} - \frac{I}{2} F_2(\theta) \right] \right\}; \\ V_r' \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + V_z \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + 2\alpha \left[F_1(\theta) \frac{\partial V_z}{\partial \eta} - \frac{I}{2} F_2(\theta) \right] \frac{\partial V_z}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial (\eta V_r')}{\partial \eta} + \frac{\partial (\eta V_z)}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь введены новые обозначения: $V_r' = Re/2V_r$; $F_{1,2}(\theta) = f_{1,2}(T)$. При выводе (4) порядок радиальной скорости и ее производной по η оценивается из уравнения неразрывности.

Отметим, что в преобразованных уравнениях движения выпали члены, содержащие $\partial V_z/\partial \eta$. Физически это означает, что профиль скорости «подстраивается» под изменение профиля температуры и начальное распределение скоростей в сечении $\xi=0$ не оказывает существенного влияния на развитие профиля скорости вдоль потока, т. е. при таком рассмотрении не принимаются во внимание эффекты, связанные с развитием скорости в гидродинамическом начальном участке.

Переходим к обсуждению граничных условий. Особенностью градиентных течений вязкопластичных жидкостей в трубах является наличие ядра течения, примыкающего к продольной оси, в пределах которого скорость течения сохраняется равной осевой скорости. При этом необходимо признать существование в ядре малых продольных деформаций. Этот факт подтверждается очень хорошим совпадением теоретического решения задачи о развитии скорости вязкопластичной жидкости в гидродинамическом начальном участке круглой трубы, выполненного в указанном предположении, и экспериментальных данных [15].

Аналогично [15] для определения радиуса ядра запишем условие

$$(5) \quad |IF_2(\theta)| \geq 8\varphi(I) (-dP/d\xi)\eta_0.$$

Знак равенства в (5) имеет место на границе ядра. Граничные условия для температуры и составляющих скорости имеют вид

$$(6) \quad V_z = V_r' = 0 \quad \text{при } \eta = 1;$$

$$(7) \quad V_z = V_{1z}, \quad \partial V_z/\partial \eta = 0 \text{ при } \eta = \eta_0(\xi);$$

$$(8) \quad \partial \theta/\partial \eta = 0 \text{ при } \eta = 0;$$

$$(9) \quad \theta = 1 \text{ при } \xi = 0;$$

$$(10) \quad \theta = 0 \text{ при } \eta = 1, \quad \xi > 0.$$

В (7) V_{1z} означает скорость ядра. К (6) — (10) присоединим условие постоянства расхода жидкости

$$(11) \quad V_{1z} \eta_0^2(\xi) + 2 \int_{\eta_0(\xi)}^1 \eta V_z d\eta = 1.$$

Заметим, что в работе [13] третье граничное условие (7) переносится на ось трубы; уравнения движения и теплопроводности, таким образом, распространяются на всю область течения без учета того обстоятельства, что в пределах ядра

$$\partial V_z / \partial \eta = 0.$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что первые два уравнения системы (4) выписаны для вязкопластичной области течения.

Уравнение движения для ядра сводится к следующему:

$$V_z = V_{1z},$$

причем скорость ядра находится из граничного условия (7), а уравнение теплопроводности можно распространить на всю область течения, если учесть, что в ядре отсутствует тепловыделение внутреннего трения.

С учетом этого замечания произведем дальнейшее упрощение системы (4). Интегрируем первое уравнение (4) по η , учитывая (5) и второе граничное условие (7), исключим производную $\partial V_z / \partial \eta$ из второго уравнения системы (4). В итоге эти действия приводят (4) к более простому виду

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial \eta} &= F_1^{-1}(\theta) \left[-4\varphi(\text{И}) \left(-\frac{dP}{d\xi} \right) \eta + \frac{\text{И}}{2} F_2(\theta) \right], \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \\ V_z &= V_{1z}(\xi), \quad \eta_0 \leq \eta \leq 1; \\ V_r' \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + V_z \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \alpha \Phi(\text{И}, \eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1; \\ \partial(\eta V_r') / \partial \eta + \partial(\eta V_z) / \partial \xi &= 0, \end{aligned}$$

где $\Phi(\text{И}, \eta)$ — функция распределения источников тепла внутреннего трения

$$\Phi(\text{И}, \eta) = \begin{cases} \frac{8\varphi(\text{И})}{F_1(\theta)} \frac{dP}{d\xi} \eta \left[4\varphi(\text{И}) \frac{dP}{d\xi} \eta + \frac{\text{И}}{2} F_2(\theta) \right], & 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ 0, & \eta_0 \leq \eta \leq 1. \end{cases}$$

Преобразуем (11). Интегрируя первое уравнение системы (12) с последующей подстановкой полученного выражения для V_z в (11) и производя интегрирование по частям с учетом первого краевого условия (7), получим

$$(13) \quad \int_{\eta_0(\xi)}^1 \eta^2 F_1^{-1}(\theta) \left[4\varphi(\text{И}) \left(-\frac{dP}{d\xi} \right) \eta - \text{И} / 2 F_2(\theta) \right] d\eta = 1.$$

Уравнение (13) совместно с (5) определяет радиус ядра, если его рассматривать как параметр.

Системы уравнений (12), (5) — (10), (13) решались численно на ЭЦВМ методом конечных разностей с итерациями.

Подобный метод ранее применялся для численного решения системы уравнений пограничного слоя в сжимаемом газе на продольно-обтекаемой пластине [16].

Расчеты проводились для двух случаев. В первом принималось, что реологические характеристики жидкости зависят от температуры по гиперболическому закону [17], во втором случае — по экспоненциальному закону. Вначале рассмотрим результаты численного решения задачи для того частного случая, когда температура жидкости на входе и температура стенки одинаковы, а неизотермичность течения вызвана диссипацией энергии. При этом необходимо видоизменить принятое выше определение безразмерной температуры.

Принимая в качестве новой безразмерной температуры отношение

$$\theta_1 = T/T_w,$$

можно установить, что единственное изменение, которое необходимо произвести в системах (12), (13), (5) — (10), касается краевого условия (10), которое заменяется на следующее:

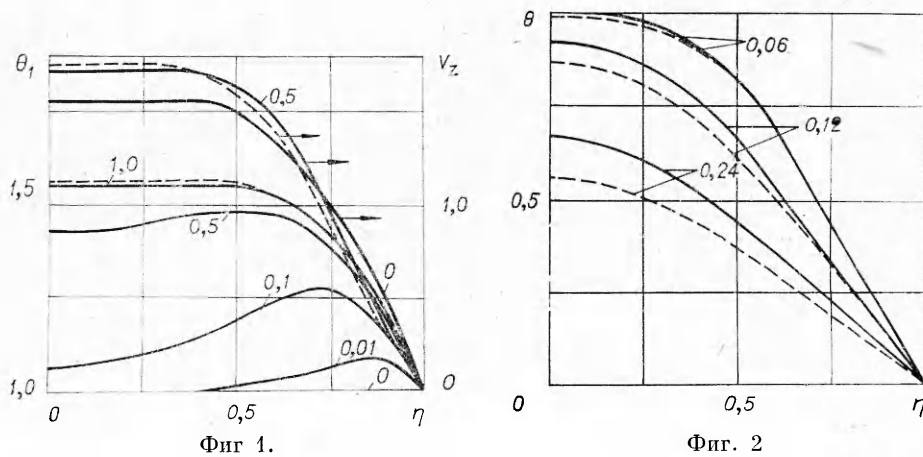
$$\theta_1 = 1; \eta = 1; \xi > 0.$$

В предположении, что реологические характеристики зависят от температуры по гиперболическому закону [17], имеем

$$F_1(\theta_1) = F_2(\theta_1) = \theta_1^{-1}.$$

Фиг. 1 иллюстрирует развитие температурного и скоростного поля в жидкости ($I=6; \alpha=0,2$) от входа в трубу вплоть до участка, соответствующего их стабилизации. Параметром, указанным цифрами у кривых, является продольная координата ξ .

Кривые распределения температуры и скорости на участке стабилизации обозначены на фиг. 1 штрихом. Сравнение штриховых кривых и точного решения задачи, полученного в [17], обнаруживает их полное совпадение вплоть до третьей значащей цифры после запятой, т. е. в пределах погрешности разностной схемы (вычисления проводились с шагом $\Delta\eta = \Delta\xi = 10^{-2}$, порядок аппроксимации разностной схемы — $O(\Delta\eta^2)$ при $\partial\theta/\partial\xi = 0$).



Обратимся к обсуждению результатов численного решения систем (12), (5) — (10), (13) при экспоненциальной зависимости реологических параметров жидкости от температуры

$$f_1(T) = \exp[-\beta_1'(T - T_w)];$$

$$f_2(T) = \exp[-\beta_2'(T - T_w)];$$

$$\beta_i = \beta_i'(T_0 - T_w); F_i(\theta) = \exp(-\beta_i\theta), (i = 1, 2).$$

Распределение температуры по радиусу и длине трубы иллюстрирует фиг. 2 ($И=11$; $\alpha=0$; $\beta_1=\beta_2=1$). Параметром кривых является продольная координата ξ . Точность полученных результатов можно оценить, сравнивая штриховые кривые, показанные на фиг. 2, которым соответствуют $\beta_1=\beta_2=0$, с аналогичными кривыми, представленными в [7] для тех же значений ξ и $\eta_0=0,5$ ($И=11$, радиус ядра $\eta_0=0,495$). Сравнение обнаруживает их полное совпадение. При этом следует учитывать, что ξ «растянута» в два раза по отношению координаты, обозначенной в [7] той же буквой.

Безразмерный коэффициент теплоотдачи, или число Нуссельта, имеет вид

$$Nu = 2\langle\theta\rangle^{-1}(d\theta/d\eta)_{\eta=1},$$

где $\langle\theta\rangle$ — средняя температура потока,

$$\langle\theta\rangle = 2 \int_0^1 \eta V_z(\eta) \theta(\eta) d\eta.$$

Изменение числа Нуссельта по длине трубы в зависимости от параметров $И$, β_1 , β_2 и α иллюстрирует фиг. 3

$$1 - И=38, \beta_1=\beta_2=0, \alpha=0;$$

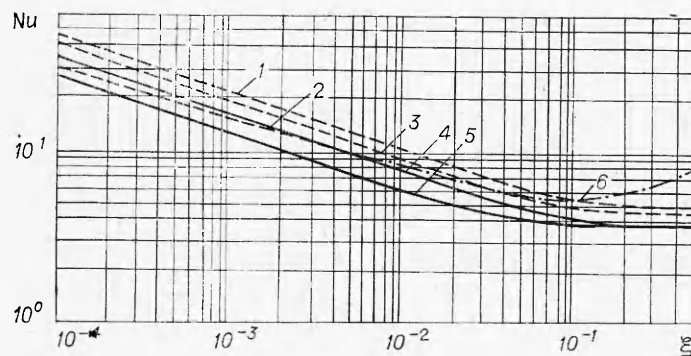
$$2 - И=0, \beta_1=0, \alpha=0;$$

$$3 - И=11, \beta_1=\beta_2=0, \alpha=0;$$

$$4 - И=11, \beta_1=1, \beta_2=0, \alpha=0;$$

$$5 - И=11, \beta_1=\beta_2=1, \alpha=0;$$

$$6 - И=11, \beta_1=1, \beta_2=0, \alpha=0,025).$$



Фиг. 3

Характер изменения кривых на фиг. 3 свидетельствует об уменьшении теплоотдачи жидкости, если ее реологические характеристики зависят от температуры. Штриховые кривые на фиг. 3 рассчитаны при постоянных реологических характеристиках жидкости. Кривая 2, соответствующая вязкой жидкости (при $I=0$), в точности совпадает с графиком, представленным в [2], а кривая 3 — с графиком изменения числа Нуссельта для вязкопластичной жидкости при $\eta_0=0,5$ и $\beta_1=\beta_2=0$ [4,7]. Как видно из фиг. 3, диссипация энергии, особенно при удалении от входа в трубу, приводит к существенному увеличению числа Нуссельта. Этот факт подробно исследован в [4-7]. Судя по результатам этих исследований, параметр Нуссельта вначале монотонно уменьшается, затем, при значительном удалении от входа, резко возрастает и, наконец, достигает его стабилизация. Фиг. 3 изображает две из этих характерных особенностей. Стабилизация, по-видимому, имеет место при $\xi > 0,5$, но для этой области расчет не проводился.

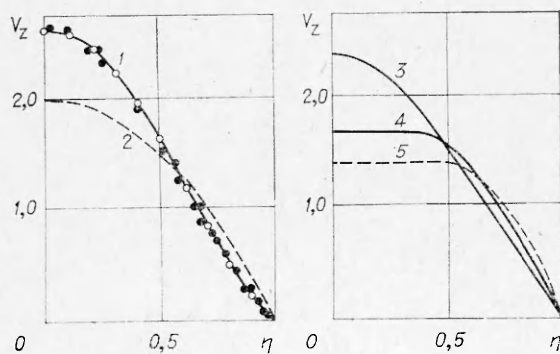
Распределение скорости по сечению трубы в зависимости от параметров I и β_1 иллюстрирует фиг. 4 (при $\xi=0,034$ ($\alpha=0$)):

- 1 — $I=0$, $\beta_1=1,36$; 2 — $I=0$, $\beta_1=0$;
 3 — $I=0$, $\beta_1=1$; 4 — $I=11$, $\beta_1=1$, $\beta_2=0$;
 5 — $I=11$, $\beta_1=\beta_2=0$).

Кривая 1 проведена через точки, обозначенные светлыми кружками. Они соответствуют значениям скорости V_z , найденным расчетом при $I=0$ и $\beta_1=1,36$. Темными кружками отмечены экспериментальные результаты работы [10], полученные при исследовании течения ньютоновской жидкости (глицерина) в тех же условиях ($\beta_1=1,36$). Отметим, что координата ξ «растянута» в 4 раза по отношению к продольной координате x , выбранной в [10]. Совпадение экспериментальных и теоретических результатов следует признать хорошим.

Изменения в распределении скорости вдоль трубы качественно объясняют отмеченные выше особенности теплоотдачи и повышение локальных температур при переменных реологических характеристиках жидкости, так как в этом случае увеличение скорости центральной области потока способствует более интенсивному переносу тепла от входа в трубу. Это приводит к общему повышению температуры и уменьшению теплоотдачи. Такой «выигрыш» в потерях тепла достигается, благодаря резкому повышению перепада давления.

Наглядное представление о наиболее характерных особенностях изменения градиента давления по длине трубы дает фиг. 5, которая од-



Фиг. 4

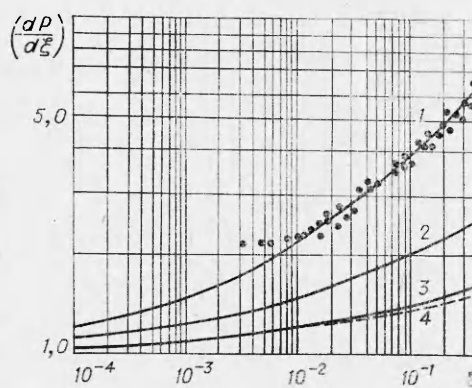
новременно иллюстрирует сравнение экспериментальных данных работы [10] для ньютоновской жидкости, отмеченных кружками, и численных решений (1 — $I=0$,

- $\beta_1=1,95$, $\alpha=0$;
 2 — $I=0$, $\beta_1=1$, $\alpha=0$;
 3 — $I=11$, $\beta_1=1$, $\beta_2=0$, $\alpha=0$;
 4 — $I=11$, $\beta_1=1$, $\beta_2=0$, $\alpha=0,025$).

Учитывая, что по оценке авторов работы [10] максимальная погрешность в определении градиента давления составляла 12%, можно сделать вывод о хорошем совпадении экспериментальных результатов и численного решения. В то же время систематическое занижение расчетного градиента давления по сравнению с экспериментальными данными для области, близкой к входу в трубу, очевидно, объясняется тем, что предполагавшиеся малыми эффекты, связанные с развитием скорости в гидродинамическом начальном участке, имеют важное значение для этой области.

Известно, что длина гидродинамического начального участка оказывается значительно меньше для вязкопластичной жидкости, чем для ньютоновской жидкости [3,15]. Поэтому следует ожидать, что отмеченная выше погрешность численных решений имеет место в весьма узкой области непосредственно у входа в трубу и в подавляющем большинстве случаев не окажет заметного влияния на точность расчета.

Автор благодарит В. М. Ентова и В. И. Марона за полезные обсуждения.



Фиг. 5

Поступила 9 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Sellars J. R., Tribus M., Klein J. S. Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit the Graetz problem extended.—*Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs*, 1956, vol. 78, N 2.
2. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
3. Мирааджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, Азербайджаннефт, 1959.
4. Смородинский Э. Л., Фройштетер Г. Б. Теплообмен при ламинарном течении вязкопластичных жидкостей в круглых трубах.—*Теоретическ. основы хим. технологии*, 1969, т. 3, № 4.
5. Шульман З. П., Гориславец Б. М., Рожков В. А., Урядова В. В. Конвективный теплообмен нелинейно-вязкопластичных сред в круглых трубах с учетом диссипации.—*Инж.-физ. журн.*, 1970, т. 19, № 5.
6. Skelland A. H. P. Non-Newtonian flow and heat transfer. N. Y., Wiley, 1967.
7. Michiyoshi J., Matsumoto R., Hozumi M. Heat transfer of slurry flow with internal heat generation. — *Bull. Jap. Soc. Mech. Engrs*, 1963, vol. 6, N 23.
8. Galili N., Takserman-Krozer R. Heat effect in viscous flow through a pipe. — *Jsrarel. J. Technol.*, 1971, vol. 9, N 5.
9. Kwant P. B., Zwaneveld A., Dijkstra F. C. Non-isothermal pipe flow. I. Theoretical. — *Chem. engng sci.*, 1973, vol. 28, N 6.
10. Kwant P. B., Fierens R. H. E., van der Lee A. Non-isothermal laminar pipe flow. II. Experimental. — *Chem. engng sci.*, 1973, vol. 28, N 6.
11. Wilkinson W. L. Non-Newtonian flow and heat transfer. — *Proc. Instn. Mech. Engrs*, 1972, vol. 186, N 2.
12. Forrest G., Wilkinson W. L. Laminar heat transfer to temperature-dependent bingham fluids in tubes. — *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 1973, vol. 16, N 12.
13. Смородинский Э. Л. Численный метод решения задачи ламинарного течения и теплообмена пластичных дисперсных систем при переменных реологических свойствах.— В кн.: Нефтепереработка и нефтехимия. Киев, «Наукова думка», 1973, вып. 10.

14. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
15. Michiyoshi L., Mizuno K., Hoshiai Y. Studies on the flow of slurry through a pipe. I. Entrance region of laminar flow.—«Internat. chem. engng», 1966, vol. 6, N 2.
16. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Изд. МГУ, 1962.
17. Переушин В. Е. О неизотермическом структурном течении вязкопластичной жидкости в круглой трубе.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 1.

УДК 539.374.1

ПОВЕДЕНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

В. А. Одинцов, В. В. Селиванов

(Москва)

При решении системы уравнений, описывающих одномерное движение идеально пластической несжимаемой оболочки под действием равномерно расширяющегося политропного газа, используется закон сохранения энергии. Получены аналитические выражения для определения поля напряжений и скоростей в оболочке в зависимости от перемещения внутренней границы оболочки.

Поведение идеально пластической несжимаемой оболочки под действием давления, в несколько раз превышающего предел текучести материала, рассматривалось в [1—3]. Задача о движении идеально пластической оболочки под действием равномерно расширяющихся продуктов детонации не имеет аналитического решения в виде конечных зависимостей от координаты и времени. Однако она может быть решена, если за аргумент принять величину внешнего (b) или внутреннего (a) радиуса оболочки.

Рассмотрим на фигуре плоскую деформацию цилиндрической оболочки под действием продуктов детонации (ПД), подчиняющихся закону расширения

$$(1) \quad pV^k = \text{const},$$

где p и V — соответственно давление и удельный объем ПД. Напряжения σ_r , σ_θ , σ_z являются главными. Внутренний и внешний начальные радиусы оболочки обозначим соответственно a_0 и b_0 , текущие — a и b .

Запишем закон сохранения энергии системы в виде

$$E + W + E_\phi = E_0$$

или на единицу длины

$$(2) \quad \tilde{E} + \tilde{W} + \tilde{E}_\phi = 1,$$

