

МИНИМИЗАЦИЯ ТОЛЩИНЫ НЕОДНОРОДНОГО ПОГЛОЩАЮЩЕГО СЛОЯ ПРИ ЗАДАННОМ МОДУЛЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

М. М. Мачевариани, В. Б. Миронова

(Ленинград)

В [1] была произведена минимизация толщины неоднородного поглощающего слоя при заданных значениях модуля и фазы отраженной монохроматической волны. На практике обычно задаются лишь значения модуля коэффициента отражения. Задача о минимизации применительно к этому случаю рассматривается в данной работе.

1. Постановка задачи. Пусть на плоский неоднородный поглощающий слой, показатель преломления которого меняется вдоль нормали, в том же направлении падает плоская монохроматическая волна. Принимая, как и в [1], для квадрата относительного показателя преломления выражение

$$n^2 = 1 + (1 + i\eta) Q(\tau) \quad (1.1)$$

будем иметь следующие дифференциальные уравнения для реальной и мнимой частей адмитанса $G = p + iq$

$$\frac{dp}{d\tau} = \eta Q - 2pq, \quad \frac{dq}{d\tau} = p^2 - q^2 - 1 - Q \quad (1.2)$$

Здесь G — входной адмитанс слоя, отнесенный к волновому адмитансу $(1 / \rho_0 c_0)$ среды, из которой приходит волна; ρ_0, c_0 — плотность среды и скорость продольной волны в этой среде; $\tau = \omega c_0^{-1} x$ — приведенная толщина слоя, ограниченного плоскостями $x = 0$ и $x = x$; ω — круговая частота; x — координата; η — заданная положительная константа; $Q(\tau)$ — неотрицательная функция, подлежащая определению

$$0 \leq Q(\tau) \leq N \quad (1.3)$$

Краевыми условиями, накладываемыми на значения фазовых координат p и q , являются

$$p(0) = p^0, \quad q(0) = q^0 \quad (\tau = 0) \quad (1.4)$$

$$\Phi_e \equiv \frac{(1 - p_e)^2 + q_e^2}{(1 + p_e)^2 + q_e^2} - |\beta_e|^2 = 0 \quad (\tau = \tau_e) \quad (1.5)$$

где $G(0) = p^0 + iq^0$; $G(\tau_e) = G_e = p_e + iq_e$ — соответственно значения входных адмитансов нагрузки и неоднородного слоя, τ_e — приведенная толщина слоя, ограниченного плоскостями $x = 0$ и $x = e$, а $|\beta_e|$ — заданное значение модуля коэффициента отражения.

Задача оптимизации формулируется следующим образом: определить фазовые координаты $p(\tau)$ и $q(\tau)$, удовлетворяющие уравнениям (1.2) и начальным условиям (1.4), и функцию управления $Q(\tau)$, подчиненную неравенству (1.3), так, чтобы при выполнении условия (1.5) приведенная толщина слоя τ_e имела минимальное значение.

2. Экстремальные частичные дуги. Сформулированная оптимальная задача (1.2) — (1.5) отличается от рассмотренной в [1] только формой краевого условия (1.5). В связи с этим основные выводы, полученные в [1], остаются справедливыми и здесь. Оптимальное управление может принимать лишь граничные значения: $Q = 0$, либо $Q = N$. Соответственно этим значениям оптимальный адмитанс-годограф находится из решений дифференциальных уравнений (1.2)

$$p + iq = \frac{p_0 + iq_0 + i(1 + (1 + i\eta)Q)^{1/2} \operatorname{tg} [\tau(1 + (1 + i\eta)Q)^{1/2}]}{1 \mp i(p_0 + iq_0)(1 + (1 + i\eta)Q)^{-1/2} \operatorname{tg} [\tau(1 + (1 + i\eta)Q)^{1/2}]} \quad (2.1)$$

где (p_0, q_0) — точка на плоскости адмитанса, соответствующая началу изменения τ на любом подынтервале, внутри которого $Q(\tau)$ сохраняет свое значение неизменным. Знак минус перед i в формуле (2.1) соответствует прямому интегрированию, знак плюс — обратному. Дифференциальными уравнениями для вспомогательных фазовых координат (множителей Лагранжа) являются

$$\frac{d\lambda_p}{d\tau} = 2q\lambda_p - 2p\lambda_q, \quad \frac{d\lambda_q}{d\tau} = 2p\lambda_p + 2q\lambda_q \quad (2.2)$$

Функция переключения, нули которой определяют «моменты» скачкообразного изменения управления $Q(\tau)$ с 0 на N (и наоборот), выражается через множители Лагранжа

$$K = \eta\lambda_p - \lambda_q \quad (2.3)$$

При этом на участках оптимальных адмитанс-годографов, для которых $K > 0$, значение управления максимально, на участках, для которых $K < 0$, — минимально. Первым интегралом уравнений (1.2) и (2.2) является выражение

$$H_\lambda = KQ - 2pq\lambda_p - (1 + q^2 - p^2)\lambda_q = 1 \quad (2.4)$$

В области $\Phi = 2pq + \eta(1 + q^2 - p^2) > 0$ переключение (скачкообразное изменение управления) может происходить лишь с минимума на максимум, в области же $\Phi < 0$ наоборот.

Равенство (1.5) приводит в соответствии с [1] (формула 2.4) к следующим краевым условиям для лагранжевых множителей:

$$\lambda_p^e = \lambda_p(\tau_e) = \chi_e \frac{4\Phi_e}{[(1 + p_e)^2 + 4q_e^2]^2} \quad (2.5)$$

$$\lambda_q^e = \lambda_q(\tau_e) = -\chi_e \frac{8p_e q_e}{[(1 + p_e)^2 + q_e^2]^2}$$

где χ_e — неизвестная константа, $\Phi_e = 1 + q_e^2 - p_e^2$. Наличие связи между значениями фазовых координат p_e, q_e и вспомогательных функций λ_p^e, λ_q^e при $\tau = \tau_e$ и отсутствие таковой при $\tau = 0$ приводят к целесообразности интегрирования (одновременного) уравнений (1.2) и (2.2) в обратном направлении. В качестве результата такого интегрирования уравнений (1.2) используются выражения (2.1) со знаком плюс перед мнимой единицей. Интегрирование уравнений (2.2) можно произвести с помощью комплексной вспомогательной функции $\lambda = \lambda_q + i\lambda_p$, для которой оба уравнения (2.2) записываются так:

$$d\lambda/d\tau = -2iG\lambda \quad (2.6)$$

найдем, что

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \pi \tag{3.5}$$

Равенства (3.4) и (3.5) показывают, что эти участки адмитанс-годографов являются полуокружностями с радиусами r_j° и центрами, лежащими на оси p . Для участков оптимальных адмитанс-годографов, для которых $Q = N$ ($\eta \neq 0$), уравнения (3.2) решаются численно, либо приближенно. Интересуясь значениями τ_1 , для первой линии переключения можно записать

$$\operatorname{tg} 2 \int_0^{\tau_1} p \, d\tau = \frac{\Phi_e}{2\eta p_e q_e - \Phi_e} \tag{3.6}$$

Для точек окружности заданного модуля коэффициента отражения, близких к точке a_1 (фиг. 2, 3), правая часть (3.6) будет величиной весьма малой, а тогда

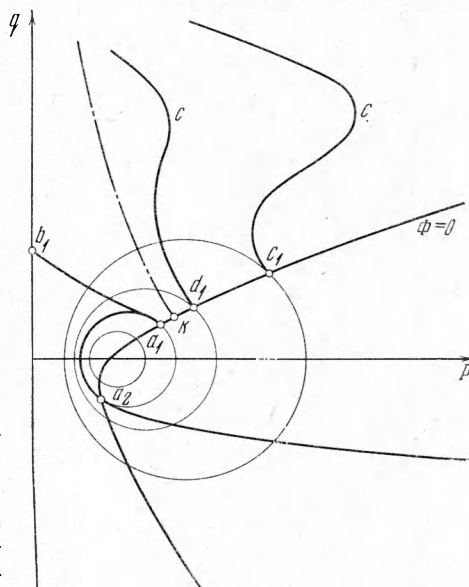
$$\int_0^{\tau_1} p \, d\tau \approx \frac{1}{2} \frac{\Phi_e}{2\eta p_e q_e - \Phi_e} \tag{3.7}$$

При этом значения τ_1 также будут малыми; линия переключения начнется в точке a_1 . При удалении G_e от точки a_1 значения τ_1 будут расти. Точка a_2 (фиг. 2) будет крайней на заданной окружности, так как выходящие из области $\Phi < 0$ экстремальные адмитанс-годографы не оптимальны (минимальная толщина для них будет большей на величину, соответствующую участку годографа, который лежит внутри окружности заданного модуля коэффициента отражения).

Положение «конечной» точки на линии переключения устанавливается не столь просто. Для этого представим себе семейство раскручивающихся (из фокуса $G_\infty = [1 + (1 + i\eta)N]^{1/2}$) по часовой стрелке спиралевидных адмитанс-годографов, «пронизывающих» часть заданной окружности между точками a_1 и a_2 . Некоторые годографы (из тех, что выходят из части окружности в соседстве с точкой a_1), пройдя точку, в которой $dq/dp = \infty$, будут уклоняться в сторону возрастания фазовой координаты p . Другие же (выходящие из части окружности в соседстве с точкой a_2), уклоняясь в обратную сторону, пересекут ось $p = 0$ и будут продолжаться в отрицательную полуплоскость $p < 0$.

Так как процессы, связанные с распространением волн в поглощающих средах, описываются фазовыми координатами на положительной полуплоскости, то ось $p = 0$ можно считать границей рассматриваемой области значений адмитанса. Следовательно, именно на этой оси и может располагаться конечная точка линии переключения, если эта точка принадлежит какому-либо из годографов, уклоняющихся в сторону отрицательной полуплоскости $p < 0$ и пересекающих эту ось.

Если такая располагающаяся на оси $p = 0$ точка переключения найдена при обратном интегрировании уравнений (1.2) из некоторой точки



Фиг. 2

(p_e, q_e), то, продолжая интегрирование вдоль оси, найдем, что на этой оси всюду, вплоть до бесконечно удаленной точки, функция переключения будет тождественно равняться нулю. Этот факт вытекает из формулы (3.4), если положить в ней $p = K_0 = 0$, и является следствием однородности дифференциальных уравнений для лагранжевых множителей.

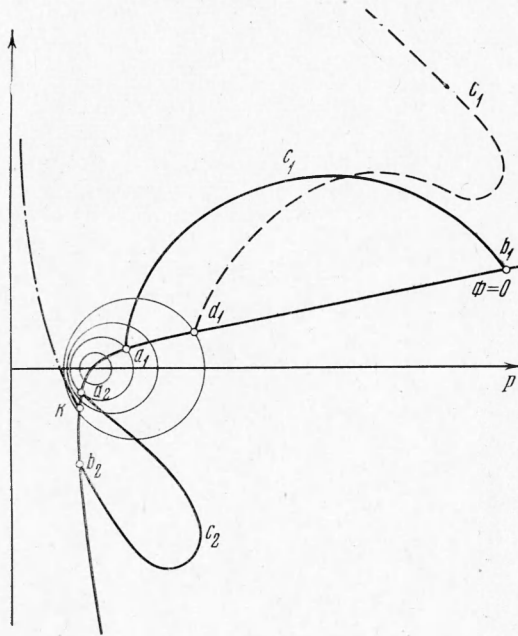
Это становится понятным, если учесть, что при оптимальном согласовании чисто мнимых нагрузок с произвольной средой, реальная часть адмитанса которой отлична от нуля, точки переключения могут лежать лишь на оси $p = 0$. Если же ни один из годографов, выходящих из точек окружности заданного модуля коэффициента отражения, не пересекает ось $p = 0$, то конечная точка линии переключения (соответствующая точке b_1) будет лежать на гиперболе $\Phi = 0$. (Конечная точка не может находиться в области $\Phi < 0$, так как в этой области оптимальному годографу соответствует значение $Q = 0$.) Такая картина будет иметь место в случае малых η и небольших значений N . С увеличением η и N появится семейство оптимальных адмитанс-годографов, пересекающих ось $p = 0$. При фиксированных значениях η и N вопрос о том, существует ли для окружности заданного модуля коэффициента отражения семейство оптимальных годографов, пересекающих ось $p = 0$, решается просто. Для этого достаточно построить «предельный» годограф, пересекающий ось $p = 0$ при бесконечно больших значениях q , в соответствии с формулой¹

$$p_e + iq_e = i(1 + (1 + i\eta)N)^{1/2} \operatorname{ctg} [\tau(1 + (1 + i\eta)N)^{1/2}] \quad (3.8)$$

Если предельный годограф пройдет левее и ниже точки a_2 , то пересекающих ось $p = 0$ оптимальных адмитанс-годографов не будет, и, таким образом, первая линия переключения изобразится кривой $a_1c_1b_1$ (фиг. 3). Из формул (2.8) и (3.4) можно установить, что точкой переключения для предельного годографа (независимо от точки G_e) является бесконечно удаленная точка (особая точка для функции λ). Последнее означает, что если предельный годограф прошел через точку a_2 или выше и правее нее, то конечная точка линии переключения будет находиться на оси $p = 0$. В этом случае линия переключения изобразится кривыми a_1b_1 , d_1c и c_1c (фиг. 2).

Для построения второй линии переключения надо в соответствии с (3.4) и (3.5) из каждой точки первой линии переключения радиусом, равным r_1° , прочертить дугу полуокружности с центром p_1° . Геометрическое место концов этих дуг и даст вторую линию переключения. При этом начальная точка первой линии переключения (a_1) отобразится в точку (a_2), соответствующую теперь началу второй линии переключения. Если же

¹ На фиг. 2, 3 этот годограф пересекает гиперболу $\Phi = 0$ в точке K .



Фиг. 3

конечная точка первой линии переключения лежит на оси $p = 0$, соответствующая ей конечная точка второй линии переключения будет находиться в бесконечно удаленной точке, для которой, однако, значение мнимой координаты будет равно обратному по знаку значению мнимой координаты конечной точки первой линии переключения.

В таком случае, как видно из фиг. 2, для оптимального согласования нагрузки с произвольным комплексным адмитансом (на уровне заданного модуля коэффициента отражения) максимальное число однородных слоев не должно превышать трех. Пусть теперь конечная точка первой линии переключения лежит на гиперболе $\Phi = 0$ (точка b_1), т. е. предельный адмитанс-годограф проходит ниже и левее точки a_2 . Тогда точка b_1 отображится в точку b_2 , конечную для второй линии переключения (линии $a_2 c_2 b_2$). Если при этом предельный годограф пересечет гиперболу $\Phi = 0$ на участке $a_2 b_2$, то, отображая вторую линию переключений, найдем, что конечная точка третьей линии переключения будет находиться на оси $p = 0$.

Соответствующая ей конечная точка четвертой линии переключения при этом уйдет в бесконечно удаленную точку. В этом случае для оптимального согласования произвольной комплексной нагрузки максимальное число однородных слоев возрастет до пяти. Если предельный адмитанс-годограф пройдет ниже и левее точки b_2 , то аналогично можно установить максимальное число однородных слоев, необходимых для оптимального согласования. Построив полную картину линий переключения, с помощью формулы (2.1) можно вычислить минимально возможную толщину и другие параметры оптимального неоднородного слоя.

Поступила 21 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К. А., Мачевариани М. М. Минимизация толщины неоднородного слоя при заданном коэффициенте отражения монохроматической волны. ПМТФ, 1969, № 1.