УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИН

А. Е. Алексеев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложена методика построения нелинейных уравнений упругого деформирования пластин с произвольными граничными условиями для напряжений и перемещений на лицевых поверхностях в произвольной криволинейной системе координат. Исходная трехмерная задача нелинейной теории упругости сводится к однопараметрической последовательности двумерных задач путем аппроксимации неизвестных функций в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра. Для одних и тех же неизвестных величин используется несколько аппроксимаций, различающихся количеством удерживаемых членов в рядах. В каждом приближении получена линеаризованная система уравнений, дифференциальный порядок которой не зависит от вида граничных условий на лицевых поверхностях, которые могут задаваться как в напряжениях, так и в перемещениях.

Нелинейные уравнения упругого деформирования пластин в общем случае представляют собой трехмерные уравнения нелинейной теории упругости. Существуют различные способы понижения размерности исходной задачи. Эффективные способы сведения трехмерной задачи к двумерной основаны на разложении искомых величин в ряды по полиномам Лежандра (см., например, [1]). В [2] изложен способ понижения размерности линейных задач упругого деформирования пластин и оболочек постоянной толщины с произвольными граничными условиями для перемещений и напряжений на лицевых поверхностях, в основе которого лежит применение нескольких аппроксимаций одних и тех же неизвестных величин в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра. С использованием этой методики в [3] получено однопараметрическое семейство последовательных приближений уравнений деформирования слоя переменной толщины в произвольной криволинейной системе координат. В данной работе предложенная в [2, 3] методика обобщается на случай нелинейного упругого деформирования пластин.

1. Уравнения нелинейной теории упругости в произвольной криволинейной системе координат. Рассмотрим произвольную криволинейную систему координат Лагранжа ξ^i ($i = 1, 2, 3$). Уравнения равновесия сплошной среды записываются в векторной форме

$$\hat{\boldsymbol{t}}^i_{,i} + \hat{\boldsymbol{f}} = 0, \qquad \hat{\boldsymbol{t}}^i = J\boldsymbol{t}^i, \qquad \hat{\boldsymbol{f}} = J\boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{t}^i = \sigma^{ij}\boldsymbol{g}_j; \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{g}_i \times \hat{\boldsymbol{t}}^i = 0, \qquad J = \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3), \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{g}_i$ — ковариантный базис криволинейной системы координат ξ^i в деформированном состоянии; $J = \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)$ — якобиан преобразования координат; σ^{ij} — компоненты тензора напряжений Коши; $\boldsymbol{f}$ — вектор объемных сил. Равенство (1.2) является условием симметрии тензора напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00525).

Компоненты тензора деформаций Грина — Лагранжа ε_{ij} связаны с вектором перемещений $\boldsymbol{u}$ нелинейными соотношениями

$$2\varepsilon_{ij} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_i \cdot \boldsymbol{u}_{,j} + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_j \cdot \boldsymbol{u}_{,i} + \boldsymbol{u}_{,i} \cdot \boldsymbol{u}_{,j}, \tag{1.3}$$

где $\overset{0}{\boldsymbol{g}}_i$ — ковариантный базис системы координат ξ^i в недеформированном состоянии; нуль над символом означает, что соответствующая величина относится к недеформируемому состоянию.

Ковариантный базис системы координат ξ^i в деформированном состоянии имеет вид

$$\boldsymbol{g}_i = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_i + \boldsymbol{u}_{,i}. \tag{1.4}$$

Для вариаций деформаций $\delta\varepsilon_{ij}$ согласно (1.3), (1.4) имеем

$$2\delta\varepsilon_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \delta\boldsymbol{u}_{,j} + \boldsymbol{g}_j \cdot \delta\boldsymbol{u}_{,i}. \tag{1.5}$$

Закон Гука принимается в виде

$$\tau^{ij} = \overset{0}{C}{}^{ijks}\varepsilon_{ks}, \tag{1.6}$$

где τ^{ij} — контравариантные компоненты второго тензора напряжений Пиола — Кирхгофа; $\overset{0}{C}{}^{ijks}$ — контравариантные компоненты тензора четвертого ранга, удовлетворяющие условиям симметрии $\overset{0}{C}{}^{ijks} = \overset{0}{C}{}^{jiks} = \overset{0}{C}{}^{ksij}$.

В системе координат ξ^i имеет место равенство

$$\overset{0}{J}\tau^{ij} = J\sigma^{ij}, \tag{1.7}$$

где $\overset{0}{J} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_1 \cdot (\overset{0}{\boldsymbol{g}}_2 \times \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3)$ — якобиан преобразования координат в метрике исходного пространства.

В дальнейшем краевые условия относятся к недеформируемому состоянию.

Полагаем, что граница $\overset{0}{S}$ недеформируемого тела состоит из двух частей: $\overset{0}{S}_u$, где заданы перемещения

$$\boldsymbol{u}\Big|_{\overset{0}{S}_u} = \boldsymbol{u}_*, \tag{1.8}$$

и $\overset{0}{S}_\sigma$, где заданы напряжения

$$\tau^{ij}\boldsymbol{g}_j \overset{0}{\nu}_i \Big|_{\overset{0}{S}_\sigma} = \boldsymbol{p}_*. \tag{1.9}$$

Здесь $\overset{0}{\nu}_i = \overset{0}{\boldsymbol{\nu}} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}_i$; $\overset{0}{\boldsymbol{\nu}}$ — внешняя нормаль к границе $\overset{0}{S}$; $\boldsymbol{u}_*$, $\boldsymbol{p}_*$ — заданные вектор-функции на $\overset{0}{S}$.

Для уравнений равновесия (1.1), (1.2) и граничных условий (1.8), (1.9) можно записать принцип возможных перемещений

$$\int\limits_{\overset{0}{V}} \tau^{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, d\overset{0}{V} = \int\limits_{\overset{0}{S}_\sigma} \boldsymbol{p}_* \cdot \delta\boldsymbol{u}\, d\overset{0}{S}. \tag{1.10}$$

Краевая задача (1.1)–(1.9) относительно недеформируемого состояния принимается в качестве исходной краевой задачи нелинейной теории упругости.

2. Разложение функций по полиномам Лежандра. Рассмотрим пластину с постоянной толщиной $2h$, занимающую в недеформированном состоянии объем $\overset{0}{V}$, ограниченный лицевыми поверхностями $\overset{0}{S}{}^{+}$, $\overset{0}{S}{}^{-}$ и торцевой поверхностью $\overset{0}{\Sigma}$.

Пусть x_i — декартовы координаты. В недеформированном состоянии срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью $x_3 = 0$, а лицевым поверхностям $\overset{0}{S}{}^{+}$, $\overset{0}{S}{}^{-}$ соответствуют значения $x_3 = +h$, $x_3 = -h$.

Выберем криволинейную систему координат Лагранжа ξ^k таким образом, чтобы координатная ось ξ^3 в недеформируемом состоянии совпадала с осью x_3. Координаты x_3 и ξ^3 связаны зависимостью $x_3 = h\xi^3$. В недеформированном состоянии положение любой внутренней точки пластины объема $\overset{0}{V}$ задается вектор-функцией криволинейных координат ξ^k

$$\overset{0}{\boldsymbol{R}}(\xi^k) = \overset{0}{\boldsymbol{r}}(\xi^\alpha) + h\boldsymbol{n}\xi^3, \qquad \xi^k \in V_\xi \subset \mathbb{R}^3, \tag{2.1}$$

где $V_\xi = \{\xi^k | \xi^\alpha \in S_\xi \subset \mathbb{R}^2,\ \xi^3 \in [-1, 1]\}$; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор в направлении оси координат x_3.

Дифференцируя обе части равенства (2.1) по переменным ξ^k, получим вектор-функции

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha = \overset{0}{\boldsymbol{R}}_{,\alpha} = \overset{0}{\boldsymbol{r}}_{,\alpha}, \qquad \boldsymbol{g}_3 = \overset{0}{\boldsymbol{R}}_{,3} = h\boldsymbol{n} \qquad \Big(\overset{0}{\boldsymbol{R}}_{,\alpha} = \frac{\partial \overset{0}{\boldsymbol{R}}}{\partial \xi^\alpha}\Big), \tag{2.2}$$

составляющие ковариантный локальный базис системы координат ξ^k в недеформируемом состоянии.

Из (2.2) следует, что векторы $\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha$ зависят только от координат ξ^α, а вектор $\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3$ не зависит от ξ^k.

Поскольку координата $\xi^3 \in [-1, 1]$, неизвестные функции $\boldsymbol{u}$, $\hat{\boldsymbol{t}}^i$ можно представить в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=0}^{\infty} [\boldsymbol{u}]^k P_k, \qquad \hat{\boldsymbol{t}}^i = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k P_k. \tag{2.3}$$

Здесь $P_k(\xi^3)$ — ортогональные полиномы Лежандра; $[\boldsymbol{u}]^k$, $[\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k$ — коэффициенты разложений, зависящие от координат $\{\xi^\alpha\} \in S_\xi \subset \mathbb{R}^2$:

$$[\boldsymbol{u}]^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} \boldsymbol{u} P_k \, d\xi^3, \qquad [\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} \hat{\boldsymbol{t}}^i P_k \, d\xi^3. \tag{2.4}$$

Подынтегральные выражения в (2.4) содержат величины $\hat{\boldsymbol{t}}^i$, которые, используя формулы (1.7), (1.4), можно представить в виде

$$\hat{\boldsymbol{t}}^i = J\sigma^{ij}\boldsymbol{g}_j = \overset{0}{J}\tau^{ij}(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_i + \boldsymbol{u}_{,i}). \tag{2.5}$$

3. Аппроксимации напряжений. Рассмотрим уравнения равновесия (1.1), которые представим в эквивалентной форме

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{j}\cdot\,(\hat{\boldsymbol{t}}^{i}_{,i}+\boldsymbol{f})=0\qquad(j=1,\ 2,\ 3).\tag{3.1}$$

Компоненты контравариантного базиса $\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{j}$ в недеформированном состоянии не зависят от координаты ξ^3. Поэтому, разлагая равенства (3.1) в ряды по полиномам Лежандра, можно получить систему уравнений

$$\begin{gathered}\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha}\cdot\,([\hat{\boldsymbol{t}}^{\alpha}]^{k}_{,\alpha}+[\hat{\boldsymbol{t}}^{3}_{,3}]^{k}+[\hat{\boldsymbol{f}}]^{k})=0\qquad(k=\overline{0,N+1}),\\ \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3}\cdot\,([\hat{\boldsymbol{t}}^{\alpha}]^{k}_{,\alpha}+[\hat{\boldsymbol{t}}^{3}_{,3}]^{k}+[\hat{\boldsymbol{f}}]^{k})=0\qquad(k=\overline{0,N}),\end{gathered}\tag{3.2}$$

где $N\geqslant 0$ — произвольное число. Количество членов в разложениях (3.2) выбирается аналогично линейному случаю, рассмотренному в работах [2, 3]. Для каждого k умножим равенства (3.2) на P_k и просуммируем. В результате получим

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha}\cdot(\hat{\boldsymbol{T}}'^{i}_{,i}+\hat{\boldsymbol{F}})=0,\qquad\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3}\cdot(\hat{\boldsymbol{T}}''^{i}_{,i}+\hat{\boldsymbol{F}})=0.\tag{3.3}$$

Здесь величины $\hat{\boldsymbol{T}}'^{i}$, $\hat{\boldsymbol{T}}''^{i}$, $\hat{\boldsymbol{F}}$ соответствуют отрезкам рядов

$$\begin{gathered}\hat{\boldsymbol{T}}'^{\alpha}=\sum_{k=0}^{N+1}[\hat{\boldsymbol{t}}^{\alpha}]^{k}P_k,\qquad\hat{\boldsymbol{T}}''^{\alpha}=\sum_{k=0}^{N}[\hat{\boldsymbol{t}}^{\alpha}]^{k}P_k,\\ \hat{\boldsymbol{T}}'^{3}=\hat{\boldsymbol{T}}''^{3}=\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{\alpha}\sum_{k=0}^{N+2}([\hat{\boldsymbol{t}}^{3}]^{k}\cdot\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha})P_k+\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{3}\sum_{k=0}^{N+1}([\hat{\boldsymbol{t}}^{3}]^{k}\cdot\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3})P_k,\\ \hat{\boldsymbol{F}}=\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{\alpha}\sum_{k=0}^{N+1}([\hat{\boldsymbol{f}}]^{k}\cdot\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha})P_k+\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{3}\sum_{k=0}^{N}([\hat{\boldsymbol{f}}]^{k}\cdot\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3})P_k.\end{gathered}\tag{3.4}$$

Таким образом, в уравнениях (3.3) для одних и тех же величин $\hat{\boldsymbol{t}}^{\alpha}$ имеем две аппроксимации $\hat{\boldsymbol{T}}'^{\alpha}$ и $\hat{\boldsymbol{T}}''^{\alpha}$, отличающихся только количеством удерживаемых членов в рядах.

4. Аппроксимации деформаций и перемещений. Рассмотрим вариации вектора перемещений $\delta\boldsymbol{u}$, равные нулю на границе $\overset{0}{S}_u$. Для простоты ограничимся случаем, когда $\hat{\boldsymbol{F}}=0$.

Из уравнений (3.3) следует равенство

$$\int\limits_{V_\xi}[(\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha}\cdot\,\hat{\boldsymbol{T}}'^{i}_{,i})(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{\alpha}\cdot\delta\boldsymbol{u})+(\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3}\cdot\,\hat{\boldsymbol{T}}''^{i}_{,i})(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{3}\cdot\delta\boldsymbol{u})]\,dV_\xi=0,\qquad dV_\xi=d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3.\tag{4.1}$$

Интегрируя (4.1) по частям, находим

$$\begin{aligned}\int\limits_{V_\xi}\{[(\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha}\cdot\,\hat{\boldsymbol{T}}'^{i})(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{\alpha}\cdot\delta\boldsymbol{u})]_{,i}+[(\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3}\cdot\,\hat{\boldsymbol{T}}''^{i}_{,i})(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{3}\cdot\delta\boldsymbol{u})]_{,i}\}\,dV_\xi&=\\ =\int\limits_{V_\xi}\{\hat{\boldsymbol{T}}'^{i}\cdot[\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha}(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{\alpha}\cdot\delta\boldsymbol{u})]_{,i}+\hat{\boldsymbol{T}}''^{i}\cdot[\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3}(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_{3}\cdot\delta\boldsymbol{u})]_{,i}\}\,dV_\xi.&\end{aligned}\tag{4.2}$$

Используя свойства полиномов Лежандра, преобразуем правую часть (4.2):

$$\int\limits_{V_\xi} \{\hat{\boldsymbol{T}}'^i \cdot [\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{u})]_{,i} + \hat{\boldsymbol{T}}''^i \cdot [\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \delta\boldsymbol{u})]_{,i}\}\, dV_\xi =$$

$$= \int\limits_{V_\xi} \{\hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha \cdot [\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{u})]_{,\alpha} + \hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha \cdot [\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \delta\boldsymbol{u})]_{,\alpha} + \hat{\boldsymbol{T}}^3 \cdot \delta\boldsymbol{u}_{,3}\}\, dV_\xi =$$

$$= \int\limits_{V_\xi} \left\{\hat{\boldsymbol{t}}^\alpha \cdot \left[\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha\left(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{N+1}[\delta\boldsymbol{u}]^k P_k\right)\right]_{,\alpha} + \hat{\boldsymbol{t}}^\alpha \cdot \left[\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3\left(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \sum_{k=0}^{N}[\delta\boldsymbol{u}]^k P_k\right)\right]_{,\alpha} + \hat{\boldsymbol{t}}^3 \cdot \delta\boldsymbol{U}''_{,3}\right\} dV_\xi =$$

$$= \int\limits_{V_\xi} \{\hat{\boldsymbol{t}}^\alpha \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \hat{\boldsymbol{t}}^3 \cdot \delta\boldsymbol{U}''_{,3}\}\, dV_\xi. \qquad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{U}' &= \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha\left(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{N+1}[\delta\boldsymbol{u}]^k P_k\right) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3\left(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \sum_{k=0}^{N}[\delta\boldsymbol{u}]^k P_k\right), \\ \delta\boldsymbol{U}'' &= \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{N+3}[\delta\boldsymbol{u}]^k P_k) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \sum_{k=0}^{N+2}[\delta\boldsymbol{u}]^k P_k). \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Подставляя в (4.3) выражения (2.5) для $\hat{\boldsymbol{t}}^i$ и используя симметрию тензора напряжений τ^{ij}, проведем дальнейшее преобразование:

$$\int\limits_{V_\xi} (\hat{\boldsymbol{t}}^\alpha \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \hat{\boldsymbol{t}}^3 \cdot \delta\boldsymbol{U}''_{,3})\, dV_\xi = \int\limits_{\overset{0}{V}} (\tau^{\alpha k}\boldsymbol{g}_k \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \tau^{3k}\boldsymbol{g}_k \cdot \delta\boldsymbol{U}''_{,3})\, d\overset{0}{V} =$$

$$= \int\limits_{\overset{0}{V}} [\tau^{\alpha\beta} 0{,}5\,(\boldsymbol{g}_\beta \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\beta}) + \tau^{3\alpha}(\boldsymbol{g}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{U}''_{,3} + \boldsymbol{g}_3 \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha}) + \tau^{33}(\boldsymbol{g}_3 \cdot \delta\boldsymbol{U}''_{,3})]\, d\overset{0}{V},$$

$$d\overset{0}{V} = \overset{0}{J}\ d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3.$$

Обозначая выражения в круглых скобках через δE_{ij}, получим

$$2\delta E_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}_\beta \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\beta}, \quad 2\delta E_{3\alpha} = \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{U}''_{,3} + \boldsymbol{g}_3 \cdot \delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha}, \quad \delta E_{33} = \boldsymbol{g}_3 \cdot \delta\boldsymbol{U}''_{,3}. \qquad (4.5)$$

Окончательно имеем

$$\int\limits_{V_\xi} \{\hat{\boldsymbol{T}}'^i \cdot [\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{u})]_{,i} + \hat{\boldsymbol{T}}''^i \cdot [\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \delta\boldsymbol{u})]_{,i}\}\, dV_\xi = \int\limits_{\overset{0}{V}} \tau^{ij}\delta E_{ij}\, d\overset{0}{V}. \qquad (4.6)$$

В (4.5) величины δE_{ij} являются аппроксимациями вариаций $\delta\varepsilon_{ij}$ в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра (см. (1.5)). Векторы $\delta\boldsymbol{U}'$ и $\delta\boldsymbol{U}''$ (4.4) являются аппроксимациями вариаций вектора перемещений $\delta\boldsymbol{u}$: первая используется при вычислении производной по координатам ξ^α, вторая — по координате ξ^3. В соответствии с этим в выражениях (1.4) для ковариантного базиса деформированного состояния $\boldsymbol{g}_i$ сделаем замену:

$$\boldsymbol{G}_\alpha = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha + \boldsymbol{U}'_{,\alpha}, \qquad \boldsymbol{G}_3 = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 + \boldsymbol{U}''_{,3}. \qquad (4.7)$$

Подставляя в выражения (4.5) вместо ковариантного базиса деформированного состояния $\boldsymbol{g}_i$ аппроксимации (4.7), получим

$$2E_{\alpha\beta} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\beta \cdot \boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \boldsymbol{U}'_{,\beta} + \boldsymbol{U}'_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{U}'_{,\beta}, \qquad 2E_{3\alpha} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \boldsymbol{U}''_{,3} + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \boldsymbol{U}'_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{U}''_{,3},$$
$$E_{33} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \boldsymbol{U}''_{,3} + 0{,}5\boldsymbol{U}''_{,3} \cdot \boldsymbol{U}''_{,3}. \tag{4.8}$$

Здесь векторы $\boldsymbol{U}'$, $\boldsymbol{U}''$ представляют собой отрезки рядов, аналогичные отрезкам (4.4):

$$\boldsymbol{U}' = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{N+1} [\boldsymbol{u}]^k P_k\Big) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \sum_{k=0}^{N} [\boldsymbol{u}]^k P_k\Big),$$
$$\boldsymbol{U}'' = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{N+3} [\boldsymbol{u}]^k P_k\Big) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \sum_{k=0}^{N+2} [\boldsymbol{u}]^k P_k\Big). \tag{4.9}$$

Выражения (4.8) являются аппроксимациями E_{ij} тензора деформаций Грина — Лагранжа ε_{ij} (1.3).

5. Аппроксимации граничных условий. Обозначим левую часть равенства (4.2) через L. После интегрирования получим

$$L = \int\limits_{\Sigma_\xi} [(\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{T}}'^i)(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{u}) + (\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \cdot \hat{\boldsymbol{T}}''^i_{,i})(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \delta\boldsymbol{u})]\, d\xi^2\, d\xi^3 + \int\limits_{\Sigma_\xi} [(\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{T}}'^i)(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{u}) +$$
$$+ (\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \cdot \hat{\boldsymbol{T}}''^i_{,i})(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \delta\boldsymbol{u})]\, d\xi^1\, d\xi^3 + \int\limits_{S_\xi^+} \hat{\boldsymbol{T}}^3 \cdot \delta\boldsymbol{u}\, d\xi^1\, d\xi^2 - \int\limits_{S_\xi^-} \hat{\boldsymbol{T}}^3 \cdot \delta\boldsymbol{u}\, d\xi^1\, d\xi^2. \tag{5.1}$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{T}}^3 = \hat{\boldsymbol{T}}'^3 = \hat{\boldsymbol{T}}''^3$.

Вычислим сумму первых двух интегралов в (5.1). Для этого, используя ортогональность полиномов Лежандра, заменим вектор $\delta\boldsymbol{u}$ на соответствующий отрезок ряда $\delta\boldsymbol{U}'$.

В исходной конфигурации на торцевой поверхности $\overset{0}{\Sigma}$, которой принадлежит координатная линия ξ^3, имеют место равенства

$$d\xi^1\, d\xi^3 = \overset{0}{\nu}_2\, d\overset{0}{\Sigma} / \overset{0}{J}, \qquad d\xi^2\, d\xi^3 = \overset{0}{\nu}_1\, d\overset{0}{\Sigma} / \overset{0}{J}. \tag{5.2}$$

Здесь $\overset{0}{\nu}_\alpha = \overset{0}{\boldsymbol{\nu}} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha$; $\overset{0}{\boldsymbol{\nu}}$ — внешняя нормаль к торцевой поверхности $\overset{0}{\Sigma}$.

Подставляя (5.2) в (5.1), для суммы первых двух интегралов получим

$$\int\limits_{\overset{0}{\Sigma}} \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^\alpha \cdot \delta\boldsymbol{U}'}{\overset{0}{J}}\, \overset{0}{\nu}_\alpha\, d\overset{0}{\Sigma}, \qquad \hat{\boldsymbol{T}}^\alpha = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\gamma (\hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\gamma) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 (\hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3). \tag{5.3}$$

В последних двух интегралах в (5.1), соответствующих лицевым поверхностям $\overset{0}{S}{}^+$ и $\overset{0}{S}{}^-$, преобразуем произведение $d\xi^1\, d\xi^2$: $d\xi^1\, d\xi^2 = d\overset{0}{S}{}^+ / \overset{0}{J} = -d\overset{0}{S}{}^- / \overset{0}{J}$.

Равенство (5.1) запишем в виде

$$L = \int\limits_{\overset{0}{\Sigma}} \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^\alpha \cdot \delta\boldsymbol{U}'}{\overset{0}{J}}\, \overset{0}{\nu}_\alpha\, d\overset{0}{\Sigma} + \int\limits_{\overset{0}{S}{}^+} \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^3 \cdot \delta\boldsymbol{u}}{\overset{0}{J}}\, d\overset{0}{S}{}^+ + \int\limits_{\overset{0}{S}{}^-} \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^3 \cdot \delta\boldsymbol{u}}{\overset{0}{J}}\, d\overset{0}{S}{}^-. \tag{5.4}$$

Из первого интеграла в (5.4) следует аппроксимация граничных условий (1.8), (1.9) на торцевой поверхности $\overset{0}{\Sigma}$ отрезками рядов

$$\boldsymbol{U}'\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = \boldsymbol{U}'_*, \quad \delta\boldsymbol{U}'\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = 0, \quad \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^\alpha \nu^0_\alpha}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = \boldsymbol{P}'_* \quad (\overset{0}{\Sigma}_u \cup \overset{0}{\Sigma}_\sigma = \overset{0}{\Sigma}). \tag{5.5}$$

Здесь векторы $\boldsymbol{U}'_*$, $\boldsymbol{P}'_*$ представляют собой отрезки рядов, аналогичные отрезкам (4.9), (5.3):

$$\boldsymbol{U}'_* = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \Bigg(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{N+1} [\boldsymbol{u}_*]^k P_k \Bigg) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \Bigg(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \sum_{k=0}^{N} [\boldsymbol{u}_*]^k P_k \Bigg),$$

$$\boldsymbol{P}'_* = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \Bigg(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{N+1} [\boldsymbol{p}_*]^k P_k \Bigg) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \Bigg(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \sum_{k=0}^{N} [\boldsymbol{p}_*]^k P_k \Bigg).$$

Рассмотрим лицевые поверхности $\overset{0}{S}{}^+$ и $\overset{0}{S}{}^-$. В последних двух интегралах в правой части (5.4) в качестве вариаций вектора перемещений принимается вектор $\delta\boldsymbol{U}''$, в качестве поверхностных сил — $\hat{\boldsymbol{T}}^3/\overset{0}{J}$. Поэтому на поверхностях $\overset{0}{S}{}^+_\sigma$ и $\overset{0}{S}{}^-_\sigma$ формулируются следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}^+_u} = \boldsymbol{u}_*, \qquad \delta\boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}^+_u} = 0, \qquad \boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}^-_u} = \boldsymbol{u}_*, \qquad \delta\boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}^-_u} = 0, \\ \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}^+_\sigma} = \boldsymbol{p}_*, \qquad \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}^-_\sigma} = \boldsymbol{p}_*. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Окончательно с учетом (5.5), (5.6) равенство (5.4) записывается в виде

$$L = \int\limits_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} \boldsymbol{p}'_* \cdot \delta\boldsymbol{U}'\, d\overset{0}{\sigma} + \int\limits_{\overset{0}{S}{}^+_\sigma} \boldsymbol{p}_* \cdot \delta\boldsymbol{U}''\, d\overset{0}{S}{}^+ + \int\limits_{\overset{0}{S}{}^-_\sigma} \boldsymbol{p}_* \cdot \delta\boldsymbol{U}''\, d\overset{0}{S}{}^-. \tag{5.7}$$

Таким образом, равенство (4.2) приводится к виду

$$\int\limits_{\overset{0}{V}} \tau^{ij}\delta E_{ij}\, d\overset{0}{V} = \int\limits_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} \boldsymbol{p}'_* \cdot \delta\boldsymbol{U}'\, d\overset{0}{\sigma} + \int\limits_{\overset{0}{S}{}^+_\sigma} \boldsymbol{p}_* \cdot \delta\boldsymbol{U}''\, d\overset{0}{S}{}^+ + \int\limits_{\overset{0}{S}{}^-_\sigma} \boldsymbol{p}_* \cdot \delta\boldsymbol{U}''\, d\overset{0}{S}{}^-. \tag{5.8}$$

Для введенных аппроксимаций равенство (5.8) представляет собой аналог принципа возможных перемещений (1.10). Следствием этого вариационного принципа являются уравнения равновесия (3.3) и граничные условия для напряжений (5.5), (5.6).

6. Аппроксимация закона Гука. Закон Гука (1.6) аппроксимируем в следующем виде:

$$\tau^{ij} = \overset{0}{C}{}^{ijks} E_{ks}, \tag{6.1}$$

где E_{ks} — аппроксимации (4.8) тензора деформаций Грина — Лагранжа. В соответствии с (2.3)–(2.5) коэффициенты разложений величин $\hat{\boldsymbol{t}}^i$ в ряды по полиномам Лежандра имеют вид

$$[\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2} \int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\overset{0}{C}{}^{ijks} E_{ks} \boldsymbol{G}_j P_k \, d\xi^3. \tag{6.2}$$

7. Система нелинейных уравнений N-приближения. Суммируя полученные выше результаты, запишем двумерную систему нелинейных уравнений N-приближения, включающую:

— уравнения равновесия (3.3)

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha}\cdot (\hat{\boldsymbol{T}}'^{i}_{,i} + \hat{\boldsymbol{F}}) = 0, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3}\cdot (\hat{\boldsymbol{T}}''^{i}_{,i} + \hat{\boldsymbol{F}}) = 0; \tag{7.1}$$

— уравнения закона Гука (6.1), записанные с использованием (6.2) в виде отрезков рядов (3.4):

$$\hat{\boldsymbol{T}}'^{\alpha} = \sum_{k=0}^{N+1} P_k \,\frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} \overset{0}{J}\overset{0}{C}{}^{\alpha jmn} E_{mn} \boldsymbol{G}_j P_k \, d\xi^3,$$

$$\hat{\boldsymbol{T}}''^{\alpha} = \sum_{k=0}^{N} P_k \,\frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} \overset{0}{J}\overset{0}{C}{}^{\alpha jmn} E_{mn} \boldsymbol{G}_j P_k \, d\xi^3, \tag{7.2}$$

$$\hat{\boldsymbol{T}}'^{3} = \hat{\boldsymbol{T}}''^{3} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_{\alpha} \sum_{k=0}^{N+2} \Big(P_k \,\frac{1+2k}{2}\ \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\alpha} \cdot \int_{-1}^{1} \overset{0}{J}\overset{0}{C}{}^{3jmn} E_{mn} \boldsymbol{G}_j P_k \, d\xi^3 \Big) +$$

$$+ \overset{0}{\boldsymbol{g}}_{3} \sum_{k=0}^{N+1} \Big(P_k \,\frac{1+2k}{2}\ \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3} \cdot \int_{-1}^{1} \overset{0}{J}\overset{0}{C}{}^{3jmn} E_{mn} \boldsymbol{G}_j P_k \, d\xi^3 \Big);$$

— граничные условия на лицевых поверхностях (5.6)

$$\boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}^{+}_{u}} = \boldsymbol{u}_*, \qquad \boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}^{-}_{u}} = \boldsymbol{u}_*, \qquad \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}^{+}_{\sigma}} = \boldsymbol{p}_*, \qquad \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}^{-}_{\sigma}} = \boldsymbol{p}_*. \tag{7.3}$$

Система нелинейных уравнений (7.1)–(7.3) дополняется граничными условиями на торцевых поверхностях (5.5)

$$\boldsymbol{U}'\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = \boldsymbol{U}'_*, \qquad \frac{\hat{\boldsymbol{T}}^{\alpha}\nu^0_{\alpha}}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_{\sigma}} = \boldsymbol{P}'_* \quad (\overset{0}{\Sigma}_u \cup \overset{0}{\Sigma}_{\sigma} = \overset{0}{\Sigma}),$$

$$\hat{\boldsymbol{T}}^{\alpha} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_{\gamma} (\hat{\boldsymbol{T}}'^{\alpha}\cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{\gamma}) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_{3} (\hat{\boldsymbol{T}}''^{\alpha}\cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^{3}). \tag{7.4}$$

8. Линеаризованная система уравнений N-приближения. Пусть известно решение краевой задачи (7.1)–(7.4). Наряду с данным состоянием рассмотрим возмущенное, которому соответствуют возмущенные перемещения $\tilde{\boldsymbol{U}}'$, $\tilde{\boldsymbol{U}}''$:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}' = \boldsymbol{U}' + \Delta \boldsymbol{U}', \qquad \tilde{\boldsymbol{U}}'' = \boldsymbol{U}'' + \Delta \boldsymbol{U}''. \tag{8.1}$$

Здесь векторы возмущений $\Delta \boldsymbol{U}'$, $\Delta \boldsymbol{U}''$ представляют собой отрезки рядов, аналогичные отрезкам (4.9).

Предполагая, что величины $\Delta \boldsymbol{U}'$, $\Delta \boldsymbol{U}''$ малы, уравнения для возмущенного состояния можно упростить, отбрасывая члены, нелинейные относительно возмущений. Обозначая через $\tilde{(\cdot)}$ величины, в которых оставлены только линейные составляющие возмущений $\Delta \boldsymbol{U}'$, $\Delta \boldsymbol{U}''$, получим следующие соотношения:

— для векторов ковариантного базиса возмущенного состояния

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_i = \boldsymbol{G}_i + \Delta \boldsymbol{G}_i, \qquad \Delta \boldsymbol{G}_{\alpha} = \Delta \boldsymbol{U}'_{,\alpha}, \qquad \Delta \boldsymbol{G}_3 = \Delta \boldsymbol{U}''_{,3}; \tag{8.2}$$

— для компонент тензора деформаций Грина — Лагранжа

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} + \Delta E_{ij},$$
$$2\Delta E_{\alpha\beta} = \boldsymbol{G}_\alpha \cdot \Delta \boldsymbol{U}'_{,\beta} + \boldsymbol{G}_\beta \cdot \Delta \boldsymbol{U}'_{,\alpha}, \qquad 2\Delta E_{\alpha 3} = \boldsymbol{G}_\alpha \cdot \Delta \boldsymbol{U}''_{,3} + \boldsymbol{G}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{U}'_{,\alpha}, \tag{8.3}$$
$$\Delta E_{33} = \boldsymbol{G}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{U}''_{,3};$$

— для компонент тензора напряжений τ^{ij}

$$\tilde{\tau}^{ij} = \tau^{ij} + \Delta\tau^{ij}, \qquad \Delta\tau^{ij} = \overset{0}{C}{}^{ijks}\Delta E_{ks};$$

— для коэффициентов рядов (3.4) $[\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k$

$$[\tilde{\hat{\boldsymbol{t}}}{}^i]^k = [\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k + \Delta[\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k; \tag{8.4}$$

$$\Delta[\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2}\int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}(\overset{0}{C}{}^{ijmn}(\Delta E_{mn}\boldsymbol{G}_j + E_{mn}\Delta\boldsymbol{G}_j)P_k)\,d\xi^3. \tag{8.5}$$

Если для базисных векторов $\boldsymbol{G}_j$ ввести биортогональный базис $\boldsymbol{G}^i$: $\boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{G}^i = \delta^i_j$ (δ^i_j — символ Кронекера), то можно показать, что

$$\overset{0}{C}{}^{ijmn}(\Delta E_{mn}\boldsymbol{G}_j + E_{mn}\Delta\boldsymbol{G}_j) = \tilde{C}^{ijm\alpha}(\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha})\boldsymbol{G}_j + \tilde{C}^{ijm3}(\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{U}''_{,3})\boldsymbol{G}_j,$$

где

$$\tilde{C}^{ijmn} = \overset{0}{C}{}^{ijmn} + \tau^{in}G^{mj}, \qquad G^{mj} = \boldsymbol{G}^m \cdot \boldsymbol{G}^j, \tag{8.6}$$

и выражения (8.5) привести к виду

$$\Delta[\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2}\int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}(\tilde{C}^{ijmn}(\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n)\boldsymbol{G}_j)P_k\,d\xi^3. \tag{8.7}$$

На основе соотношений (8.1)–(8.4), (8.7) проведем линеаризацию нелинейной системы уравнений (7.1)–(7.4). В результате получим линейную систему уравнений, которая включает:

— уравнения равновесия (3.3)

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \cdot (\Delta\hat{\boldsymbol{T}}'^i_{,i} + \Delta\hat{\boldsymbol{F}}) = 0, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \cdot (\Delta\hat{\boldsymbol{T}}''^i_{,i} + \Delta\hat{\boldsymbol{F}}) = 0; \tag{8.8}$$

— уравнения закона Гука (8.1), записанные в виде отрезков рядов (3.4):

$$\begin{gathered}
\Delta\hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha = \sum_{k=0}^{N+1} P_k\,\frac{1+2k}{2}\int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\tilde{C}^{\alpha jmn}(\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n)\boldsymbol{G}_j P_k\,d\xi^3,\\
\Delta\hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha = \sum_{k=0}^{N} P_k\,\frac{1+2k}{2}\int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\,\tilde{C}^{\alpha jmn}(\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n)\boldsymbol{G}_j P_k\,d\xi^3,\\
\Delta\hat{\boldsymbol{T}}'^3 = \Delta\hat{\boldsymbol{T}}''^3 = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \sum_{k=0}^{N+2}\left(P_k\,\frac{1+2k}{2}\;\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \cdot \int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\tilde{C}^{3jmn}(\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n)\boldsymbol{G}_j P_k\,d\xi^3\right) +\\
+ \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \sum_{k=0}^{N+1}\left(P_k\,\frac{1+2k}{2}\;\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \cdot \int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\tilde{C}^{3jmn}(\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n)\boldsymbol{G}_j P_k\,d\xi^3\right);
\end{gathered} \tag{8.9}$$

— уравнения граничных условий на лицевых поверхностях (5.6)

$$\Delta \boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}_u^+} = \Delta \boldsymbol{u}_*, \qquad \Delta \boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}_u^-} = \Delta \boldsymbol{u}_*, \qquad \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}_\sigma^+} = \Delta \boldsymbol{p}_*, \qquad \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}_\sigma^-} = \Delta \boldsymbol{p}_*. \tag{8.10}$$

Система линейных уравнений (8.8)–(8.11) дополняется линеаризованными краевыми условиями на торцевых поверхностях (5.5)

$$\Delta \boldsymbol{U}'\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = \Delta \boldsymbol{U}'_*, \qquad \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^\alpha \nu_\alpha^0}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = \Delta \boldsymbol{P}'_* \qquad (\overset{0}{\Sigma}_u \cup \overset{0}{\Sigma}_\sigma = \overset{0}{\Sigma}),$$
$$\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^\alpha = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\gamma (\Delta \hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\gamma) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 (\Delta \hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3). \tag{8.11}$$

Определим дифференциальный порядок системы линейных уравнений (8.8)–(8.10) аналогично [3]. В соотношения деформации — перемещения (8.3) коэффициенты ряда $\Delta \boldsymbol{U}'$ входят вместе с частными производными первого порядка относительно криволинейных координат ξ^α. Именно эти неизвестные определяют дифференциальный порядок системы уравнений, и для них задаются краевые условия на торцевой поверхности (8.11). Шесть скалярных величин, являющихся коэффициентами ряда $\Delta \boldsymbol{U}'' - \Delta \boldsymbol{U}'$, входят в систему (8.8)–(8.11) без производных. Первую группу неизвестных коэффициентов назовем основными, вторую — дополнительными. Дополнительные неизвестные определяются из уравнений (8.10), которые являются граничными условиями на лицевых поверхностях. Эти уравнения представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно дополнительных неизвестных, решая которую, находим выражения дополнительных неизвестных через основные. Подставив эти выражения в (8.9), получим формулы, связывающие вектор-функции $\Delta \hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha$, $\Delta \hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha$, $\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3$ и основные неизвестные — коэффициенты ряда $\Delta \boldsymbol{U}'$. Эти формулы представляют собой линейные формы относительно коэффициентов ряда $\Delta \boldsymbol{U}'$ и их первых производных.

Подставив выражения для $\Delta \hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha$, $\Delta \hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha$, $\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3$ в уравнения равновесия (8.8), получим систему, состоящую из $2(N+2)+1$ скалярных уравнений в частных производных второго порядка. Таким образом, имеем систему порядка $2n$ для определения n функций, где

$$n = 2(N+2) + 1. \tag{8.12}$$

Дифференциальный порядок линеаризованной системы уравнений N-приближения не зависит от вида граничных условий на лицевых поверхностях, которые могут задаваться как в напряжениях, так и в перемещениях.

Первое приближение соответствует $N = 0$. В этом случае из (8.12) следует, что $n = 5$, т. е. количество основных неизвестных равно пяти (три перемещения срединной поверхности и два угла поворота). Соответствующий дифференциальный порядок системы (8.8)–(8.10) равен десяти.

Используя результаты работы [3], для линейных задач упругого деформирования пластин можно получить систему линейных уравнений N-го приближения, которая будет совпадать с уравнениями линеаризованной системы (8.8)–(8.10). Отличие состоит в определении матрицы $\tilde{C}^{ijmn}$. Прежде всего, согласно (8.6) удовлетворяется лишь одно условие симметрии $\tilde{C}^{ijmn} = \tilde{C}^{mnij}$. Кроме того, свойства матрицы $\tilde{C}^{ijmn}$ определяются не только упругими постоянными, но и напряжениями τ^{ij}. Так, при определенных значениях τ^{ij} матрица $\tilde{C}^{ijmn}$ может не быть положительно определенной, и возникает вопрос о существовании и единственности решения линеаризованной краевой задачи (8.8)–(8.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хома И. Ю.** Обобщенная теория анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка, 1986.
2. **Иванов Г. В.** Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1980.
3. **Алексеев А. Е.** Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 137–147.

Поступила в редакцию 30/XI 2000 г.