

О РАСПАДЕ ПРОДОЛЬНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ
ПЛАЗМЫ НА ИОННО-ЗВУКОВЫЕ

В. А. Липеровский, В. Н. Цытович

(Москва)

Вопрос о нелинейной связи различных колебаний плазмы между собой привлекает в последнее время широкое внимание в силу ряда обстоятельств. Наиболее важным из них является то, что в большинстве экспериментов по пучковым неустойчивостям [1, 2] интенсивность возбуждаемых колебаний является весьма высокой, так что нелинейные эффекты взаимодействия колебаний должны быть значительными. Нужно отметить, что пучковая неустойчивость — не единственный способ генерации высокочастотных ленгмюровских колебаний плазмы. Как показано в [3], весьма интенсивные колебания могут возбуждаться также пучками поперечных волн различных диапазонов частот, в том числе — и мощными световыми пучками [4]. Наконец, возможно возбуждение ударными волнами [5] и волнами большой амплитуды, распространяющимися в плазме.

Нелинейная связь ленгмюровских и низкочастотных ионно-звуковых колебаний приводит, в частности, к генерации последних [6]. С одной стороны, это представляет интерес для проблемы турбулентного нагрева плазмы, так как поглощение ионно-звуковых колебаний в плазме является обычно более мощным, нежели ленгмюровских.

С другой стороны, ионно-звуковые колебания могут производить ускорения низкоэнергичных ионов благодаря эффектам индуцированного черенковского поглощения и излучения волн ионами, рассмотренным в работах одного из авторов [7]. Хотя ленгмюровские колебания ускоряют частицы более эффективно [8], условия инжекции в режим ускорения ленгмюровскими колебаниями являются весьма жесткими $v > v_e$. Число ионов с такой скоростью при малых температурах ионов T_i мало. Поэтому ускорение ионов будет при этом возникать в результате воздействия ионно-звуковых колебаний до тех пор, пока их скорость не достигнет значений порядка v_e . Этот вопрос представляет интерес не только для ускорения (нагрева) ионов при наличии высокочастотной турбулентности, созданной пучками заряженных частиц или при воздействии мощного излучения на плазму, но также и для проблемы нейтронного излучения мощных импульсных разрядов в плазме и ряда астрофизических задач.

Ниже рассматривается ряд одномерных самосогласованных задач о взаимодействии (из-за распадов и слияний) ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний плазмы, происходящем благодаря индуцированному комбинационному рассеянию первых на вторых. Показано, что развитие неустойчивости в турбулентной плазме с высоким уровнем возбужденных ленгмюровских колебаний приводит как к возбуждению ионно-звуковых колебаний, так и к появлению в спектре ленгмюровских колебаний сателлитов, отстоящих от основной частоты ω_0 на частоту порядка ω_{oi} и с большими интенсивностями для меньших частот. Качественное изменение спектра ленгмюровских колебаний может служить непосредственным указанием возбуждения ионно-звуковых колебаний в системе. Полученные решения позволяют проследить за процессом развития неустойчивостей. Показывается, что в плазме с высоким уровнем ионно-звуковых колебаний возбуждаются «фиолетовые» сателлиты в спектре ленгмюровских колебаний, причем интенсивности фиолетовых сателлитов имеют тенденцию к выравниванию и образованию плато по сателлитам, если уровень ионно-звуковых волн достаточно высок.

1. Плазменные волны большой интенсивности, распространяющиеся в плазме, становятся неустойчивыми относительно возбуждения ионно-звуковых волн.

Механизм неустойчивости соответствует эффектам индуцированного распада и слияния волн. Обозначим через k_1 исходное волновое число плазменных волн, k_2 и k_3 — волновые числа плазменной и ионно-звуковой волн, на которые распадается исходная волна. Законы сохранения

при распаде имеют вид

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_s, \quad \omega_{01} = \omega_{02} + \omega_s \quad (1.1)$$

Воспользуемся дисперсионным уравнением для плазменных и ионно-звуковых волн

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 &= \omega_{0e}^2 + 3v_e^2 k_1^2, & \omega_{0e}^2 &= 4\pi \frac{e^2}{m_e} n_0, & v_e &= \left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{1/2} \\ \omega_s^2 &= \frac{k_s^2 v_s^2}{1 + \lambda_e^2 k_s^2}, & v_s &= \left(\frac{T_e}{m_i}\right)^{1/2} = v_e \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}, & \lambda_e &= \frac{v_e}{\omega_0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тогда для

$$|\mathbf{k}_1| \ll 1/\lambda_e, \quad |\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| < 1/\lambda_e$$

второе уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\frac{3}{2} \frac{v_e^2}{\omega_0} (k_1^2 - k_2^2) = |\mathbf{k}_s| v_e \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \lambda_e^2 k_s^2\right) \quad (1.3)$$

Проанализируем законы сохранения (1.1) и (1.3) сначала для одномерного случая, предположив, что $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_s$ коллинеарны. Пусть для определенности $k_1 > 0$. Тогда из (1.3) видно, что $k_1 > |k_2|$, следовательно, $k_1 - k_2 = k_s > 0$ знак модуля в правой части (1.3) можно опустить, сократив уравнение на k_s и, используя (1.1), получить

$$k_s = 2(k_1 - k_0), \quad k_0 = \frac{1}{3\lambda_e} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \quad (1.4)$$

В уравнении (1.4) мы пренебрегли членом

$$k_0 \lambda_e^2 k_s^2 = k_s \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{\lambda_e k_s}{3}$$

в сравнении¹ с k_s . Волновое число $k_s > 0$, поэтому из (1.4) вытекает, что распадные процессы возможны в одномерном случае лишь при $k_1 > k_0$.

Таким образом, если в плазме имеется начальный узкий $\Delta k_1 < (2k_0/k)(k_1 - k_0)$ спектр с числом волн $N^l(k_1)$, где $k_1 > 0$, то в одномерном случае возможны распады, при которых будет генерироваться ионно-звуковой спектр с числом волн $N^s(k_s)$ и спектр-спутник плазменных волн $N^l(k_2)$, причем

$$k_s = 2(k_1 - k_0), \quad k_2 = k_1 - k_s = 2k_0 - k_1 \quad (1.5)$$

При этом, если ширина спектра $N^l(k_1)$ равна Δk_1 , то ширины спектров $N^l(k_2)$ и $N^s(k_s)$ будут равны соответственно $\Delta k_2 = \Delta k_1$, $\Delta k_s = 2\Delta k_1$. Так как $k_1 > k_0$, то из (1.5) видно, что k_2 лежит в интервале

$$-1/\lambda_e \ll k_2 < k_0$$

Если результирующий $|k_2| < k_0$, тогда дальнейшие распады и появление спутников с меньшей частотой запрещены. Отсюда, обобщая, можно легко сделать вывод, что если начальный k_1 лежит в пределах $k_0 < k_1 < 3k_0$, то может появиться только один спутник. При $3k_0 < k_1 < 5k_0$ могут быть два спутника, при $5k_0 < k_1 < 7k_0$ — три спутника и т. д. и при $(2n-1)k_0 < k_1 < (2n+1)k_0$ может появиться n красных спутников.

Если в плазме, кроме заданного начального узкого спектра с волновым числом k_1 , имеется широкий спектр ионно-звуковых шумов на достаточно высоком уровне, возможны процессы слияния, приводящие к появлению фиолетовых спутников с $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_s$, при которых $|\mathbf{k}_2| > |\mathbf{k}_1|$ и, следовательно, $\omega_2 > \omega_1$.

¹ Для вычисления $\omega_s \sim \omega_{0i}$ при $k_s \sim 2k_1 \ll 1/\lambda_e$ на пределе применимости (1.3) этот член существен.

Для этого случая анализ законов сохранения остается тем же, что и для предыдущего, если произвести замену индексов $1 \rightleftharpoons 2$.

При трехмерном рассмотрении, если \mathbf{k}_s направлен под углом θ к \mathbf{k}_1 , вместо (1.4) получим

$$|\mathbf{k}_s| = 2(k_1 \cos \theta - k_0), \quad k_1 = |\mathbf{k}_1| \quad (1.6)$$

т. е. допускаются распады, когда

$$k_1 > k_0, \quad \cos \theta > \cos \theta_{\max} = \frac{k_0}{k_1} \quad (1.7)$$

Допускаемый угол

$$\theta < \theta_{\max} = \frac{1}{2}\pi - \delta \text{ при } |\mathbf{k}_1| \leq \frac{1}{2}\lambda_e, \quad \delta = \frac{2}{3}(m_e/m_i)^{1/2}$$

При $|\mathbf{k}_1| \rightarrow k_0$ допускаются распады при $\theta \rightarrow 0$, т. е. автоматически обеспечивается одномерность. Из (1.6) видно, что при заданном \mathbf{k}_1 возможны распады с $0 < |\mathbf{k}_s(\theta)| < 2(k_1 - k_0)$, причем $0 < \theta < \theta_{\max}$. При заданных k_1 и θ легко получить

$$|\mathbf{k}_2(\theta)| = \sqrt{(|\mathbf{k}_1| - k_0)^2 + 4k_0|\mathbf{k}_1|(1 - \cos \theta)} \quad (1.8)$$

т. е. разрешаются $|\mathbf{k}_2(\theta)|$ в пределах

$$|\mathbf{k}_2(\theta_{\max})| \geq |\mathbf{k}_2(\theta)| \geq |\mathbf{k}_2(0)| \quad (1.9)$$

2. Найдем $w^{sl}(K_s, K_1, K_2)$ вероятность индуцированного поглощения волн $K_1 = \{\mathbf{k}_1, \omega_1\}$ и $K_2 = \{\mathbf{k}_2, \omega_2\}$ и излучения волны с $K_s = \{\mathbf{k}_s, \omega_s\}$. В пределе малых значений энергии ионно-звуковых волн выражение для скорости изменения этой энергии в связи с распадами плазменных волн имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\omega_s N^s(\mathbf{k}_s) d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^3} = \int \frac{d\mathbf{k}_s \omega_s}{(2\pi)^3} \left[N_1^l(\mathbf{k}_1) N_2^l(\mathbf{k}_2) \right. \\ &\quad \left. w^{sl}(K_s, K_1 - K_2) - w^{sl}(K_s, -K_1, K_2) \right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (2.1) \\ \frac{N(\mathbf{k})}{(2\pi)^3} &= \frac{1}{4\pi} E_k^2 \frac{\partial \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \end{aligned}$$

Это выражение сравнивалось с выражением, полученным во втором приближении по полю при решении кинетического уравнения для изменения энергии ионно-звуковых волн благодаря нелинейному взаимодействию между плазменными волнами

$$\frac{\partial W^s}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left\langle \mathbf{E}_s^{(2)} \frac{\partial \mathbf{D}_s^{(2)}}{\partial t} \right\rangle \quad (2.2)$$

При этом фурье-компонента

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s\mathbf{k}, \omega}^{(2)} &= \frac{4\pi i}{\omega \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})} j_{\mathbf{k}, \omega}^{(2)} \\ j_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{e\omega_0^2 k \omega}{8\pi m_e k^2 v_e^2} \int (\mathbf{E}_{k_1 \omega_1} \mathbf{E}_{k_2 \omega_2}) \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) \times \\ &\quad \times d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$

Здесь $N^l(\mathbf{k}_1)$, $N^l(\mathbf{k}_2)$ и $N^s(\mathbf{k}_s)$ — числа плазменных и ионно-звуковых волн (с волновыми числами \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_s соответственно), приходящиеся на единицу объема плазмы.

Из сравнения (2.1) и (2.2) легко получить выражение для вероятности процесса распада $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_s$ (учтя, что $\omega = \omega(\mathbf{k})$)

$$\begin{aligned} w^{sl}(K_s, K_1, -K_2) &= \\ &= \frac{e^2 \omega_s^3 m_i}{64\pi m_e^3 v_e^4 k_s^2} \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s) \delta\left(\frac{3}{2} \frac{v_e^2}{\omega_0} (k_1^2 - k_2^2) - |\mathbf{k}_s| v_s\right) \quad (2.3) \end{aligned}$$

Здесь сомножители в виде δ -функций соответствуют законам сохранения энергии и импульса при распаде. Отметим, что некоторые качественные оценки и сечения процессов распада получены в работе [9], причем последние отличаются от (2.3) на множитель $1/2 k_s^2 \lambda_e^2 = (\omega \partial \epsilon / \partial \omega)^{-1}$.

Оценим инкремент распадной неустойчивости плазменных волн на ионно-звуковые и плазменные с меньшими частотой и волновыми числами.

Для оценки по порядку величины, например инкремента генерации ионно-звуковых волн, можно воспользоваться выражением

$$\gamma^s(\mathbf{k}_s) \approx \frac{1}{N^s(\mathbf{k}_s)} \frac{\partial N^s(\mathbf{k}_s)}{\partial t} = \int N^i(\mathbf{k}_1) w^{sl}(K_s, K_1, -K_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (2.4)$$

Подставляя в (2.4) выражение для w^{sl} , получим, считая спектр $N^l(\mathbf{k}_1)$ одномерным и достаточно узким

$$\gamma^s(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_1) = \frac{\pi}{48} \frac{e^2 \omega_0}{m_e^2 v_e^3} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} N^l(\mathbf{k}_1) \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{(k_1 - k_s \cos \theta)^2}{(k_1 - k_s \cos \theta)^2 + k_s^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (2.5)$$

$$k_s = 2(k_1 \cos \theta - k_0), \quad \cos \theta = \frac{k_1 k_s}{k_1 k_s} \geq \frac{k_0}{k_1}, \quad k_1 = |\mathbf{k}_1|, \quad k_s = |\mathbf{k}_s|$$

При заданном \mathbf{k}_1 выражение в скобках имеет максимум при $\cos \theta_1 = k_0 / k_1$ и по порядку величины инкремент распадной неустойчивости несколько меньше для одномерного (в k_1 / k_0 раз), чем для трехмерного случая¹

$$\gamma_{\max}^{sl} \approx \frac{\pi}{16} \frac{e^2 \omega_0}{m_e^2 v_e^3} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} N^l(\mathbf{k}_1) \frac{k_1}{k_0} = \frac{3}{64} \omega_0 \frac{k_0}{\Delta k_0} \frac{W^l}{n m_e v_e^2} \quad (2.6)$$

где W^l — полная энергия спектра $N^l(\mathbf{k}_1)$.

Сравним теперь инкремент распадной неустойчивости с инкрементом, характеризующим перекачку по спектру неоднородных продольных волн (см. формулу (12) работы [10])

$$\gamma_{(1)}^{ll} \approx \frac{\omega_0}{(2\pi)^{5/2}} \frac{W^l}{m_e n_0 v_e^2} \left(\frac{v_e}{v_{\phi^l}} \right)^3, \quad v_{\phi^l} = \frac{\omega_0}{|\mathbf{k}_1|} \quad (2.7)$$

В результате получим

$$\frac{\gamma_{(1)}^{ll}}{\gamma_{\max}^{sl}} = \frac{64}{3 (2\pi)^{5/2}} \frac{\Delta k}{k_1} (\lambda_e k_1)^3 \quad (2.8)$$

Легко видеть, что

$$\gamma_{(1)}^{ll} / \gamma_{\max}^{sl} \ll 1 \quad \text{при } k_1 \ll 1/\lambda_e, \quad \Delta k / k_1 \ll 1$$

В одномерном случае

$$\gamma_{(2)}^{ll} = \gamma_{(1)}^{ll} (k_1 \lambda_e)^2$$

Следовательно,

$$\gamma_{(2)}^{ll} / \gamma_{\max}^{sl} = \frac{64}{(2\pi)^{5/2}} (\lambda_e k_1)^6 \frac{\Delta k_1}{k_1} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (2.9)$$

Таким образом, рассматриваемые процессы идут быстрее процессов спектральной перекачки продольных ленгмюровских волн.

Взаимодействие генерируемых звуковых колебаний между собой будет также малосущественным. Так, оценки дают, что при энергии звуковых колебаний, достигаемой в результате развития первого сателлита порядка $W^s \sim W^l \omega_s / \omega_0$ (см. п. 6), характерное время взаимодействия ионно-звуковых волн более чем в

$$(m_i / m_e)(k / \Delta k)(1 / k \lambda_e)$$

раз больше характерного времени развития рассматриваемой неустойчивости.

¹ Следует иметь в виду, что максимальный инкремент соответствует $|\mathbf{k}_s| = 0$, т. е. практически отсутствию распада.

3. Основные уравнения, описывающие взаимодействия колебаний из-за распадных процессов, могут быть найдены рассмотрением всевозможных индуцированных переходов, возникающих в плазме при наличии распадков, описываемых найденной выше вероятностью, а также обратных им процессов, вероятность которых легко найти из принципа баланса [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^s(k_s)}{\partial t} &= \int N^l(k_1) N^l(k_2) dk_1 dk_2 [w^{sl}(K_s, -K_1, K_2) + w^{sl}(K_s, K_1, -K_2)] + \\ &+ N^s(k_s) \int N^l(k_1) dk_1 \int dk_2 [w^{sl}(K_s, K_1, -K_2) - w^{sl}(K_s, -K_1, K_2)] + \\ &+ N^s(k_s) \int N^l(k_2) dk_2 \int dk_1 [w^{sl}(K_s, -K_1, K_2) - w^{sl}(K_s, K_1, -K_2)] \\ \frac{\partial N^l(k_1)}{\partial t} &= \int N^s(k_s) N^l(k_2) dk_s dk_2 [w^{sl}(K_s, K_1, -K_2) + w^{sl}(K_s, -K_1, K_2)] + \\ &+ N^l(k_1) \int N^s(k_s) dk_s \int dk_2 [-w^{sl}(K_s, K_1, -K_2) - w^{sl}(K_s, -K_1, K_2)] + \\ &+ N^l(k_1) \int N^l(k_2) dk_2 \int dk_s [w^{sl}(K_s, -K_1, K_2) - w^{sl}(K_s, K_1, -K_2)] \\ \frac{\partial N^l(k_2)}{\partial t} &= \int N^s(k_s) N^l(k_1) dk_1 dk_s [w^{sl}(K_s, -K_1, K_2) + w^{sl}(K_s, K_1, -K_1)] + \\ &+ N^l(k_2) \int N^s(k_s) dk_s \int dk_1 [-w^{sl}(K_s, -K_1, K_2) - w^{sl}(K_s, K_1, -K_2)] + \\ &+ N^l(k_2) \int N^l(k_1) dk_1 \int dk_s [w^{sl}(K_s, K_1, -K_2) - w^{sl}(K_s, -K_1, K_2)] \quad (3.1) \end{aligned}$$

Закон сохранения выполняется в виде

$$\frac{d}{dt} \left[\int N^l(k_1) \omega_{01} dk_1 + \int N^l(k_2) \omega_{02} dk_2 + \int N^s(k_s) \omega_s dk_s \right] = 0 \quad (3.2)$$

Введем одномерные функции распределения

$$\int N^l(k_1) dk_{1\perp} = (2\pi)^2 \sum_{k_{1\perp}} N^l(k_1) = (2\pi)^2 N(k_1), \quad (N^l(k_2), N_s(k_s) - \text{аналогично})$$

Ограничимся одномерным процессом, который будет развиваться, если ионно-звуковые шумы, ленгмюровские шумы, необходимые для «затравки» процесса и выхода системы на состояния неустойчивого равновесия, имеют одномерный характер.

Остановимся на вопросе о нелинейной связи двух узких спектров. Интегрируя систему (3.1) с учетом выражения для вероятности (2.3), можно свести задачу к системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^l}{\partial t} &= \alpha (N_2^l N^s - N_1^l N^s - N_1^l N_2^l), & N^l(k_1) &\equiv N_1^l \\ \frac{\partial N_2^l}{\partial t} &= -\alpha (N_2^l N^s - N_1^l N^s - N_1^l N_2^l), & N^l(k_2) &\equiv N_2^l \\ \frac{\partial N^s}{\partial t} &= -\frac{\alpha}{2} (N_2^l N^s - N_1^l N^s - N_1^l N_2^l), & N^s(k_s) &\equiv N^s \\ \alpha &= \frac{\pi e^2}{24 m_e^2 v_e^2 \hbar_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} = \frac{\omega_0^2 k_0}{32 n_0 m_e v_e^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Легко проверить, что выполняется закон сохранения

$$\frac{d}{dt} [N_1^l \omega_{01} \Delta k_1 + N_2^l \omega_{02} \Delta k_2 + N^s \omega_s \Delta k_s] = 0 \quad (3.4)$$

Система (3.3) имеет интегралы

$$N_1^l + N_2^l = A, \quad N_1^l + 2N^s = B \quad (3.5)$$

4. Рассмотрим задачу о генерации узким спектром плазменных волн N_1^l спектра звуковых N_s^s и одного красного спектра-спутника N_2^l с $|k_2| < |k_1|$, что осуществится, например, при отсутствии в начальный момент времени $t = 0$ в плазме поля ионно-звуковых волн $N^{s0} = 0$ при наличии небольшого «заправочного» числа квантов $N_2^{l0} \ll \ll N_1^{l0}$. Подставляя (3.5) в (3.3), получим, полагая $A = N_1^{l0} + N_2^{l0}$, $B = N_1^{l0}$

$$\frac{\partial N_1^l}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2} (4N_1^l - N_1^{l0}) \left(N_1^{l0} - N_1^l + \frac{2}{3} N_2^{l0} \right) \quad (4.1)$$

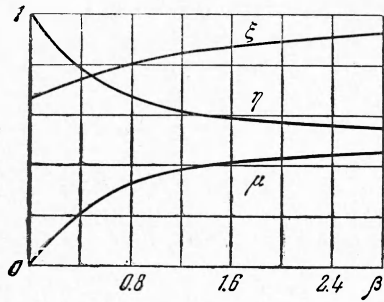
В выкладках всюду пренебрегалось N_2^{l0} по сравнению с N_1^{l0} , кроме члена во второй скобке, так как он необходим для выхода системы из состояния неустойчивого равновесия. Из выражения (4.1) видно, что в результате развития неустойчивости система двух линий придет в состояние с

$$N_1^{l\infty} = 1/4 N_1^{l0}, \quad N_2^{l\infty} = 3/4 N_1^{l0}, \quad N^{s\infty} = 3/8 N_1^{l0}$$

Решение (4.1) имеет вид

$$N_1^l(t) = N_1^{l0} \frac{N_2^{l0} + 9/2 N_1^{l0} \exp(-3/2 N_1^{l0} \alpha t)}{4N_2^{l0} + 9/2 N_1^{l0} \exp(-3/2 N_1^{l0} \alpha t)} \quad (4.2)$$

Заметим, что процесс спектрального перераспределения волн не зависит от k_1 при $k_1 \ll 1/2 \lambda_e$, при $k_1 \sim 1/2 \lambda_e$ инкремент α заменяется на $\alpha(1 + 4k_1^2 \lambda_e^2)$, т. е. перекачка замедляется. Рассмотрение процесса образования одного красного спутника оправдывается тем обстоятельством, что такой процесс является



Фиг. 1

«элементарной ячейкой» сложного процесса эволюции любого широкого одномерного спектра ленгмюровских волн при достаточно низком уровне шумов.

5. Рассмотрим задачу о росте одного фиолетового спутника N_1^l , заданного основного узкого спектра, обозначаемого теперь N_2^l при наличии в плазме высокого уровня ионно-звуковых волн. Без ограничения общности можем считать, что k_2 лежит в пределах $-1/\lambda_e \ll k_2 < k_0$, а волновое число фиолетового спутника $k_1 > k_0$. Тогда можем воспользоваться той же системой (3.3), причем для появления и роста фиолетового спутника с $k_1 = 2k_0 - k_2$ понадобится наличие в спектре $N^s(k_s)$ волн с

$$k_s = k_1 - k_2 = 2(k_0 - k_2) > 0$$

Отметим, что при $|k_2| < k_0$ возможно образование двух фиолетовых спутников (при слиянии с ионно-звуковыми волнами) одинакового с k_2 и противоположного направления. Определяя в интегралах (3.5) константы A и B в соответствии с рассматриваемой задачей

$$N_1^l + N_2^l = N_2^{l0}, \quad N_1^l + 2N^s = 2N^{s0} \quad (5.1)$$

получим далее уравнение для N_2^l , подставляя (5.1) в (3.3),

$$\frac{\partial N_2^l}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2} [4(N_2^l)^2 + N_2^l(4N^{s0} - 5N_2^{l0}) + N_2^{l0}(N_2^{l0} - 2N^{s0})] \quad (5.2)$$

При $t = 0$ выражение в квадратных скобках положительно, поэтому N_2^l начнет уменьшаться до значения $N_2^{l\infty}$. Уравнение для $\eta = N_2^{l\infty} / N_2^{l0}$, соответствующее нулю в правой части (5.2), примет вид

$$\eta^2 + \eta(\beta - 5/4) + 1/4(1 - 2\beta) = 0, \quad \beta = N^{s0}/N_2^{l0} \quad (5.3)$$

Решение

$$\eta = 1/8 [5 - 4\beta + \sqrt{(5 - 4\beta)^2 + 16(2\beta - 1)}] \quad (5.4)$$

Корень принимается с плюсом перед радикалом, так как отношение N_2^{l0}/N_2^{l0} , уменьшаясь от 1, достигает устойчивого значения η , а при $N_2^l / N_2^{l0} < \eta$ инкремент меняет знак и N_2^l далее не уменьшается; другой же корень (2.4) всегда меньше η . На фиг. 1 приведены зависимости

$$\eta = \eta(\beta), \quad \mu(\beta) = \frac{N_1^{l\infty}}{N_2^{l0}} = 1 - \eta(\beta), \quad \xi(\beta) = \frac{N^{s\infty}}{N^{s0}} = 1 - \frac{\mu(\beta)}{2\beta}$$

При $N^{s0} \gg N_2^{l0}$ практически половина кванта начального спектра переходит в фиолетовый спутник: $\eta = N_2^{l\infty} / N_2^{l0} \rightarrow 0.5$, т. е. происходит выравнивание спектров заданного и вновь образованного фиолетового. Если спектр N^s достаточно широк и далее пойдет процесс образования второго фиолетового спутника, то ясна тенденция к выравниванию их по числу волн и образованию «плато по спутникам». Так как $\mu(\beta) \rightarrow 2/3$ при $\beta \rightarrow 0$, то при достаточно малом N^{s0} лишь третья часть ионно-звуковых волн участвует в слияниях с плазменными волнами (а при больших N^{s0} еще меньшие доли). При $N^{s0} \gg N_2^{l0}$ практически можно считать N_x^s не зависящим от времени.

В заключение этого пункта отметим, что звуковые волны, ответственные за появление фиолетовых спутников, не могут автоматически образовываться при распаде N_2^l с образованием красного спутника, поскольку эти волны соответствуют разным направлениям k_s . Заметим также, что если $|k_2| > k_0$, то при наличии заданного в начальный момент соответствующего N^{s0} ограничиться рассмотрением лишь одного фиолетового спутника без образования одновременно красных возможно лишь в целях выявления хода основных процессов в сложной системе линий, эволюция которых в действительности будет описываться системой «зацепляющихся» уравнений.

6. Рассмотрим теперь процесс эволюции трех линий: одной — основной, заданной в начальный момент N_1^l , и двух — соответствующих красным спутникам N_2^l и N_3^l .

При $k_1 > 3k_0$ такой процесс, согласно законам сохранения, может осуществиться. Волновое число, соответствующее первому спутнику $k_2 = 2k_0 - k_1$, второму $k_3 = k_1 - 4k_0$.

Отметим, что при одномерном рассмотрении спектры N_1^s и N_2^s , связанные с переходами $N_1^l \rightleftharpoons N_2^l$ и $N_2^l \rightleftharpoons N_3^l$, не перекрываются, так как k_{s1} и k_{s2} разных знаков.

Анализ показывает также, что волны спектра N_1^s не могут вызвать появления еще одной линии, отличной от трех рассматриваемых, сливаясь с волнами из N_3^l даже при широком начальном спектре N_1^l .

В трехмерном случае N_1^s и N_2^s могут перекрываться при определенных углах, и картина будет более сложной. Система уравнений для процесса с двумя красными спутниками N_2^l , N_3^l и основной заданной линией N_1^l имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^l}{\partial t} &= \alpha (N_2^l N_1^s - N_1^l N_1^s - N_1^l N_2^l) \\ \frac{\partial N_2^l}{\partial t} &= -\alpha (N_2^l N_1^s - N_1^l N_1^s - N_1^l N_2^l) + \alpha (N_3^l N_2^s - N_2^l N_2^s - N_2^l N_3^l) \\ \frac{\partial N_3^l}{\partial t} &= -\alpha (N_3^l N_2^s - N_2^l N_2^s - N_2^l N_3^l), \quad \frac{\partial N_1^s}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2} (N_2^l N_1^s - N_1^l N_1^s - N_1^l N_2^l) \\ \frac{\partial N_2^s}{\partial t} &= -\frac{\alpha}{2} (N_3^l N_2^s - N_2^l N_2^s - N_2^l N_3^l) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Система (6.1) имеет три интеграла

$$\begin{aligned} N_1^l + N_2^l + N_3^l &= \text{const}_1 = N_1^{l0} \\ N_1^l + 2N_2^s &= \text{const}_2 = N_1^{l0} + 2N_1^{s0}, \quad N_3^l - 2N_2^s = \text{const}_3 = -2N_2^{s0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Будем считать, что

$$N_2^{s0} = N_1^{s0} = N^{s0} \ll N_1^{l0} \quad (\text{при } t = 0)$$

(однако необходимо $N^{s0} \neq 0$, чтобы процесс начался) величины N_2^{l0} и N_3^{l0} положим равными нулю. Используя (6.2), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2^l}{\partial t} &= \frac{\alpha}{2} [-4N_2^l (N_2^l + 2N_3^l) + N_1^{l0} (N_3^l + 3N_2^l) + 2N_1^{l0} N^{s0}] \\ \frac{\partial N_3^l}{\partial t} &= \frac{\alpha}{2} [N_3^l (3N_2^l - N_3^l) + 2N^{s0} (N_2^l - N_1^l)] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Приравняв нулю квадратные скобки, получим, что в конечном состоянии

$$N_1^{l\infty} = 2/14 N_1^{l0}, \quad N_2^{l\infty} = 3/14 N_1^{l0}, \quad N_3^{l\infty} = 9/14 N_1^{l0}, \quad N_1^{s\infty} = 6/14 N_1^{l0}, \quad N_2^{s\infty} = 9/28 N_1^{l0}$$

т. е. тенденцию к «сползанию» любого спектра продольных волн в красную сторону.

Исключив время в (6.3), получим уравнение для достаточно заметных $y_1 = N_2^l / N_1^{l0}$ и $y_2 = N_3^l / N_1^{l0}$ (т. е. пренебрегая всюду N^{s0})

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1(3 - 4y_1) + y_2(1 - 8y_1)}{y_2(3y_1 - y_2)} \quad (6.4)$$

Приближенное решение этого уравнения имеет вид (фиг. 2)

$$y_1 = 0.750 - 0.742 \left(\frac{0.004}{y_2} \right)^{1/3} - 0.952 y_2 + \frac{0.06 \cdot 0.074}{0.702 - y_1} \quad (6.5)$$

При этом начальная точка выбрана так, что $y_1^0 = y_2^0 = 0.004$.

Из вида функции $y_1(y_2)$ можно заключить, что сначала резко растет первый спутник, достигая значения

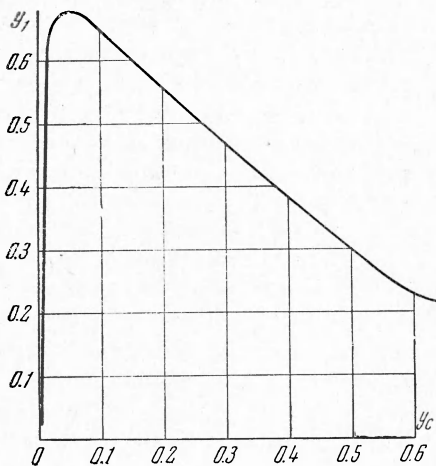
$$y_{1\max} = N_2^{l\max} / N_1^{l0} = 0.68 \text{ при } y_2 = 0.043$$

В это время рост второго ничтожен; после этого начинается уменьшение N_2^l в связи с ростом второго спутника, который становится самым интенсивным.

7. Остановимся на случае, когда начальный спектр $N^l(k_1)$ соответствует $k_1 \gg 4k_0$ и ширина $\Delta k_1 \gg 4k_0$. Математически задача представляется достаточно сложной: качественное обсуждение можно провести на основании полученных результатов.

Волны любого малого участка Δk_1 спектра $N_1^{l+}(k_1)$, соответствующие, например $k_1 > 0$, создадут спутник на участке Δk_2 с $k_2 = 2k_0 - k_1 < 0$, а последний обеспечит рост числа волн на участке вблизи $k_1 - 4k_0$. Поскольку $\Delta k_1 \gg 4k_0$, то получится следующая картина: спектр N_1^{l+} создаст спектр-спутник N_2^{l-} такой же ширины с противоположными по знаку волновыми числами. Оба спектра будут расплываться, смещаясь в сторону меньших по модулю волновых чисел (и частот). В этом процессе отдельные волны будут многократно переходить из N_1^{l+} в N_2^{l-} и наоборот, распадаясь при каждом переходе на ионно-звуковую волну и плазменную (меньшей частоты и противоположного направления), понемногу теряя свою энергию на возбуждения ионно-звуковых волн и приближаясь к значению волнового числа k_0 .

Поступила 20 VII 1964



Фиг. 2

Поступила 20 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

- Харченко И. Ф., Файнберг Я. В., Николаев Р. М. и др. Взаимодействие электронного пучка с плазмой. Ж. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 38, 3.
- Бабыкин М. В., Гаврин П. П., Завойский Е. К. и др. Новые результаты по турбулентному нагреву плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 38, № 3.
- Коврижных Л. М., Цытович В. Н. О взаимодействии интенсивного высокочастотного излучения с плазмой. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 6.
- Цытович В. Н. Нелинейная генерация плазменных волн пучком поперечных волн. Ж. техн. физ., т. 35, № 5.
- Карпман В. И., Сагдеев Р. З. Об устойчивости структуры фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме. Ж. тех. физ., 1963, т. 33, № 7.
- Федорченко В. Д., Руткевич Б. Н., Муратов В. И., Черный Б. М. Сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза». Изд-во АН УССР, 1963, № 2, стр. 133.
- Цытович В. Н. Об ускорении частиц излучением при наличии среды. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 2.
- Цытович В. Н. Ускорение излучением и вопросы генерации быстрых частиц в космических условиях. Астрон. ж., 1964, т. 41, № 1.
- Сурамышвили Г. И. О кинетике волн в плазме. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, 2.
- Гайлитис А. К., Цытович В. Н. К теории нелинейного взаимодействия поперечных и продольных плазменных волн. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1964, т. 7, № 6, стр. 1190.
- Коврижных А. М., Цытович В. Н. Об эффектах распада поперечных электромагнитных волн в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 47, № 4 (10).