

УДК 532.529

## О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВТОРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ МЕЛКИХ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

Д. А. Брацун, В. С. Теплов

Пермский государственный университет, 614600 Пермь

Исследуется тепловая конвекция в неоднородной среде, состоящей из жидкости и твердой примеси, в условиях вибраций конечной частоты. В рамках обобщенного приближения Буссинеска выводятся уравнения конвекции и рассматривается задача об устойчивости течения в вертикальном слое вязкой жидкости при горизонтальных вибрациях вдоль слоя по отношению к бесконечно малым возмущениям. Проводится сравнение с экспериментальными данными.

**Введение.** Впервые о возможности возникновения конвективной неустойчивости в системе с периодически меняющимся параметром указано в работе [1], где рассматривался плоский горизонтальный слой жидкости, подогреваемый снизу; периодическое воздействие на слой осуществлялось за счет модуляции силы тяжести. Экспериментально этот факт был подтвержден в работах [2, 3]. Можно предположить, что плоскопараллельное течение в обогреваемом сбоку вертикальном слое, устойчивость которого интенсивно исследовалась в последние десятилетия (см., например, [4]), также чувствительно к внешнему периодическому воздействию. Теоретические и экспериментальные работы, посвященные исследованию этого вопроса, практически отсутствуют. Лишь в работе [3], в которой экспериментально исследовалось влияние горизонтальных вибраций на устойчивость подъемно-опускного течения в вертикальном слое керосина ( $Pr = 26$ ), обнаружено вторичное течение, не предсказываемое теорией в высокочастотном приближении. В [3] также отмечено, что это течение появляется при частоте вибраций менее 19 Гц, и описана его структура (вертикальные валы, возникающие на фоне подъемно-опускного течения).

В то же время в ряде работ (см., например, [5–7]) показано, что мелкая тяжелая примесь при определенных условиях может оказывать существенное влияние на устойчивость и структуру течения. Целью данной работы является получение модельных уравнений для конвекции в запыленной среде в условиях вибраций конечной частоты и исследование влияния твердой примеси на устойчивость течения, а также объяснение обнаруженной в эксперименте новой моды конвекции.

**1. Постановка задачи. Вывод определяющих уравнений.** Рассмотрим течение несжимаемой вязкой жидкости в бесконечном вертикальном слое толщиной  $2h$ , на границах которого поддерживается постоянная разность температур  $2\Theta$ . Пусть начало отсчета находится в центре слоя, ось  $x$  направлена поперек слоя, а оси  $y$  и  $z$  расположены в плоскости слоя по вертикали и горизонтали соответственно. Слой жидкости находится под воздействием горизонтальных гармонических вибраций в плоскости слоя с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ , направленных вдоль единичного вектора  $\mathbf{n}$ .

Будем предполагать далее, что жидкость содержит твердую мелкодисперсную смесь. Пусть величины  $\mu$  и  $\varphi$  характеризуют соответственно долю жидкости и твердой фазы в единице объема гетерогенной смеси:  $\mu + \varphi = 1$ . Для каждого компонента среды запишем уравнения баланса массы, импульса и энергии в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \rho_f \mathbf{v}_f) &= 0, & \frac{\partial \varphi \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \rho_s \mathbf{v}_s) &= 0, \\ \mu \rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) &= -\mu \nabla p + \eta \nabla \cdot (\mu \boldsymbol{\varepsilon}) + \varphi \alpha (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) - \mu \rho_f g (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\omega t)), \\ \varphi \rho_s \left( \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_s \right) &= -\varphi \nabla p - \varphi \alpha (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) - \varphi \rho_s g (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\omega t)), \\ \mu \rho_f c_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla T_f \right) &= \varkappa \nabla \cdot (\mu \nabla T_f) + \varphi \zeta (T_s - T_f), & \varphi \rho_s c_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla T_s \right) &= -\varphi \zeta (T_s - T_f), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s$  — скорости компонентов смеси (здесь и далее величины с индексом  $f$  относятся к жидкой фазе, а величины с индексом  $s$  — к твердой);  $T_f, T_s$  — температуры жидкой и твердой фаз;  $\rho_f, \rho_s$  и  $c_f, c_s$  — плотности и теплоемкости жидкой и твердой фаз соответственно;  $\varkappa$  — коэффициент теплопроводности жидкости;  $\alpha, \zeta$  — коэффициенты трения и теплообмена между фазами;  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор, направленный по оси  $y$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор вязких напряжений;  $A = a\omega^2/g$  — параметр перегрузки. Будем предполагать, что взаимодействие между фазами происходит по закону Стокса, а теплообмен — по закону Фурье:

$$\alpha = 6\pi r\eta/V, \quad \zeta = 4\pi r\varkappa/(Vc_f),$$

где  $r$  и  $V$  — характерный размер и объем частицы соответственно.

Как правило, изучение конвективных течений проводится на основе приближения Буссинеска, когда отклонения плотности среды от среднего значения предполагаются настолько малыми, что ими можно пренебречь всюду, за исключением члена с подъемной силой в уравнении движения. При этом принимается простейшее уравнение состояния  $\rho = \rho_0(1 - \beta T)$ , где  $\beta$  — коэффициент объемного расширения жидкости. Формально уравнения в приближении Буссинеска могут быть получены как результат предельного перехода при устремлении параметра температурной неоднородности  $\beta\Theta$  к нулю, а числа Галилея  $\text{Ga} = gh^3/\nu^2$  — к бесконечности. При этом их произведение  $\beta\Theta \text{Ga} = \text{Gr}$  (число Грасгофа) остается конечным.

Следуя подходу, подробно изложенному в работе [5] для стационарного случая, получим обобщенные уравнения Буссинеска, предполагая, что характерный размер частиц мал по сравнению с характерным размером полости. Таким образом, в задаче появляется еще один асимптотический параметр  $r/h$ . Поля плотности, давления и температуры представим в виде суммы постоянных средних значений  $\rho_{f0}, p_0, T_{f0}, T_{s0}$  и малых отклонений от них  $\rho_f, p, T_f, T_s$ , причем изменениями плотности твердой примеси за счет теплового расширения материала будем пренебрегать. Собирая члены одного порядка малости в (1), в нулевом порядке получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}_f) &= 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}_s) &= 0, \\ 0 &= -\mu \nabla p_0 + \varphi \alpha (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) - \rho_{f0} \mu g (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\omega t)), \\ 0 &= -\varphi \nabla p_0 - \varphi \alpha (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) - \rho_{s0} \varphi g (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\omega t)), \\ 0 &= \varphi \zeta (T_s - T_f), & 0 &= -\varphi \zeta (T_s - T_f). \end{aligned} \quad (2)$$

Исключая из системы (2) среднее давление, получим соотношение между скоростями твердых частиц и жидкости

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f - \frac{\mu g}{\alpha} (\rho_{s0} - \rho_{f0})(\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\omega t)), \quad (3)$$

которое в следующем порядке разложения позволяет перейти к одножидкостной модели. Ограничимся рассмотрением следующего предельного случая: частицы будем считать тяжелыми ( $D \rightarrow \infty$ ), а их объемную концентрацию — малой ( $\varphi \rightarrow 0$ ), так что массовая концентрация примеси  $\xi = \varphi D$  остается конечной. В качестве единицы измерения длины выберем  $h$ , времени —  $h^2/\nu$ , скорости —  $\nu/h$ , температуры —  $\Theta$ , давления —  $\rho_{f0}\nu^2/h^2$ . Тогда безразмерные уравнения конвекции принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (1 + \xi) \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f \right) &= \\ &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v}_f + \text{Gr} T_f (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\Omega t)) + S \xi (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\Omega t)) \cdot \nabla \mathbf{v}_f - S \xi A \Omega \mathbf{n} \sin(\Omega t), \\ (1 + B \xi) \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) T_f \right) &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T_f + S B \xi (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\Omega t)) \cdot \nabla T_f, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \xi &= S (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\Omega t)) \cdot \nabla \xi, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0, \\ \mathbf{v}_s &= \mathbf{v}_f - S (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n} A \cos(\Omega t)), \quad T_s = T_f. \end{aligned} \quad (4)$$

В задаче имеется семь безразмерных параметров:  $\text{Gr} = g\beta\Theta h^3/\nu^2$ ,  $\text{Pr} = \nu/\chi$ ,  $A = a\omega^2/g$ ,  $\Omega = \omega h^2/\nu$ ,  $S = \delta(D-1) \text{Ga} r^2/h^2$ ,  $D = \rho_{s0}/\rho_{f0}$ ,  $B = c_s/c_f$  — число Грасгофа, число Прандтля, амплитуда и частота вибраций, параметр двухфазной среды, отношения плотностей и теплоемкостей фаз соответственно. Отметим, что ни один из них не совпадает с асимптотически большими или малыми параметрами  $\text{Ga}$ ,  $\beta\Theta$ ,  $D$  или  $r/h$ , что свидетельствует о корректности подхода. Это отличает данную модель от модели, предложенной, например, в работе [8], которая в этом смысле не является моделью Буссинеска.

**2. Основное течение.** Ограничимся рассмотрением такой ситуации, при которой концентрация примеси не зависит от координат:  $\xi = \xi_0$ . В этом случае систему уравнений (4) можно существенно упростить. В уравнении движения слагаемое, пропорциональное  $\sin(\Omega t)$ , становится потенциальным, и его можно исключить из рассмотрения путем перенормировки давления. Учитывая условия на границах

$$\mathbf{v}_f = 0, \quad T_f = \mp 1 \quad \text{при} \quad x = \pm 1, \quad (5)$$

найдем основное состояние системы, устанавливающееся при достаточно малых значениях параметров  $\text{Gr}$ ,  $A$ ,  $\Omega$ . Считая течение плоскопараллельным, будем искать решение в виде  $\mathbf{v}_{f0} = \mathbf{V}(0, V_y(x), V_z(x, t))$ ,  $T_f = T_0(x)$ . Тогда для  $y$ -компоненты скорости и температуры получим решение в виде

$$V_y = \frac{1}{6} \text{Gr} (x^3 - x), \quad T_0 = -x, \quad (6)$$

а  $z$ -компонента основного течения имеет более сложный вид:

$$V_z = \text{Re} \left( i \frac{\text{Gr} A}{\Omega(1 + \xi_0)} \left( x - \text{sh} \sqrt{\frac{(1 + \xi_0)\Omega}{2}} (1 + i)x / \left( \text{sh} \sqrt{\frac{(1 + \xi_0)\Omega}{2}} (1 + i) \right) \right) \exp(i\Omega t) \right). \quad (7)$$

Решение вида (7) впервые получено в работе [9], где такое пульсирующее с конечной частотой течение возникало в плоском слое в условиях невесомости. Отметим, однако, что течение с кубическим профилем скорости (6), которое возникает в вертикальном слое

за счет силы тяжести, оказывает существенное влияние на вибрационную компоненту течения, на что указывает присутствие числа Грасгофа в выражении (7).

Из (7) следует, что компонента  $V_z$  вносит существенный вклад в основное течение только при достаточно низких частотах вибраций:  $\Omega \ll 1$ . В этом случае выражение (7) практически совпадает с выражением (6) для  $y$ -компоненты скорости основного течения и может быть представлено в виде  $V_z \approx (1/6) \text{Gr} A(x^3 - x) \cos(\Omega t)$ . Правая часть этого выражения описывает медленное периодическое изменение кубического профиля скорости. При  $\Omega \rightarrow \infty$   $V_z \rightarrow 0$ . Таким образом, управляющим параметром задачи, по сути, является комплекс  $A_g = \text{Gr} A$ .

**3. Спектрально-амплитудная задача.** Рассмотрим устойчивость основного течения (6), (7) по отношению к бесконечно малым возмущениям. Основываясь на данных из работы [3], будем пренебрегать зависимостью всех полей, описывающих критические возмущения, от вертикальной координаты ( $\partial/\partial y = 0$ ). Получим

$$(1 + \xi_0) \left( \frac{\partial v_{fy}}{\partial t} + V_z \frac{\partial v_{fy}}{\partial z} + v_{fx} \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = \Delta_{xz} v_{fy} + \text{Gr} T + AS\xi_0 \cos(\Omega t) \frac{\partial v_{fy}}{\partial z}; \quad (8)$$

$$(1 + \xi_0) \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + V_z \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial z} + v_{fx} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \right) = -\nabla p + \Delta_{xz} \mathbf{v}_f + A_g \left( T \mathbf{n} + \frac{S\xi_0}{\text{Gr}} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial z} \right) \cos(\Omega t),$$

$$(1 + B\xi_0) \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + V_z \frac{\partial T_f}{\partial z} + v_{fx} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta_{xz} T_f + ASB\xi_0 \cos(\Omega t) \frac{\partial T_f}{\partial z}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_{fx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{fz}}{\partial z} = 0,$$

где  $\Delta_{xz} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ ;  $\mathbf{v} = (v_{fx}, v_{fz})$ . Из системы (8), (9) следует, что задача нахождения  $y$ -компоненты возмущения (8) может быть решена независимо, если известны функции  $v_{fx}$ ,  $T_f$ . Оставшиеся уравнения (9) можно преобразовать следующим образом. Перейдем в новую систему отсчета, так чтобы исключить параметр  $S$  из уравнения движения, и произведем перемасштабирование параметров и переменных:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z + \frac{S\xi_0 A}{\Omega(1 + \xi_0)} \sin(\Omega t), & \bar{x} &= x, & \bar{t} &= \frac{t}{1 + \xi_0}, & \bar{T} &= \frac{T_f}{1 + \xi_0}, \\ \bar{\text{Pr}} &= \text{Pr} \frac{1 + B\xi_0}{1 + \xi_0}, & \bar{S} &= S \frac{\xi_0(B - 1)A}{1 + B\xi_0}, & \bar{A}_g &= A_g(1 + \xi_0), & \bar{\Omega} &= \Omega(1 + \xi_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Вводя функцию тока, получим (черта оставлена только над параметрами):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} &= \Delta^2 \Psi - V_z \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \bar{A}_g \cos(\bar{\Omega} t) \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{\bar{\text{Pr}}} \Delta T - V_z \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \bar{S} \cos(\bar{\Omega} t) \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вследствие преобразования (10) количество безразмерных параметров, определяющих устойчивость основного течения, свелось к четырем:  $\bar{A}_g$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{\text{Pr}}$ ,  $\bar{\Omega}$ . Будем рассматривать лишь нормальные возмущения вида  $\Psi(x, z, t) = \varphi(x, t) \exp(ikz)$ ,  $T(x, z, t) = \theta(x, t) \exp(ikz)$ , где  $k$  — волновое число вдоль оси  $z$ . В результате для определения  $\varphi$  и  $\theta$  получим спектрально-амплитудную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} &= \Delta^2 \varphi - ik \left( V_z \Delta \varphi - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \varphi \right) + \bar{A}_g \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\bar{\Omega} t), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\bar{\text{Pr}}} \Delta \theta - ik(V_z \theta + \varphi - \bar{S} \theta \cos(\bar{\Omega} t)); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1, \quad (13)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 - k^2$ .

**4. Численное решение.** Спектрально-амплитудная задача (12), (13) решалась численно с помощью метода Галёркина. Искомые амплитуды  $\varphi$  и  $\theta$  представлялись в виде разложений по базисным функциям  $\Phi_n(x)$ ,  $\Theta_n(x)$

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{N/2} a_n(t) \Phi_n(x), \quad \theta(x, t) = \sum_{n=0}^{N/2} b_n(t) \Theta_n(x), \quad (14)$$

удовлетворяющим граничным условиям (13):

$$\Phi_n = \begin{cases} \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch} k} - \frac{\cos(\sqrt{\mu_n - k^2} x)}{\cos \sqrt{\mu_n - k^2}}, \\ \frac{\text{sh}(kx)}{\text{sh} k} - \frac{\sin(\sqrt{\mu_n - k^2} x)}{\sin \sqrt{\mu_n - k^2}}, \end{cases} \quad \Theta_n = \begin{cases} \cos(\rho_n x), & n = 0, 2, 4, \dots, \\ \sin(\rho_n x), & n = 1, 3, 5, \dots, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\mu_n$  и  $\rho_n$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu_n - k^2} \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n - k^2} &= k(-\operatorname{th} k), & n = 0, 2, 4, \dots, \\ \sqrt{\mu_n - k^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\mu_n - k^2} &= k \operatorname{cth} k, & n = 1, 3, 5, \dots, \end{aligned} \quad \rho_n = \frac{\pi}{2} (n + 1).$$

Подставляя разложения (14) в уравнение (12) и используя условия ортогональности метода Галёркина, для амплитуд  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$  получим следующую систему  $N$  линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} &= -\mu_n a_n - ik \sum_m A_{nm} a_m + \bar{A}_g \sum_m B_{nm} b_m \cos(\bar{\Omega} t), & n = 0, \dots, N/2, \\ \frac{db_n}{dt} &= -\rho_n b_n - ik \sum_m C_{nm} b_m - ik \sum_m D_{nm} a_m + ik \bar{S} b_n \cos(\bar{\Omega} t), \end{aligned} \quad (16)$$

где коэффициенты  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $C_{nm}$ ,  $D_{nm}$  являются периодическими функциями времени и зависят от параметров  $k$ ,  $\bar{A}_g$ ,  $\bar{\Omega}$ .

Для нахождения границ устойчивости системы (16) использовался метод Флоке. Построение матрицы монодромии, т. е. интегрирование системы (16) для  $N$  линейно независимых начальных условий на отрезке от  $t = 0$  до  $t = 2\pi/\bar{\Omega}$ , производилось методом Рунге — Кутты — Фельберга 4–5-го порядка. Для вычисления мультипликаторов использовалась соответствующая подпрограмма из стандартной библиотеки IMSL, основанная на QR-алгоритме. В процессе вычислений находились такие значения управляющих параметров, при которых хотя бы один мультипликатор выходил на единичную окружность. Это значение и соответствует нейтральной кривой. Чтобы избежать зависимости результатов от числа базисных функций, удерживаемых в разложениях (14), особое внимание было уделено сходимости результатов. В определенных диапазонах параметров алгоритм решения задачи включал автоматическое увеличение числа базисных функций до тех пор, пока добавление новых функций меняло результат вычислений менее чем на 0,1%. Таким образом определялось минимальное количество мод  $N^*$ , необходимое для достижения “насыщения”. Основные вычисления в дальнейшем производились при этом фиксированном числе мод  $N^*$ . Например, установлено, что если в случае однородной среды ( $\bar{S} = 0$ ) для достижения состояния “насыщения” требуется от 15–20 мод при высоких частотах

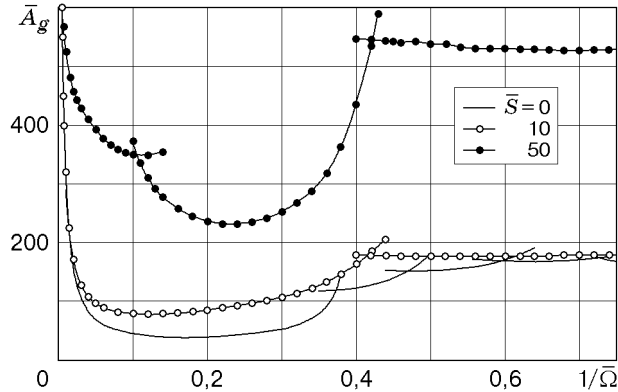


Рис. 1

( $10 < \bar{\Omega} < 1000$ ) до 25–30 мод при низких частотах ( $\bar{\Omega} < 10$ ), то для неоднородной среды ( $\bar{S} \neq 0$ ) эти значения существенно увеличивались: 30–35 мод при высоких частотах и 60–70 мод при низких частотах. В последнем случае такое большое число удерживаемых в разложении базисных функций связано с осцилляциями промежуточных результатов вычислений вблизи предельного значения.

Все вычисления выполнены при фиксированном значении числа Прандтля  $\bar{Pr} = 26$ , которое соответствует керосину Т-1, использованному в качестве рабочей жидкости в работе [3]. На рис. 1 на плоскости  $(1/\bar{\Omega}, \bar{A}_g)$  представлены нейтральные кривые, разделяющие область устойчивости и область параметрического возбуждения вторичного течения при различных значениях параметра  $\bar{S}$ . Как показано на рис. 1, добавка твердой примеси к пульсирующему течению стабилизирует его по отношению к возмущениям, рассмотренным в настоящей работе.

Следует отметить, что все наиболее “опасные” возмущения при  $\bar{S} = 0$  относятся к “целому” типу, т. е. частота их осцилляций совпадает с частотой внешнего воздействия. Такой же результат получен в работе [9], которая по постановке задачи близка к данной работе. Факт существования только “целых” возмущений, вероятно, объясняется симметрией задачи. Как сами уравнения (11), так и основное течение (7) инвариантны по отношению к следующему преобразованию:

$$S_{xz}(\Psi(x, z), T(x, z)) = (\Psi(-x, -z), -T(-x, -z)). \quad (17)$$

Таким образом, в фазовом пространстве системы основное состояние представляет собой цикл, заключенный внутри инвариантного подпространства, определяемого преобразованием (17). При этом ветвление решений может происходить как внутри подпространства, так и в направлении, трансверсальном ему. В последнем случае в ситуациях общего положения, как известно из теории бифуркаций, всегда ответвляется пара периодических решений с частотой, близкой к частоте колебаний исходного цикла. Особенность исследуемой системы заключается в том, что ответвление решений внутри плоскости (по крайней мере, мягкое) невозможно. Чтобы это показать, запишем динамическую систему (16) в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_n^{even} &= -\mu_n a_n^{even} - ik \sum_m A_{nm} a_m^{odd} + \bar{A}_g \sum_m B_{nm} b_m^{odd} \cos(\bar{\Omega}t), \\ \frac{d}{dt} a_n^{odd} &= -\mu_n a_n^{odd} - ik \sum_m A_{nm} a_m^{even} + \bar{A}_g \sum_m B_{nm} b_m^{even} \cos(\bar{\Omega}t), \\ \frac{d}{dt} b_n^{even} &= -\rho_n b_n^{even} - ik \sum_m C_{nm} b_m^{odd} - ik \sum_m D_{nm} a_m^{even}, \end{aligned}$$

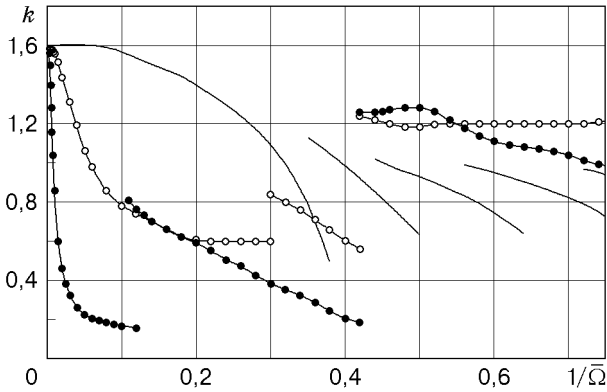


Рис. 2

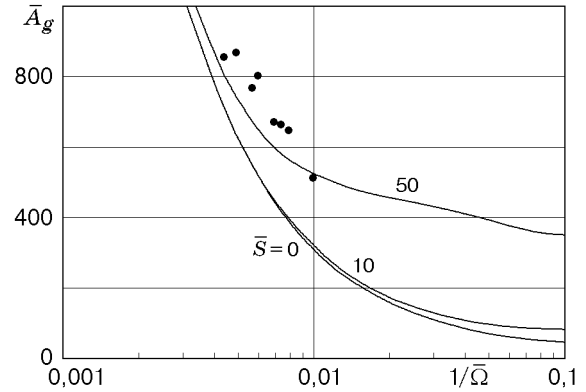


Рис. 3

$$\frac{d}{dt} b_n^{odd} = -\rho_n b_n^{odd} - ik \sum_m C_{nm} b_m^{even} - ik \sum_m D_{nm} a_m^{odd},$$

где индексы *even* и *odd* обозначают соответственно амплитуды четных и нечетных мод. Преобразование симметрии (17) приобретает следующий вид:

$$a_n^{even} \rightarrow (a_n^{even})^*, \quad a_n^{odd} \rightarrow -(a_n^{odd})^*, \quad b_n^{even} \rightarrow -(b_n^{even})^*, \quad b_n^{odd} \rightarrow (b_n^{odd})^*,$$

где “\*” означает комплексное сопряжение. Для того чтобы рассматривать лишь возмущения внутри инвариантной плоскости, антисимметричные амплитуды положим равными нулю:  $a_n^{odd} = b_n^{even} = 0$ . Получим

$$\frac{da_n^{even}}{dt} = -\mu_n a_n^{even} + \bar{A}_g \sum_m B_{nm} b_m^{odd} \cos(\bar{\Omega}t), \quad \frac{db_n^{odd}}{dt} = -\rho_n b_n^{odd}.$$

Отсюда следует, что все возмущения такого типа затухают. В случае неоднородной среды преобразование симметрии (17) невозможно. Это означает, что всякие ограничения на тип бифуркации исчезают. Действительно, в этом случае при численном исследовании обнаружены как “получелые”, так и квазипериодические решения. Окончательный ответ на этот вопрос может дать лишь исследование задачи в нелинейной постановке.

На рис. 2 для различных значений параметра  $\bar{S}$  представлены минимальные значения волнового числа возмущений (обозначения те же, что на рис. 1). Из рис. 2 следует, что твердая примесь значительно уменьшает волновое число при высоких частотах вибраций и, наоборот, увеличивает при низких частотах.

Следует отметить, что хотя при появлении твердой примеси в жидкости критическое возмущение становится неперриодическим, при больших значениях частоты отклонения от “целого” типа настолько малы, что с практической точки зрения интереса не представляют.

**5. Сравнение с экспериментом.** На рис. 3 представлены результаты расчетов, полученные в данной работе, и экспериментальные данные из работы [3]. Теоретическая кривая построена для минимальных значений волнового числа. Как показано на рис. 3, результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными (в эксперименте неустойчивость основного течения “целого” типа фиксировалась также выше нейтральной кривой).

Авторы выражают благодарность Д. В. Любимову и Б. Л. Смородину за плодотворное обсуждение данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 5. С. 779–783.
2. Putin G. F., Zavarykin M. P., Zorin S. V., Zyuzgin A. V. Heat and mass transfer in the variable inertia field // Proc. of the 8th Europ. symp. on materials and fluid sciences in microgravity, Brussels, Belgium, 12–16 Apr. 1992. L.: ESA Publ. Division, 1992. P. 99–102.
3. Зюзгин А. В., Путин Г. Ф. Устойчивость подъемно-опускного течения в вертикальном слое жидкости под воздействием высокочастотных вибраций // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1998. Вып. 1. С. 130–141.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
5. Любимов Д. В., Брацун Д. А. Об уравнениях конвекции в запыленной среде // Вестн. Перм. ун-та. Физика. 1998. Вып. 2. С. 15–29.
6. Lyubimov D. V., Bratsun D. A., Lyubimova T. P., Roux V. Influence of gravitational precipitation of solid particles on thermal buoyancy convection // Adv. Space Res. 1998. V. 22, N 8. P. 1267–1270.
7. Брацун Д. А., Зюзгин А. В., Путин Г. Ф. Об устойчивости конвективного движения в запыленной среде // Устойчивость течений гомогенных и гетерогенных жидкостей: Тр. V Междунар. семинара, Новосибирск, 22–24 апр. 1998 г. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. архит.-строит. ун-та, 1998. Ч. 1. С. 28–36.
8. Гершуни Г. З., Келлер И. О., Смородин Б. Л. О вибрационно-конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости при конечных частотах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 5. С. 44–51.
9. Дементьев О. Н. Конвективная устойчивость среды, содержащей тяжелую твердую примесь // ПМТФ. 1976. № 3. С. 105–115.

*Поступила в редакцию 9/VI 1999 г.,  
в окончательном варианте — 8/II 2000 г.*

---