

**ВЯЗКОЕ ТРЕНИЕ И ТЕПЛОВЫЙ ПОТОК ПРИ ТЕЧЕНИИ  
ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ СРЕДЫ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ  
С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА**

*Э. Г. Сахновский (Ленинград)*

В работах [1, 2] в предположении малости магнитного числа Рейнольдса получены точные выражения для стационарной комплексной скорости  $v(z) = u_x - iu_y$  и температуры  $T(z)$  ионизованной среды, движущейся между параллельными пластинами под влиянием постоянного перепада давлений  $P_x$  в сильном поперечном однородном магнитном поле  $B_z \equiv B_0$ . Высота канала  $2a$ , стенки поддерживаются при постоянной температуре  $T(\pm a) = 0$ , внешнее электрическое поле отсутствует.

Среда предполагается несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ) и степень ее ионизации постоянной ( $s = \text{const}$ ).

Тогда для напряжений вязкого трения будем иметь

$$\tau^2 = \pi_{xz}^2 + \pi_{yz}^2. \quad (1)$$

Здесь компоненты тензора вязких напряжений  $\pi_{xz}$  и  $\pi_{yz}$  имеют вид [3]

$$\pi_{xz} = -\eta^{(2)} \frac{\partial u_x}{\partial z} - \eta^{(4)} \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \pi_{yz} = -\eta^{(2)} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \eta^{(4)} \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (2)$$

Выражения для коэффициентов вязкости  $\eta^{(2)}$  и  $\eta^{(4)}$  приведены в работе [1].

Подставляя (2) в (1) и переходя к безразмерному виду, выбирая в качестве масштабов  $\tau$ ,  $u$  и  $z$  соответственно  $1/2\rho U_0^2$ ,  $U_0$  и  $a$ , будем иметь для квадрата местного коэффициента вязкого трения

$$c_f^2 = \frac{4\tau^2}{\rho^2 U_0^4} = \frac{4}{R^{(c)2}} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{1 + 4/9 (\omega_i \tau_i \theta)^2 (\eta_a / \eta^{(c)})^2}{1 + 4/9 (\omega_i \tau_i \theta)^2} \left( R^{(c)} = \frac{U_0 a \rho^2}{\eta^{(c)}} \right) \quad (3)$$

Здесь  $R^{(c)}$  — число Рейнольдса,  $\eta^{(c)}$  и  $\eta_a$  — коэффициенты вязкости частично ионизованной среды в целом и «изолированных» нейтралов в случае, когда магнитное поле равно нулю [3]. Безразмерный параметр  $\omega_i \tau_i \theta$  характеризует анизотропию коэффициентов вязкости ( $\omega_i$  — циклотронная частота ионов,  $\tau_i \theta$  связано со временем всевозможных столкновений ионов).

Отделяя в выражении для стационарной скорости вещественную и мнимую части и подставляя в (3), окончательно получим для коэффициента поверхностного трения на верхней стенке ( $z = 1$ )

$$\frac{1}{P_x^2} c_{f+}^2 = \frac{4 (\Delta_1^{*2} + \Delta_2^{*2}) (r_1^2 + r_2^2) (\text{th}^2 r_1 + \text{tg}^2 r_2) [1 + 4/9 (\omega_i \tau_i \theta)^2 (\eta_a / \eta^{(c)})^2]}{M^{(c)4} (1 + \text{th}^2 r_1 \text{tg}^2 r_2) [1 + 4/9 (\omega_i \tau_i \theta)^2]} \quad (4)$$

$$\Delta_1^* = 1 + \frac{2(1-s)^2}{1+Zs} \omega_i \tau_{ia} \omega_e \tau_0, \quad \Delta_2^* = \frac{\omega_e \tau_0}{1+Zs}, \quad r_{1,2} = \left( \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \pm m_1}{2(m_1^2 + m_2^2)} \right)^{1/2} \quad (5)$$

$$m_1 = \frac{1}{M^{(c)2} [1 + 4/9 (\omega_i \tau_i \theta)^2]} \left[ 1 + \frac{4}{9} (\omega_i \tau_i \theta)^2 \frac{\eta_a}{\eta^{(c)}} - \frac{2}{3} \omega_e \tau_0 \omega_i \tau_i \theta \left( 1 - \frac{\eta_a}{\eta^{(c)}} \right) + \right. \\ \left. + 2(1-s) \omega_e \tau_0 \omega_i \tau_{ia} \left( 1 + \frac{4}{9} (\omega_i \tau_i \theta)^2 \frac{\eta_a}{\eta^{(c)}} - \frac{\eta_i^{(c)}}{\eta^{(c)}} \right) \right] \\ m_2 = \frac{1}{M^{(c)2} [1 + 4/9 (\omega_i \tau_i \theta)^2]} \left\{ \omega_e \tau_0 \left[ 1 + \frac{4}{9} (\omega_i \tau_i \theta)^2 \frac{\eta_a}{\eta^{(c)}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \omega_i \tau_i \theta \left[ 1 - \frac{\eta_a}{\eta^{(c)}} + 2(1-s) \omega_i \tau_{ia} \omega_e \tau_0 \left( 1 - \frac{\eta_a}{\eta^{(c)}} - \frac{\eta_i^{(c)}}{\eta^{(c)}} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

$$M^{(c)} = B_0 a \left( \frac{\sigma_0}{\eta^{(c)}} \right)^{1/2} \quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{ea}}$$

Здесь  $M^{(c)}$  — число Гартмана,  $\sigma_0$  — проводимость среды,  $\eta_i^{(c)}$  — коэффициент вязкости ионов  $B_0 = 0$ ,  $Z$  — зарядовое число,  $\omega_e$  — циклотронная частота электронов,  $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$  — эффективная частота столкновений частиц  $\alpha$ - и  $\beta$ -сортов.

Заметим, что входящие в (4) отношения  $\eta_a / \eta^{(c)}$  и  $\eta_i^{(c)} / \eta^{(c)}$  существенно зависят от степени ионизации  $s$ . Установление этой зависимости требует специального

исследования, однако для крайних случаев слабо ионизированной и полностью ионизированной среды нетрудно получить [3]

$$(\eta_a / \eta^{(0)})_{s=1} = (\eta_i^{(0)} / \eta^{(0)})_{s \ll 1} = 0, \quad (\eta_a / \eta^{(0)})_{s \ll 1} = (\eta_i^{(0)} / \eta^{(0)})_{s=1} = 1 \quad (7)$$

Тепловой поток на верхнюю пластину, в силу геометрии задачи (перенос тепла осуществляется вдоль магнитного поля), имеет такой же вид, как в изотопной магнитной гидродинамике

$$q_z^w = -\lambda^T \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=a} \quad (8)$$

причем  $\lambda^T$  — коэффициент теплопроводности среды в отсутствие магнитного поля [7]. Влияние магнитного поля на тепловой поток поэтому осуществляется только через температурный градиент. Выражение для последнего нетрудно получить из формулы для стационарной температуры, найденной в работе [2]. Выполнив необходимые преобразования, будем иметь в безразмерном виде

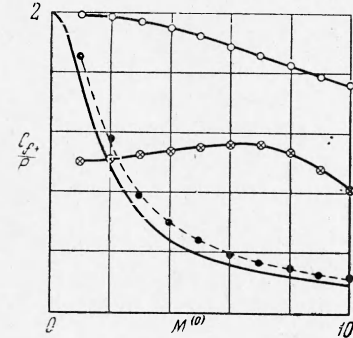
$$\left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=1} = \left( \frac{dT_\eta}{dz} \right)_{z=1} + \left( \frac{dT_\sigma}{dz} \right)_{z=1}; \quad (9)$$

$$\frac{-1}{\gamma P_x^2 R^{(0)2} N_{Pr}^{(0)}} \left( \frac{dT_\eta}{dz} \right)_{z=1} = \left( N_{Pr} = \frac{\eta^{(0)} c_{pa}}{\lambda^T}, \quad \gamma = \frac{U_0^2}{c_{pa} T^*} \right) \\ = \frac{(\Delta_1^{*2} + \Delta_2^{*2})(r_1^2 + r_2^2) [1 + 4/9 (\omega_i \tau_i \theta)^2 \eta_a / \eta^{(0)}]}{4M^{(0)4} (\text{ch}^2 r_1 \cos^2 r_2 + \text{sh}^2 r_1 \sin^2 r_2) [1 + 4/9 (\omega_i \tau_i \theta)^2]} \left( \frac{\text{sh} 2r_1}{r_1} - \frac{\sin 2r_2}{r_2} \right) \quad (10)$$

$$\frac{-1}{\gamma P_x^2 R^{(0)2} N_{Pr}^{(0)}} \left( \frac{dT_\sigma}{dz} \right)_{z=1} = \frac{\Delta_1^{*2}}{M^{(0)2}} + \\ + \frac{1}{2M^{(0)2} (\text{ch}^2 r_1 \cos^2 r_2 + \text{sh}^2 r_1 \sin^2 r_2)} \{ \text{sh} 2r_1 [r_1 (m_2 \Delta_2^* - m_1 \Delta_1^*) - r_2^* (m_2 \Delta_1^* + m_1 \Delta_2^*)] - \\ - \sin 2r_2 [r_1 (m_2 \Delta_1^* + m_1 \Delta_2^*) + r_2 (m_2 \Delta_2^* - m_1 \Delta_1^*)] \} + \frac{4!}{\gamma P_x^2 R^{(0)2} N_{Pr}^{(0)}} \left( \frac{dT_\tau}{dz} \right)_{z=1} \quad (11)$$

Значками  $\eta$  и  $\sigma$  обозначены части градиента, характеризующие вязкую диссипацию и джоулев нагрев на верхней стенке,  $N_{Pr}^{(0)}$  — число Прандтля,  $c_{pa}$  — теплоемкость единицы массы нейтралов,  $T^*$  — характерная температура.

Приводим результаты численного исследования зависимости полученных выражений для коэффициента вязкого трения (4) и безразмерных температурных градиентов (9) — (11) от числа Гартмана  $M^{(0)}$  при различных значениях параметров анизотропии электронов и ионов. Результаты представлены на фиг. 1—4, на этих фигурах введены обозначения



Фиг. 1

$$\theta = \vartheta \left[ \frac{dT}{dz} \right]_{z=1}, \quad \theta_\sigma = \vartheta \left[ \frac{dT_\sigma}{dz} \right]_{z=1} \\ \theta = \vartheta \left[ \frac{dT_\eta}{dz} \right]_{z=1}, \quad \vartheta = \frac{-1}{\gamma P_x^2 R^{(0)2} N_{Pr}^{(0)}}$$

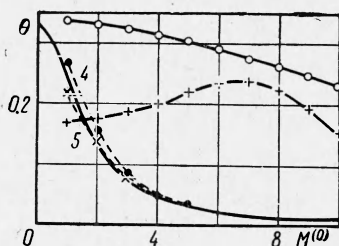
Кривые 1, ..., 5 на фигурах отвечают следующим значениям параметров:

- 1  $\omega_e \tau_0 \ll 1, \quad \omega_i \tau_i \theta \ll 1, \quad s \in [0, 1],$
- 4  $\omega_e \tau_0 = 40, \quad \omega_i \tau_i a = 1, \quad s \ll 1,$
- 5  $\omega_e \tau_0 = 40, \quad \omega_i \tau_i \theta \ll 1, \quad s = 1.$
- 2  $\omega_e \tau_0 = 1, \quad \omega_i \tau_i \ll 1, \quad s \ll 1,$
- 3  $\omega_e \tau_0 = 1, \quad \omega_i \tau_i \ll 1, \quad s = 1,$

При расчете полагалось  $Z = 1$ . Анализ полученных данных позволяет сделать следующие выводы.

1. При  $\omega_e \tau_0 \ll 1$  (изотропная магнитная гидродинамика) рост  $M^{(0)}$  приводит к падению коэффициента вязкого трения, который имеет максимальное значение при  $M^{(0)} = 0$ , т. е. в чисто гидродинамическом случае (фиг. 1). Это падение является

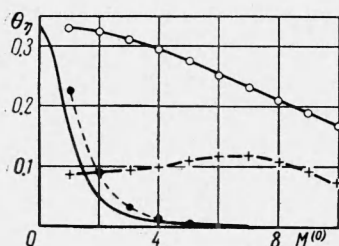
следствием известного факта уменьшения градиента скорости у стенки с ростом числа Гартмана в силу тормозящего действия пондермоторной силы. Уменьшение вязкого трения на стенке приводит к уменьшению и вязкой диссипации с ростом  $M^{(0)}$  (фиг. 3). Несколько иной характер имеет джоулев поток тепла на стенку



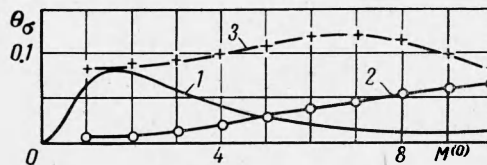
Фиг. 2

числа Гартмана. Учет последнего обстоятельства и приводит к падению потока тепла с ростом числа Гартмана, причем при  $M^{(0)} \gg 1$  поток убывает, как  $M^{(0)-1}$ . В режиме с отсутствующим электрическим полем убывание более интенсивное — как  $1/M^{(0)2}$ .

2. Учет анизотропии проводимости, когда  $\omega_e \tau_0 = 1$ ,  $\omega_i \tau_i \theta \ll 1$ , как видно из графиков, не оказывает сильного влияния на характер поведения вязкого трения и теплового потока на стенке. Отметим, однако, что при слабой ионизации среды ( $s \ll 1$ ) как величина  $C_{f+}$ , так и производ-



Фиг. 3



Фиг. 4

ная  $\theta$  для одних и тех же значений  $M^{(0)}$  оказывается больше, чем в случае изотропной магнитной гидродинамики. Рост же степени ионизации приводит к уменьшению  $C_{f+}$ ,  $[dT/dz]_{z=1}$ ,  $[dT_\eta/dz]_{z=1}$  и увеличению  $[dT_\sigma/dz]_{z=1}$ . Так

$$C_{f+}|_{s=1/2} = 0.8512 C_{f+}|_{s=1}, \quad C_{f+}|_{s=1} = 0.7918 c_{f+}|_{s \ll 1}$$

$$\left(\frac{dT_\eta}{dz}\right)_{z=1}^{s=1/2} = 0.7222 \left(\frac{dT_\eta}{dz}\right)_{z=1}^{s \ll 1}, \quad \left(\frac{dT_\eta}{dz}\right)_{z=1}^{s=1} = 0.625 \left(\frac{dT_\eta}{dz}\right)_{z=1}^{s \ll 1}$$

Последнее связано с усилением плотности тока, увеличением тормозящего действия пондермоторной силы и, следовательно, уменьшением градиентов скорости у стенки канала.

3. Учет эффектов ларморовского вращения как электронов, так и ионов резко меняет вид кривых, характеризующих вязкое трение и тепловой поток на стенке. Существенное значение имеет в этом случае и степень ионизации.

При  $s \ll 1$  для одних и тех же чисел Гартмана наблюдается при  $\omega_i \tau_i a = 1$ ,  $\omega_e \tau_0 = 40$  резкое повышение как коэффициента поверхностного трения, так и температурного градиента на верхней стенке по сравнению с предыдущими случаями, что связано, в частности, с ослаблением плотности тока включением эффекта «скольжения» ионов относительно нейтралов. Хотя здесь и сохраняется убывание  $c_{f+}$  и  $[dT/dz]_{z=1}$  с ростом  $M^{(0)}$ , однако интенсивность этого убывания ослабляется. Вклад в тепловой поток от вязкой диссипации вплоть до очень больших  $M^{(0)}$  значительно превышает вклад от джоулева нагрева (слабый ток).

В другом крайнем случае, когда  $s = 1$ ,  $c_{f+}$  и  $[dT/dz]_{z=1}$ , возрастая с ростом  $M^{(0)}$ , проходят через максимум и только затем начинают монотонно убывать с дальнейшим ростом  $M^{(0)}$ . Здесь вклад в тепловой поток от вязкой диссипации и джоулева нагрева почти равнозначен.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сахновский Э. Г. Неустановившееся плоско-параллельное течение частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, № 4.
2. Сахновский Э. Г. Влияние ларморовского вращения заряженных частиц на нестационарное температурное поле в плоском канале. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
3. Сахновский Э. Г. Одножидкостные уравнения динамики частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Jagadeesan K. Heat transfer due to hydromagnetic channel flow with conducting walls AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 4.
5. Новиков И. И., Пичахчи Л. Д. Теплопередача в потоке электропроводящей жидкости при малых значениях магнитного числа Рейнольдса. ПМТФ, 1964, № 2.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА  
В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ  
С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ ПРОВОДИМОСТИ

А. И. Ковалев (Ленинград)

1. Имеется ряд работ [1-3], в которых вычисляются распределение электрического потенциала и распределение плотности тока в движущейся жидкости, обладающей анизотропной проводимостью. В связи с этим представляет интерес рассмотрение возможности электрического моделирования подобных задач на материалах с соответствующим тензором проводимости. Таким проводником будет, например, поликристаллический висмут, помещенный в магнитное поле.

В дальнейшем предполагается, что магнитное поле и поле скоростей заданы, поток жидкости с тензорной проводимостью окружен стенками из изоляторов и идеальных проводников, причем последние могут быть электродами, на которые поданы определенные электрические потенциалы. Все формулы записаны в системе единиц МКСА.

Рассмотрим условия, которые должны выполняться, чтобы для неподвижной модели без распределенных источников тока распределение плотности тока было бы таким же, как и в устройстве с движущейся жидкостью.

Для модели уравнение непрерывности тока и закон Ома могут быть записаны следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = -\sigma \operatorname{grad} V \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $V$  — электрический потенциал,  $\sigma$  — тензор электронной проводимости, имеющий следующий вид в системе координат с магнитным полем, направленным вдоль оси  $z$ :

$$\sigma \equiv \frac{\sigma_0}{1 + \mu^2 B^2} \begin{pmatrix} 1 - \mu B & V & 0 \\ \mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu^2 B^2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Здесь  $\mu$  — холловская подвижность,  $\sigma_0$  — проводимость вдоль магнитного поля,  $\mu B = \omega \tau$ . Для устройства с движущейся жидкостью аналогичные уравнения имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma (-\operatorname{grad} V + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции.

Второе уравнение (1.3) можно привести к виду второго уравнения (1.1), если вектор

$$\mathbf{E}^* = -\operatorname{grad} V + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

может быть представлен как градиент некоторой величины —  $W$ , которую и следует поставить в соответствие электрическому потенциалу в модели. Это, в свою очередь, приводит к условию

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^* = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

При написании формулы (1.4) использовано уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ .

Условие (1.4) налагает ограничение на конфигурации магнитных полей и полей скоростей, при которых возможно моделирование на моделях без распределенных источников тока. Наиболее простым случаем выполнения этого условия является равенство нулю каждого члена в формуле (1.4). Равенство нулю первого члена приводит к условию постоянства вектора скорости на силовой линии. Равенство нулю второго члена требует постоянства вектора магнитной индукции вдоль линий тока. Равенство нулю последнего члена приводит к условию несжимаемости жидкости.