

УДК 539.3; 621.735.043

МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ С БОЛЬШИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

В. М. Грешнов, И. В. Пучкова

Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа

E-mail: Greshnov_VM@list.ru

Сформулирована задача математического моделирования одной из эффективных технологий пластического формообразования металлов — многопереходной холодной объемной штамповки. Приведены результаты экспериментального исследования пластического поведения металлов в условиях циклического нагружения при больших деформациях, накопленных за один цикл. На основе полученных экспериментальных данных сформулирована модель пластичности и показана эффективность ее использования при аттестации и совершенствовании технологии штамповки детали “гайка” с помощью компьютерной системы инженерного анализа.

Ключевые слова: пластичность, циклическое деформирование, обработка металлов давлением, компьютерная система инженерного анализа.

Введение. Эффективность применения компьютерных систем инженерного анализа в машиностроении общепризнана. Одним из направлений развития таких систем является совершенствование моделей, используемых для описания свойств материалов. Технология холодной объемной штамповки деталей является наиболее эффективной в современном машиностроении [1]. Штамповка на холодновысадочных автоматах обеспечивает изготовление за 1 мин 50 ÷ 300 деталей (например, болтов, гаек, заклепок и т. д.) при среднем значении коэффициента использования металла, равном 95 %.

Пластическое формообразование деталей сложной геометрической формы осуществляется за 3 ÷ 5 технологических переходов в условиях сложного нагружения и немонотонной (зачастую циклической) деформации. Накопленные деформации достигают 1 ÷ 4 единиц [2], причем в каждом переходе деформация составляет 0,4 ÷ 0,8. Холодная деформация металлов приводит к возникновению деформационной анизотропии механических свойств, т. е. сопровождается изотропным и кинематическим упрочнением [3].

Перечисленные особенности пластической деформации при холодной объемной штамповке обуславливают сложность задачи ее математического моделирования. Классические модели пластичности, используемые в расчетных ядрах программных продуктов ANSYS, DEFORM, Q-FORM и др., не описывают отмеченную деформацию, поэтому технология разрабатывается на основе производственного опыта со всеми присущими этому методу издержками.

В последние десятилетия для адекватного учета истории нагружения и кинематического упрочнения предложено большое количество моделей пластичности (см. [4–6]). Анализ этих моделей не является целью данной работы. Следует лишь отметить, что при создании моделей основная идея заключается в уточнении эволюционного уравнения для введенного еще в 1956 г. А. Ю. Ишлинским и В. Прагером дополнительного напряжения, рассматриваемого как внутренний параметр. Это напряжение описывает деформационную

анизотропию [3]. Модели разрабатывались с целью развития методов расчета деталей машин на прочность и ползучесть, поэтому их экспериментальная проверка проводилась при деформациях, не превышающих $2 \div 4$ %. Работы, посвященные исследованию циклического деформирования при больших, накопленных за один цикл деформациях, характерных для обработки металлов давлением, практически отсутствуют.

В настоящей работе представлены экспериментальные данные и изложен новый подход к созданию модели пластичности, описывающей холодную деформацию металлов при больших и знакопеременных деформациях.

1. Методика экспериментов и их результаты. Целью данной работы является экспериментальное изучение пластического поведения металлов при циклическом деформировании с большими деформациями, накопленными за один и несколько циклов. Образцы, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда с размерами $66 \times 40 \times 12$ мм, изготавливались из предварительно отожженной (изотропной) качественной стали марки 10кп. Деформирование образцов осуществлялось на гидропрессе в специальном устройстве (рис. 1), изготовленном из штамповой стали и подвергнутом термической обработке — закалке и отпуску. Образец покрывался смазкой (суспензия чешуйчатого графита в минеральном масле) и деформировался при комнатной температуре в устройстве (осаживался в условиях плоской деформации) пуансоном. Для обеспечения высокой пластичности стали в устройство с двух сторон образца помещались вставки разового использования, изготовленные из свинца. При деформировании свинец выдавливался в отверстия матрицы, что обеспечивало высокое гидростатическое давление и достаточную в эксперименте пластичность стали. После первой осадки образец вместе со свинцовыми вставками выпрессовывался из матрицы пуансоном, при необходимости зачищался, помещался в устройство и поворачивался на угол 90° относительно первоначального положения; после этого заменялись свинцовые вставки и образец подвергался повторному деформированию. Один цикл обработки включал трехкратное деформирование образца. Интенсивность деформации, на-

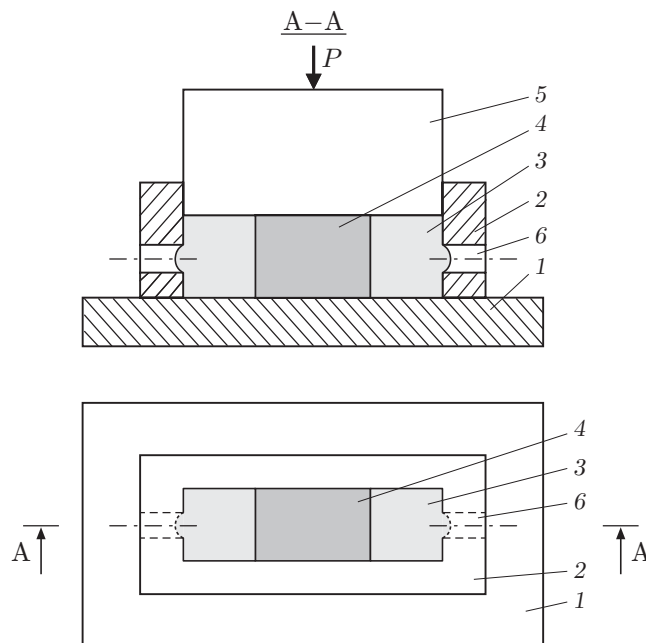


Рис. 1. Схема устройства для деформирования образцов:

1 — подкладная плита; 2 — матрица; 3 — вставка разового использования; 4 — образец;
5 — пуансон; 6 — отверстие, через которое выдавливается материал вставки

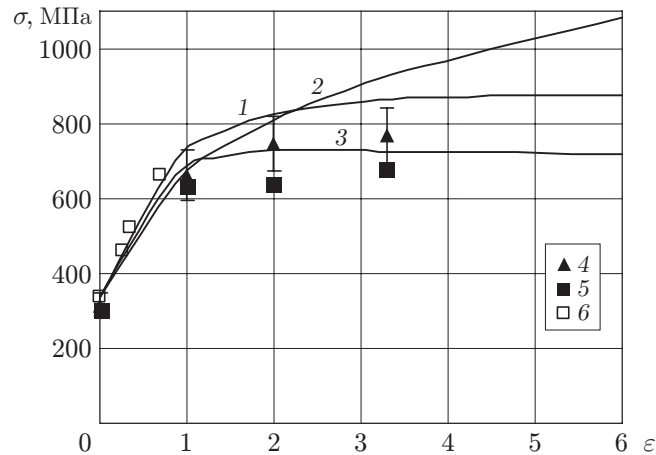


Рис. 2. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций стали марки 10кп:
 1 — расчет по формуле (1), 2 — расчет по формуле (3), 3 — расчет по формуле (7);
 4 — эксперимент на растяжение, 5 — эксперимент на сжатие, 6 — эксперимент на монотонное сжатие

копленная за один цикл, составляла единицу. Обработка двух других образцов включала два и три описанных выше цикла соответственно. Образцы разрезались по направлению наибольшего размера на три одинаковые заготовки, из которых изготавливались два стандартных цилиндрических образца для испытания на растяжение и три цилиндрических образца для испытания на сжатие. В ходе стандартных испытаний образцов определялись пределы текучести, которые сопоставлялись с накопленной образцом интенсивностью пластической деформации.

По результатам экспериментального исследования построена зависимость интенсивности напряжения от интенсивности деформации $\sigma(\varepsilon)$ (рис. 2).

В соответствии с другой методикой цилиндрические образцы диаметром 15 мм и длиной 80 мм, изготовленные из меди М1 и алюминия АД1, деформировались в условиях циклической деформации по схеме прессования “песочные часы”. Результаты, полученные по этой методике, взяты из работы [7]. В одном цикле обработки среднее значение деформации образца составляло 0,57. Варьированием числа циклов получены образцы с различной накопленной интенсивностью пластической деформации. Деформирование образцов заканчивалось прямым выдавливанием. Из полученных прутков изготавливались стандартные образцы для испытания растяжением и осадкой. Как и при использовании первой методики, определялись условные пределы текучести, которые ставились в соответствие накопленной образцом интенсивности пластической деформации. С целью осреднения результатов экспериментов в каждом режиме деформации подвергались по три образца.

На рис. 3 приведены зависимости интенсивности напряжения σ от интенсивности пластической деформации ε . Вертикальными отрезками на рис. 2, 3 показано симметричное 10 %-е отклонение от среднего значения σ .

Рассчитывались также зависимости $\sigma(\varepsilon)$ и $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ (кривые 1, 2 на рис. 2, 3) для стали 10кп, меди М1 и алюминия АД1 при монотонной деформации в соответствии с уравнением изотропной модели пластичности [8]

$$\sigma = \beta m G b \left(\frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon) - 1] + \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon)} \right)^{1/2} \quad (1)$$

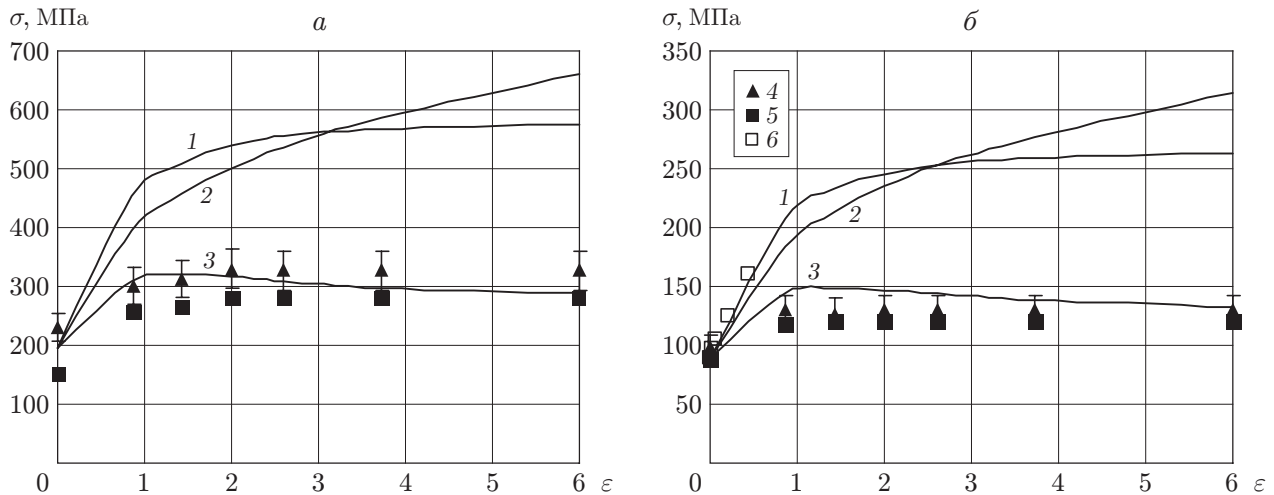


Рис. 3. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций:

a — медь М1; *б* — алюминий АД1 (обозначения те же, что на рис. 2)

и уравнением модели пластичности изотропного материала с изотропно-кинематическим упрочнением [2]

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{\beta m G b}{2} \left[\left(\frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon) - 1] + \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon)} \right)^{1/2} + (\rho_{s0} + A\varepsilon)^{1/2} \right]. \quad (2)$$

Здесь $\beta = 0,4$ — коэффициент; $m = 3,1$ — фактор Тейлора для поликристаллов; $b = 3 \cdot 10^{-8}$ см — модуль вектора Бюргера дислокаций; ρ_{s0} — исходная скалярная плотность дислокаций в материале; λ — средняя длина свободного пробега дислокаций; A — коэффициент, определяемый экспериментально.

Разные материалы и схемы деформирования образцов выбраны для определения достоверности установленных закономерностей.

Среди полученных результатов наиболее важным является эффект, вызванный циклическим (сложным) нагружением, — существенное уменьшение интенсивности напряжений при циклическом деформировании по сравнению с интенсивностью напряжений в случае монотонной деформации (см. рис. 2, 3). В данном случае этот эффект выражен сильнее (особенно у цветных металлов), чем при малых деформациях [4–6]. В случае меди и алюминия значение σ уменьшается на 46 % по сравнению со значением σ в случае монотонного деформирования (см. рис. 3). Физический смысл указанного эффекта обсуждался в работе [3].

При циклическом деформировании, как и при монотонном, наблюдается стабилизация процесса ($\sigma = \text{const}$). В первом случае это происходит при значениях накопленной интенсивности деформации $\varepsilon = 1 \div 2$, во втором при $\varepsilon = 2 \div 3$ (см. рис. 2, 3). Начиная с этих значений деформации поведение материалов с высокой точностью описывается моделью идеально пластического тела.

При циклическом деформировании металлов в случае больших деформаций возникает и остается постоянной незначительная анизотропия напряжения течения (точки на рис. 2, 3). Отношение разности значений σ при растяжении и сжатии к среднему значению σ при различных значениях ε не превышает 16 % для меди и алюминия и 11 % для стали. Эти значения соответствуют известному разбросу характеристик прочности конструкционных металлов и сплавов, имеющему место при их определении стандартными методами.

В теории пластичности изотропного материала с изотропно-кинематическим упрочнением [2] функция напряжения (2) более точно описывает пластическое поведение металлов при сложном нагружении и накопленных интенсивностях деформаций, не превышающих значений $\varepsilon = 0,5 \div 0,7$ (в случае стали $\varepsilon \leq 2$) (кривые 2 на рис. 2, 3), по сравнению с изотропной моделью (1). Из результатов, представленных на рис. 2, 3 (кривые 2), следует, что при $\varepsilon > 1$ для меди М1 и алюминия АД1 и $\varepsilon > 2$ для стали в соответствии с (2) происходит непрерывное упрочнение и увеличивается различие между теоретической и экспериментальной зависимостями $\Phi(\varepsilon)$.

2. Модель пластичности при циклическом деформировании. Анализ изложенных выше результатов экспериментов показывает, что в первых циклах деформирования начальная поверхность пластичности материала $f(\sigma_{ij}, \sigma_T, \varepsilon) = 0$ в пространстве напряжений незначительно смещается как целое с одновременным изотропным расширением. При $\varepsilon = 1$ происходит стабилизация напряжений ($\sigma = \text{const}$). При дальнейшем деформировании форма поверхности пластичности не меняется. Поэтому при разработке модели пластичности кинематическое упрочнение можно не учитывать (в силу его малости), следует учесть только изотропное упрочнение в интервале $\varepsilon \in [0, 1]$. Следовательно, можно записать изотропные определяющие соотношения, аналогичные соотношениям теории течения изотропного материала [3]:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon}{\Phi'(\varepsilon)} s_{ij}. \quad (3)$$

Здесь $d\varepsilon_{ij}$ — тензор приращения пластических деформаций (принимается условие несжимаемости $d\varepsilon_{ii} = 0$); $d\varepsilon$ — интенсивность приращения пластических деформаций; $\Phi'(\varepsilon)$ — функция напряжения при циклическом деформировании с большими деформациями; s_{ij} — девиатор напряжений.

С учетом результатов, полученных в п. 1, примем следующую гипотезу, в некотором смысле аналогичную гипотезе единой кривой. При циклическом и близком к нему (сложное нагружение по ломаным траекториям) деформировании металлов, характеризующемся большими интенсивностями пластической деформации в полуцикле ($\varepsilon > 0,1 \div 0,2$) и накопленными деформациями $\int d\varepsilon > 1 \div 2$, интенсивность напряжения течения является функцией интенсивности накопленной пластической деформации (параметра Удквиста), не зависящей от характеристик цикла (амплитуды, симметрии и т. д.) и вида напряженного состояния. В соответствии с этой гипотезой в качестве функции напряжения $\Phi'(\varepsilon)$ в (3) можно принять осредненные по результатам испытаний образцов на растяжение и сжатие зависимости $\sigma(\varepsilon)$ (см. рис. 2, 3).

Для получения аналитического описания зависимостей $\sigma(\varepsilon) \equiv \Phi'(\varepsilon)$ рассмотрим физико-феноменологическую модель пластичности, учитывающую эффект Баушингера [9]:

$$\sigma = \beta m G b \left(\frac{\exp(\varepsilon) - 1}{\lambda' b \exp(\varepsilon)} + \frac{\rho_{s0} + A\varepsilon^+}{\exp(\varepsilon)} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Здесь σ , ε — напряжение и деформация при обратном деформировании после прямого деформирования, при котором достигается деформация ε^+ ; λ' — длина свободного пробега дислокаций после смены знака деформации.

Для определения коэффициента A и λ' рекомендуется последовательность экспериментов, включающая деформирование цилиндрического образца по схеме простого растяжения (волочением или прямым выдавливанием) с величиной деформации $\varepsilon^+ = 0,43 \div 0,60$; нарезку из полученного прутка трех (для осреднения результатов) стандартных образцов

для испытания осадкой; испытания образцов осадкой и построение диаграммы деформирования $\sigma(\varepsilon)$. Значения A и λ' определяются с использованием полученной диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ по формулам

$$A = [(\sigma_{02}^{exp})^2(\beta m G b)^{-2} - \rho_{s0}]/\varepsilon^+; \quad (5)$$

$$\lambda' = \frac{b(\beta m G)^2[\exp(\varepsilon) - 1]}{\sigma^2 \exp(\varepsilon) - (\beta m G b)^2(\rho_{s0} + A\varepsilon^+)}, \quad (6)$$

где σ_{02}^{exp} — экспериментально определенный предел текучести материала на сжатие; $\varepsilon \in (0,3; 0,5)$.

Уравнения (5), (6) получены из (4), причем уравнение (5) — при $\varepsilon = 0$, когда $\sigma = \sigma_{02}^{exp}$.

Скалярное уравнение, описывающее пластическую деформацию металлов в условиях исследуемого циклического деформирования, получим из модели, учитывающей эффект Баушингера (4), заменой ε^+ на текущее значение ε :

$$\Phi'(\varepsilon) \equiv \sigma = \beta m G b \left(\frac{(\lambda' b)^{-1}[\exp(\varepsilon) - 1] + \rho_{s0} + A\varepsilon}{\exp(\varepsilon)} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

С целью проверки адекватности модели (7) выполнены расчеты для стали 10кп, меди М1 и алюминия АД1 (кривые 3 на рис. 2, 3). Из рис. 2, 3 следует, что теоретические и экспериментальные зависимости удовлетворительно согласуются.

Расчеты проведены при следующих значениях параметров материалов: для стали 10кп $G = 78\,000$ МПа, $\lambda = 3,6 \cdot 10^{-4}$ см, $\rho_{s0} = 1,3 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$, $A = 3,1 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$, $\lambda' = 5,4 \cdot 10^{-4}$ см; для меди М1 $G = 46\,000$ МПа, $\lambda = 2,96 \cdot 10^{-4}$ см, $\rho_{s0} = 1,3 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$, $A = 3,0 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$, $\lambda' = 1,18 \cdot 10^{-3}$ см; для алюминия АД1 $G = 26\,000$ МПа, $\lambda = 4,53 \cdot 10^{-4}$ см, $\rho_{s0} = 8,35 \cdot 10^9$ см $^{-2}$, $A = 2,27 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$, $\lambda' = 1,81 \cdot 10^{-3}$ см.

Анализ расчетных кривых 3 на рис. 2, 3 показывает, что в некоторых случаях уравнение (7) описывает диаграммы $\Phi'(\varepsilon)$ с разупрочнением (падающие диаграммы), т. е. при $\varepsilon > 1$ $d\Phi'/d\varepsilon < 0$. Использование этой диаграммы может вызвать известные затруднения при определении напряженно-деформированного состояния заготовок, возникающего при обработке металлов давлением. Как отмечено выше, при $\varepsilon > 1$ пластическое поведение материалов с приемлемой для технологических расчетов точностью описывается моделью идеально пластического тела. Поэтому представляется целесообразным при постановке и решении краевых задач пластичности на первой стадии деформирования, характеризующейся упрочнением (см. рис. 2, 3), использовать определяющие соотношения (3), (7), на второй стадии ($\Phi' = \text{const}$) использовать формулировку краевой задачи в рамках теории идеальной пластичности с использованием условия пластичности

$$((3/2)s_{ij}s_{ij})^{1/2} = \sigma'_T \quad (8)$$

($\sigma'_T = \Phi'(\varepsilon) = \text{const}$) и определяющих соотношений вида [3]

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon}{\sigma'_T} s_{ij}. \quad (9)$$

При этом продолжительность первой стадии и значение σ'_T определяются по зависимости $\Phi'(\varepsilon)$, построенной для исследуемого материала по уравнению (7).

Таким образом, согласно сформулированной выше гипотезе поведение металлов при циклическом деформировании с большими деформациями в полциклах и накопленными за несколько циклов деформациями в координатах интенсивность напряжений — интенсивность накопленных деформаций может соответствовать поведению некоторого абстрактного изотропного материала при простом нагружении и монотонной деформации,

диаграмма деформирования которого $\Phi'(\varepsilon)$ определяется с учетом ряда параметров циклического деформирования реального металла.

Как известно, уравнения теории течения (3) и теории идеальной пластичности (8), (9) позволяют получить удовлетворительные результаты при определении напряженно-деформированного состояния заготовок в процессе обработки металлов давлением в условиях простого нагружения и монотонной деформации. Уравнение (7) удовлетворительно описывает экспериментальные зависимости $\sigma(\varepsilon)$ (кривые 3 на рис. 2, 3), поэтому данной зависимости достаточно для математического моделирования технологических процессов обработки металлов давлением.

3. Совершенствование технологии штамповки детали “гайка”. Технология штамповки детали “гайка” из стали 38ХГМН включает пять операций. Была поставлена задача аттестации технологии методом математического моделирования с использованием разработанной модели пластичности.

В соответствии с технологией подготовки материала для холодной объемной штамповки качественные стали, в том числе сталь 38ХГМН, для увеличения пластичности и уменьшения сопротивления деформации подвергаются сфероидизирующему отжигу. Поэтому в исходном состоянии сталь является изотропной.

Согласно методике, изложенной в п. 2, построены экспериментальные диаграммы деформирования стали (рис. 4) и определены параметры модели: $G = 81\,410$ МПа, $\rho_{s0} = 2,8 \cdot 10^{10}$ см⁻², $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-4}$ см, $\beta = 0,4$, $m = 3,1$, $b = 3 \cdot 10^{-8}$ см, $\varepsilon^+ = 0,51$, $A = 5,594 \cdot 10^{10}$ см⁻², $\lambda' = 2,18 \cdot 10^{-4}$ см.

Рассчитанная по уравнению (7) зависимость $\Phi'(\varepsilon)$ для стали 38ХГМН (рис. 5) и уравнение (3) использовались при расчете некоторых характеристик напряженно-деформированного состояния заготовки в технологических переходах штамповки с помощью САЕ-программы DEFORM-3D (computer-aided engineering (CAE) — компьютерная система инженерного анализа).

Краевая задача определения характеристик напряженно-деформированного состояния заготовки в технологических переходах штамповки с учетом симметрии детали стави-

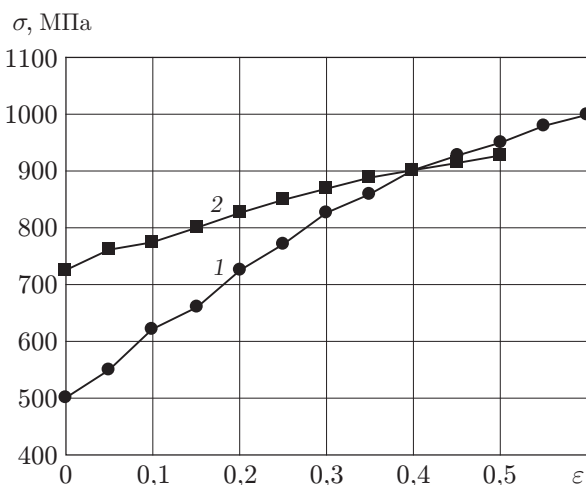


Рис. 4

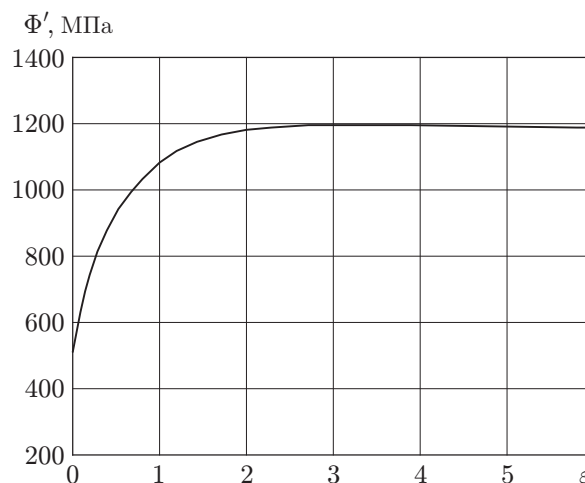


Рис. 5

Рис. 4. Экспериментальные диаграммы деформирования стали 38ХГМН:

1 — исходное состояние; 2 — осадка после предварительного деформирования по схеме простого растяжения при $\varepsilon^+ = 0,51$ (волочение прутка)

Рис. 5. Зависимость $\Phi'(\varepsilon)$ для стали 38ХГМН

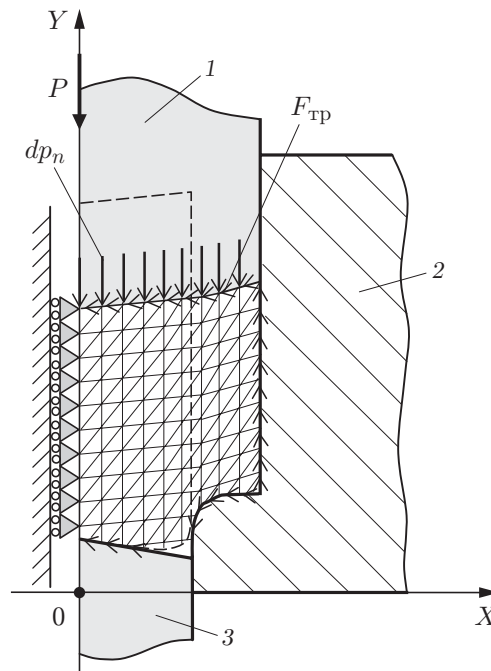


Рис. 6. Расчетная конечно-элементная схема деформирования заготовки во втором технологическом переходе штамповки:

1 — пуансон, 2 — матрица, 3 — выталкиватель

лась как осесимметричная. Система уравнений состоит из дифференциальных уравнений равновесия, кинематических соотношений Коши [2, 3] и определяющих соотношений (3), (7). В качестве примера на рис. 6 показана расчетная схема деформирования в момент окончания формообразования заготовки во втором переходе штамповки, являющаяся типичной для остальных переходов. С учетом осесимметричности задачи характеристики напряженно-деформированного состояния определялись в $1/2$ меридионального сечения заготовки.

В первом переходе выполняется калибровка цилиндрической заготовки, отрезанной от прутка, после чего заготовка помещается в образованную матрицей, выталкивателем и пуансоном полость штампа, используемого на втором переходе (на рис. 6 выделена штриховой линией). Пуансон, перемещаясь вниз, деформирует заготовку, в результате чего она заполняет полость штампа.

Трение на контактных поверхностях заготовки и выталкивателя, стенок матрицы и торца пуансона учитывалось с помощью формулы Зибеля $F_{тр} = \mu\sigma$, где $\mu = 0,12 = \text{const}$.

Определялись поля накопленной интенсивности деформации в объеме заготовки и удельная сила штамповки в технологических переходах $p = P/F$ (P — сила штамповки в момент завершения заполнения полости штампа; F — площадь проекции заготовки на горизонтальную плоскость).

На рис. 7 показаны поля накопленной интенсивности деформации и удельные силы штамповки по всем пяти формообразующим переходам. Видно, что деформации в переходах достигают больших значений. Уже после второго перехода интенсивность деформации $\varepsilon \geq 0,44$ во всем объеме заготовки (рис. 7, б). К моменту начала последнего перехода штамповки деформация несколько выравнивается по объему заготовки и после его завершения находится в интервале $\varepsilon \in (0,723; 1,367)$ (рис. 7, д).

При холодной объемной штамповке считается допустимой нагрузка на инструмент (пуансоны и матрицы) $p < 2000$ МПа. При $p \geq 2000$ МПа резко уменьшается стойкость

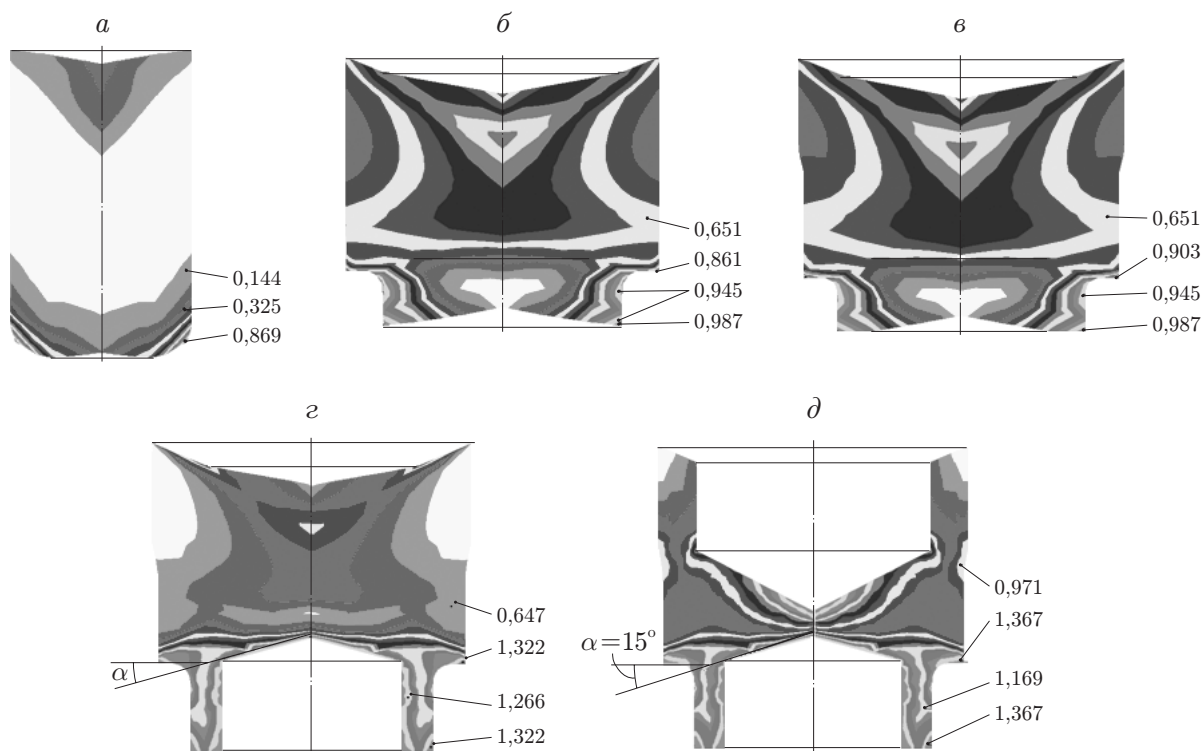


Рис. 7. Поля накопленной интенсивности деформации ($\varepsilon = \int d\varepsilon$) в объеме заготовки:

a — $p = 699,3$ МПа; *б* — $p = 994$ МПа; *в* — $p = 1416$ МПа; *г* — $p = 1466,8$ МПа; *д* — $p = 1597$ МПа

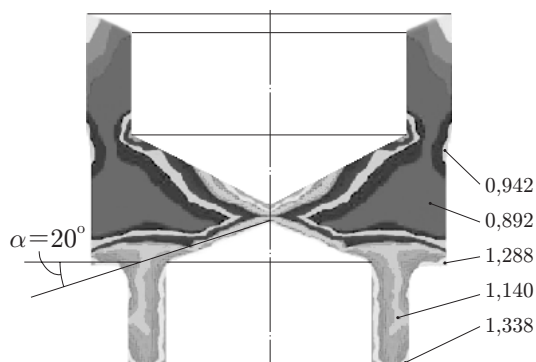


Рис. 8. Поля накопленной интенсивности деформации на последнем переходе при использовании усовершенствованной технологии штамповки ($p = 1498$ МПа)

дорогостоящего инструмента. Максимальное значение $p = 1597$ МПа наблюдается на пятом технологическом переходе (см. рис. 7, *д*).

Изложенные результаты аттестации данной технологии позволяют сделать вывод о том, что, во-первых, технология может применяться, поскольку ее параметры не достигают критических значений; во-вторых, имеется возможность совершенствования технологии. Анализ картин течения на четвертом и пятом переходах (см. рис. 7, *г, д*) показывает, что эти переходы можно совместить. При этом формирование верхней полости в детали обратным выдавливанием будет осуществляться за счет реакции силы деформирования, под действием которой происходит формирование прямым выдавливанием нижней полости детали, т. е. совмещение переходов не приведет к увеличению силы, необходимой для деформирования. Кроме того, эту силу можно уменьшить, увеличив угол α с 15 до 20°, что приведет к повышению стойкости штампов.

В результате математического моделирования формообразования в новом “совмещенном” переходе установлено, что полость ручья штампа заполняется без дефектов (зажимов и складок), а удельная сила штамповки уменьшается с 1597 до 1498 МПа (рис. 8).

Таким образом, в случае сложного, в том числе циклического, нагружения при больших деформациях предложенная модель пластичности более точно описывает пластическое поведение металлов по сравнению с классическими изотропной и изотропно-трансляционной теориями течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ковка** и штамповка: Справ. Т. 3. Холодная объемная штамповка / Под ред. Г. А. Навроцкого. М.: Машиностроение, 1987.
2. **Грешнов В. М., Боткин А. В., Напалков А. В., Лавриненко Ю. А.** Математическое моделирование многопереходных процессов холодной объемной штамповки на основе физико-математической теории пластического формообразования металлов. Ч. 1. Расчет напряженно-деформированного состояния // Кузнеч.-штамп. пр-во. Обаб. материалов давлением. 2001. № 8. С. 33–37.
3. **Ишлинский А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001.
4. **Voyiadjis G. Z., Abu Al-Rub R. K.** Thermodynamic based model for the evolution equation of the backstress in cyclic plasticity // Intern. J. Plasticity. 2003. N 19. P. 2121–2147.
5. **Czichos H.** Springer handbook of materials measurement methods / H. Czichos, T. Saito, L. Smith. Berlin: Springer, 2007. P. 95–102.
6. **Araujo M. C.** Non-linear kinematic hardening model for multiaxial cyclic plasticity: Thesis. Teresina, 2002.
7. **Грешнов В. М., Голубев О. В., Ртищев А. В.** Новая технологическая схема прессования металлов // Кузнеч.-штамп. пр-во. 1997. № 2. С. 8–10.
8. **Грешнов В. М.** Об одной модели пластичности для задач обработки металлов давлением // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 159–169.
9. **Грешнов В. М., Лавриненко Ю. А., Напалков А. В.** Инженерная физическая модель эффекта Баушингера и определяющие уравнения изотропного материала с анизотропным упрочнением (тензорное соотношение) // Кузнеч.-штамп. пр-во. 1998. № 6. С. 3–6.

Поступила в редакцию 15/IV 2009 г.