УДК 539.3

АНАЛИЗ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ ПРИ ФОРМОИЗМЕНЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СООТНОШЕНИЙ РАМБЕРГА — ОСГУДА

Р. К. Лал, М. К. Бхагат^{*}, Дж. П. Двиведи^{*}, В. П. Сингх^{*}, С. К. Пактел^{*}

Технологический университет им. Мадан Мохан, 273010 Горакхпур, Индия * Индийский технологический институт, 221005 Ванараси, Индия E-mails: rkl.iitbhu@gmail.com, shyam_lal@rediffmail.com, jpd@bhu.ac.in, vp_singh56@yahoo.com, sanjayptl79@gmail.com

С использованием соотношений Рамберга — Осгуда выполнен теоретический анализ последействия в задаче об изгибе узкой прямоугольной пластины из упрочняющегося материала, толщина которой не более 5 мм, длина значительно больше толщины. С использованием уравнений теории упругости и деформационной теории пластичности, а также критериев текучести Треска и Мизеса получено выражение для коэффициента последействия (упругого восстановления), зависящего от отношения предела текучести к модулю Юнга, коэффициента Пуассона, показателя упрочнения и толщины пластины.

Ключевые слова: формоизменение, металлическая пластина, соотношения Рамберга — Осгуда.

DOI: 10.15372/PMTF20160622

Введение. При штамповании из пластины цилиндрических и геликоидальных оболочек к пластине прикладывается момент, создаваемый с помощью пуансонов и штампов. В конце процесса штампования внутренняя поверхность пластины примыкает к поверхности штампа. После снятия нагрузки форма пластины меняется вследствие упругого последействия. Для учета этого последействия необходимо использовать методы, позволяющие определить коэффициент упругого восстановления, зависящий от геометрии штампа и свойств материала.

В случае изгиба мерой последействия может служить величина изменения радиуса кривизны пластины после снятия нагрузки.

В работах [1–4] изучалось упругое восстановление пластин после их формоизменения и получены зависимости коэффициента упругого восстановления от ширины, толщины и длины пластины, при этом рассматривались V- и U-образные штампы. В [5–7] исследовалось упругопластическое кручение балок с прямоугольным поперечным сечением под воздействием монотонно возрастающих нагрузок. В работах [8, 9] получены аналитические выражения для остаточных углов закручивания при кручении балок из упрочняющегося материала с прямоугольным поперечным сечением. В указанных работах рассматривались тонкие прямоугольные пластины в виде полос. В [10, 11] изучалось последействие после кручения балок с квадратным поперечным сечением из линейно и нелинейно упрочняющихся материалов. В [12] исследовалось последействие после кручения балок с L-образным поперечным сечением из нелинейно упрочняющегося материала. В [13–18] представлены результаты экспериментального исследования упругого восстановления после изгиба пластин и труб. Последействие после кручения тонкостенных труб, изготовленных из нелинейно упрочняющегося материала, изучалось в [19–21].

В настоящей работе получено приближенное соотношение, позволяющее количественно оценить зависимость коэффициента упругого восстановления пластин после изгиба от радиуса штампа, толщины листа, деформационных свойств материала пластины.

1. Формулировка задачи о последействии при формоизменении пластин. Примем следующие допущения:

1) в процессе формоизменения цилиндрическая оболочка образуется из листа в результате чистого изгиба;

2) ширина листа значительно больше его толщины;

3) отсчетной поверхностью является срединная поверхность листа, в процессе деформирования сечения остаются плоскими;

4) в процессе изгиба размеры поперечного сечения листа практически не меняются, радиус кривизны много больше толщины листа, поэтому радиальными напряжениями можно пренебречь;

5) окружные деформации малы, поэтому условную деформацию можно считать эквивалентной истинной;

6) продольные деформации равны нулю;

7) окружные деформации постоянны по поперечному сечению листа.

На рис. 1 показаны элемент цилиндрической оболочки и используемая система координат.

На рис. 2 приведена качественная зависимость изгибающего момента от кривизны пластины при изгибе широкого листа вокруг цилиндрического штампа. После стадии



Рис. 1. Элемент цилиндрической оболочки



Рис. 2. Зависимость изгибающего момента от кривизны пластины

упругого деформирования (участок кривой OA) происходит пластическое деформирование материала (участок кривой AB). Точка B соответствует моменту, когда внутренняя поверхность листа полностью примыкает к поверхности цилиндрического штампа. Затем действие момента прекращается и происходит упругое восстановление листа (последействие).

При упругом восстановлении кривизна листа меняется на величину $1/R_0 - 1/R_f$ (см. рис. 2):

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_f} = \frac{M_{\text{max}}}{\partial M_E / \partial \left(1/R\right)},\tag{1}$$

где $\partial M_E / \partial (1/R) = \operatorname{tg} \alpha$. Равенство внешнего изгибающего момента и момента внутренних напряжений запишем в виде

$$M_{\max} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x y \, dy = 2 \int_{0}^{t/2} \sigma_x y \, dy.$$
(2)

2. Соотношение между напряжением и деформацией при одноосном напряженном состоянии. При моделировании последействия при формоизменении пластин используется модифицированное соотношение для деформации и напряжения Рамберга — Осгуда.

При одноосном напряженном состоянии нелинейное соотношение Рамберга — Осгуда между напряжением и деформацией имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Big[1 + \alpha \Big(\frac{\sigma}{\sigma_0} \Big)^{n-1} \Big],$$

где первое слагаемое σ/E — упругая деформация; второе слагаемое $(\sigma/E)\alpha(\sigma/\sigma_0)^{n-1}$ — пластическая деформация. В соотношении Рамберга — Осгуда пластическая деформация не равна нулю при сколь угодно малых напряжениях. Однако второе слагаемое вносит существенный вклад в величину деформации только при $\sigma > \sigma_0$.

В настоящей работе используется модифицированное соотношение Рамберга — Осгуда. Используем следующую зависимость между напряжением и деформацией при одноосном напряженном состоянии:

$$\varepsilon = \sigma/E$$
 при $\sigma < \sigma_*,$
 $\varepsilon = (\sigma/E)\alpha(\sigma/\sigma_0)^{n-1}$ при $\sigma > \sigma_*.$

Из условия непрерывности напряжения и деформации при $\sigma < \sigma_*$ следует

$$\sigma_* = K \varepsilon_*^{\lambda} = K \left(\frac{K}{E}\right)^{\lambda/(1-\lambda)}, \qquad \varepsilon_* = \left(\frac{K}{E}\right)^{1/(1-\lambda)}, \tag{3}$$

где $K = \sigma_0 (E/(\alpha \sigma_0)^{\lambda}); \ \lambda = 1/n.$

3. Деформирование листа в упругой области. При отсутствии касательных напряжений закон Гука имеет следующий вид:

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))/E; \tag{4}$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))/E, \qquad \varepsilon_z = (\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x))/E.$$
 (5)

Поскольку полагается, что радиус кривизны много больше толщины листа, радиальными напряжениями можно пренебречь и считать, что в любой точке листа продольные деформации равны нулю:

$$\sigma_y = \varepsilon_z = \delta_z = 0. \tag{6}$$

Из уравнения (5) с учетом (6) имеем

$$\sigma_z = \nu \sigma_x,$$

из уравнения (4) следует

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu^2), \qquad \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_x.$$

При чистом изгибе имеем

$$\varepsilon_x = y/R_G.$$

Следовательно, при упругом деформировании

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{y}{R_0}.\tag{7}$$

4. Определение напряжений и деформаций при пластическом деформировании листа с использованием критерия текучести Треска. В соответствии с критерием текучести Треска материал переходит в пластическое состояние при условии

$$\sigma_x - \sigma_z = 2\sigma_*. \tag{8}$$

С учетом (3), (8) для напряжения и деформации, при которых материал переходит в пластическое состояние, получаем выражения

$$\sigma_{x0} = \frac{K(K/E)^{\lambda/(1-\lambda)}}{1-\gamma}, \qquad \varepsilon_{x0} = \left(\frac{K}{E}\right)^{1/(1-\lambda)}(1+\nu).$$

Поскольку при чистом изгибе $\varepsilon_x=y/R_0,$ при $0\leqslant y/R_0\leqslant (K/E)^{1/(1-\lambda)}(1+\nu)$ получаем

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \, \frac{y}{R_0}.$$

В соответствии с деформационной теорией пластичности [16] вычислим напряжения и деформации в пластической области:

$$\delta_x = \frac{1}{K^{1/\lambda}} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right)^{(1-\lambda)/(2\lambda)} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right);$$
(9)

$$\delta_y = \frac{1}{K^{1/\lambda}} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right)^{(1-\lambda)/(2\lambda)} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right);$$
(9)

$$\delta_z = \frac{1}{K^{1/\lambda}} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right)^{(1-\lambda)/(2\lambda)} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y}{2} \right),$$
(10)

где $\delta_x, \, \delta_y, \, \delta_z$ — пластические деформации.

С учетом (6) из соотношения (10) получаем

$$\sigma_z = \sigma_x/2$$

Так как $\delta_x = y/R_0$, из соотношения (9) с учетом (6) находим

$$\sigma_x = \frac{K}{(3/4)^{(1+\lambda)/2}} \left(\frac{y}{R_0}\right)^{\lambda}.$$
(11)

Выражение (11) справедливо при условии

$$\left(\frac{K}{E}\right)^{2/(1-\lambda)}(1+\nu) \leqslant \frac{y}{R_0} \leqslant \frac{t}{2R_0}.$$

В соответствии с (2) находим максимальное значение изгибающего момента $M_{\max} = 2 \int_{0}^{t/2} \sigma_x y \, dy$. Интеграл от 0 до t/2 можно представить в виде суммы двух интегралов: интеграла от 0 до R_* (упругая область) и интеграла от R_* до t/2 (пластическая область):

$$M_{\max} = 2\Big(\int_{0}^{R_*} \sigma_{x,el} y \, dy + \int_{R_*}^{t/2} \sigma_{x,pl} y \, dy\Big),$$

где $R_* = R_0 (K/E)^{1/(1-\lambda)} (1+\nu).$

Используя (7), (11) и вычисляя интегралы, окончательно получаем

$$M_{\max} = 2 \frac{ER_0^2(K/E)^{3/(1-\lambda)}(1+\nu)}{3(1-\nu^2)} + 2\left(\frac{K(t/2)^{\lambda+2}}{(3/4)^{(1+\lambda)/2}R_0^{\lambda}(\lambda+2)} - \frac{KR_0^2(K/E)^{(\lambda+2)/(1-\lambda)}(1+\nu)^{\lambda+2}}{(3/4)^{(1+\lambda)/2}(\lambda+2)}\right).$$
(12)

5. Определение напряжений и деформаций при пластическом деформировании листа с использованием критерия текучести Мизеса. В соответствии с критерием текучести Мизеса материал переходит в пластическое состояние при условии

$$\frac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] = \sigma_*^2.$$
(13)

С учетом (6) из (13) следует

$$\sigma_* = \sigma_x (1 + \nu^2 - \nu)^{1/2}.$$
(14)

С учетом (3), (4) для напряжения и деформации, при которых материал переходит в состояние текучести, получаем выражения

$$\sigma_{x0} = \frac{K(K/E)^{\lambda/(1-\lambda)}}{(1-\nu+\nu^2)^{1/2}}, \qquad \varepsilon_{x0} = \left(\frac{K}{E}\right)^{1/(1-\lambda)} \frac{1-\nu^2}{(1-\nu+\nu^2)^{1/2}}.$$

Для упругой области при $0 \leq \frac{y}{R_0} \leq \left(\frac{K}{E}\right)^{1/(1-\lambda)} \frac{1-\nu^2}{(1-\nu+\nu^2)^{1/2}}$ имеем
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{y}{R_0}.$$
 (15)

С учетом (6) из соотношения (9) для напряжения в пластической области при $\left(\frac{K}{E}\right)^{1/(1-\lambda)} \frac{1-\nu^2}{1-\nu+\nu^2} \leqslant \frac{y}{R_0} \leqslant \frac{t}{2}$ получаем

$$\sigma_x = \frac{K}{(3/4)^{(1+\lambda)/2}} \left(\frac{y}{R_0}\right)^{\lambda}.$$
(16)

В соответствии с (2) находим

$$M_{\rm max} = 2 \int_{0}^{t/2} \sigma_x y \, dy.$$

Интеграл от 0 до t/2 можно представить в виде суммы двух интегралов: от 0 до R_* (упругая область) и от R_* до t/2 (пластическая область):

$$M_{\max} = 2\Big(\int_{0}^{R_*} \sigma_{x,el} y \, dy + \int_{R_*}^{t/2} \sigma_{x,pl} y \, dy\Big),$$

где

$$R_* = R_0 \left(\frac{K}{E}\right)^{1/(1-\lambda)} \frac{1-\nu^2}{(1-\nu+\nu^2)^{1/2}}$$

Используя (15), (16) и вычисляя интегралы, окончательно получаем

$$M_{\rm max} = 2 \frac{ER_0^2(K/E)^{3/(1-\lambda)}}{3(1-\nu^2)} \frac{(1-\nu^2)^3}{(1-\nu+\nu^2)^{3/2}} + 2\Big(\frac{K(t/2)^{\lambda+2}}{(3/4)^{(1+\lambda)/2}R_0^{\lambda}(\lambda+2)} - \frac{KR_0^2(K/E)^{(\lambda+2)/(1-\lambda)}(1-\nu^2)^{\lambda+2}}{(3/4)^{(1+\lambda)/2}(\lambda+2)(1-\nu+\nu^2)^{(\lambda+2)/2}}\Big).$$
(17)

6. Вычисление коэффициента последействия. В упругой области изгибающий момент на единицу ширины пластины [17] равен

$$M_E = \frac{2E(t/2)^3}{3(1-\nu^2)R},\tag{18}$$

следовательно,

$$\frac{\partial M_E}{\partial (1/R)} = \frac{2E(t/2)^3}{3(1-\nu^2)}.$$
(19)

С учетом (1), (18), (19), (17), (12) для коэффициента последействия получаем следующие выражения:

— в случае использования критерия текучести Треска

$$\frac{R_0}{R_f} = 1 - \frac{3(1-\nu^2)}{(3/4)^{(n+1)/(2n)}(2n+1)/n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/n} \left(\frac{\sigma_0}{E}\right)^{(n-1)/n} \left(\frac{2R_0}{t}\right)^{(n-1)/n} + \left[\frac{2R_0}{t} \left(\frac{K}{E}\right)^{n/(n-1)}(1+\nu)\right]^3 \left(\frac{3(1+\nu)^{1/n}(1-\nu)}{(3/4)^{(n+1)/(2n)}(2n+1)/n} - 1\right); \quad (20)$$

— в случае использования критерия текучести Мизеса

$$\frac{R_0}{R_f} = 1 - \frac{3(1-\nu^2)}{(3/4)^{(n+1)/(2n)}(2n+1)/n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/n} \left(\frac{\sigma_0}{E}\right)^{(n-1)/n} \left(\frac{2R_0}{t}\right)^{(n-1)/n} + \left[\frac{2R_0}{t} \left(\frac{K}{E}\right)^{n/(n-1)} (1-\nu^2)\right]^3 \left(\frac{3(1-\nu^2)^{1/n}}{(3/4)^{(n+1)/(2n)}(1-\nu+\nu^2)^{(2n+1)/(2n)}(2n+1)n} - \frac{1}{(1-\nu+\nu^2)^{3/2}}\right). \quad (21)$$

Для оценки коэффициента последействия в технологических процессах, в которых отношение $R_0/t \leq 30$, выражения (20), (21) можно упростить, отбросив вторые слагаемые.



Рис. 3. Зависимость отношения R_0/R_f от R_0/t при $\nu = 0,33, n = 10$ и различных значениях σ_0/E : $1 - \sigma_0/E = 2,45 \cdot 10^{-3}, 2 - \sigma_0/E = 1,52 \cdot 10^{-3}, 3 - \sigma_0/E = 5,5 \cdot 10^{-4}$ Рис. 4. Зависимость отношения R_0/R_f от R_0/t при $\sigma_0/E = 5,5 \cdot 10^{-4}, \nu = 0,33$ и различных значениях n:

1 - n = 10, 2 - n = 20, 3 - n = 30



Рис. 5. Зависимость отношения R_0/R_f от R_0/t при $\sigma_0/E = 5.5 \cdot 10^{-4}$, n = 30 и различных значениях ν : $1 - \nu = 0.25, 2 - \nu = 0.35, 3 - \nu = 0.45$

7. Результаты исследования и их обсуждение. Полученные соотношения зависят от параметров R_0/t , σ_0/E , показателя упрочнения n и коэффициента Пуассона ν .

На рис. 3 приведена зависимость отношения R_0/R_f от отношения R_0/t при различных значениях σ_0/E .

На рис. 4 представлена зависимость отношения R_0/R_f от отношения R_0/t при $\sigma_0/E = 5.5 \cdot 10^{-4}$, $\nu = 0.33$ и различных значениях показателя упрочнения. Видно, что с увеличением показателя упрочнения n поведение материала приближается к поведению идеального упругопластического материала.

На рис. 5 приведена зависимость отношения R_0/R_f от отношения R_0/t при различных значениях коэффициента Пуассона.

На рис. 6–8 показаны зависимости отношения R_0/R_f от толщины пластины t при различных значениях σ_0/E , n и ν .





гис. 7. Зависимость отношения R_0/R_f от толщины пластины t при $\sigma_0/E = 5.5 \cdot 10^{-4}$, n = 20 и различных значениях ν : $1 - \nu = 0.25, 2 - \nu = 0.35, 3 - \nu = 0.45$



Рис. 8. Зависимость отношения R_0/R_f от толщины пластины t при $\nu=0,33,$ $\sigma_0/E=5,5\cdot10^{-4}~(a),~\sigma_0/E=1,52\cdot10^{-3}~(6)$ и различных значениях n: 1-n=10,~2-n=20,~3-n=30,~4-n=40

Заключение. С использованием нелинейных определяющих соотношений определен коэффициент последействия при штамповании цилиндрических деталей в условиях чистого изгиба. Установлено, что коэффициент упругого восстановления увеличивается с увеличением показателя упрочнения, коэффициента Пуассона и толщины листа, а также с уменьшением отношения предела текучести к модулю Юнга. При $R_0/t < 20$ значения коэффициента упругого восстановления, определенные с использованием критериев текучести Треска и Мизеса, практически совпадают.

Авторы выражают благодарность П. Ч. Упадхайя, экс-главе Отделения инженерной механики Бенаресского индуистского университета (г. Ванараси), за помощь при подготовке данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Sachs G. Principles and methods of sheet metal fabricating. N. Y.: Reinhold, 1951.
- 2. Schroeder W. Mechanics of sheet metal bending // Trans. ASME. 1943. V. 36. P. 138–145.
- 3. Gardiner F. J. The springback of metals // Trans. ASME. 1958. V. 49. P. 1–9.
- Singh A. N., Johnson W. Springback after cylindrically bending metal strips // Proc. of the Dr Karunesh memorial intern. conf. New Delhi (India), Dec. 1979. S. l.: South Asian Publ., 1982. P. 236–250.
- 5. Huth J. H. A note on plastic torsion // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. P. 432–434.
- 6. Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. N. Y.: McGraw-Hill, 1950.
- 7. Upadhyay P. C. Elasto-plastic torsion: M. Tech. thesis / Indian Inst. Technol. Kanpur, 1970.
- Dwivedi J. P., Singh A. N., Ram S., Talukder N. K. D. Springback analysis in torsion of rectangular strips // Intern. J. Mech. Sci. 1986. V. 28. P. 505–515.
- Dwivedi J. P., Sarkar P. K., Ram S., et al. Experimental aspects of torsional springback in rectangular strips // J. Inst. Engrs (India). 1970. V. 67. P. 70–73.
- Dwivedi J. P., Shukla A. K., Upadhyay P. C. Torsional springback of square section bars of linear work hardening materials // Comput. Structures. 1972. V. 45, iss. 3. P. 421–429.
- Dwivedi J. P., Upadhyay P. C., Talukder N. K. D. Torsional springback in square section bars of nonlinear work-hardening materials // Intern. J. Mech. Sci. 1990. V. 32, iss. 10. P. 863–876.
- Dwivedi J. P., Upadhyay P. C., Talukder N. K. D. Springback analysis of torsion of Lsectioned bars of work-hardening materials // Comput. Structures. 1992. V. 43, N 5. P. 815–822.
- Zhang Z., Hu S. Stress and residual stress distributions in plane strain bending // Intern. J. Mech. Sci. 1998. V. 40, N 6. P. 543–553.
- Kuwabara T. Advances in experiments on metal sheets and tubes in support of constitutive modeling and forming simulation // Intern. J. Plasticity. 2007. V. 23. P. 385–419.
- Yi H. K., Kim D. W., Tyne C. J. V., Moon Y. H. Analytical prediction of springback based on residual differential strain during sheet metal bending // J. Mech. Engng Sci. 2008. V. 222, N 2. P. 117–129.
- Megharbel A., Nasser A. G., Domiaty A. Bending of tube and section made of strainhardening materials // J. Mater. Proc. Technol. 2008. V. 203. P. 372–380.
- Da-xin E., Hau-hui H., Xiao-yi L., Ru-xin N. Experimental study and finite element analysis of springback deformation in tube bending // Intern. J. Minerals, Metallurgy Materials. 2009. V. 16, N 2. P. 177–183.
- Da-xin E., Liu Y. Springback and time-dependent springback of 1Cr18Ni9Ti stainless steel tubes under bending // Materials Design. 2009. V. 31. P. 1256–1261.
- 19. Choubey V. K., Gangwar M., Dwivedi J. P. Torsional springback analysis in thin tubes with non-linear work hardening // J. Mech. Engng. 2010. V. 7, N 1. P. 15–34.
- Choubey V. K., Gangwar M., Dwivedi J. P. Springback analysis of thin tubes // J. Mech. Engng. 2011. V. 7, N 2. P. 79–83.
- Choubey V. K., Gangwar M., Dwivedi J. P., Talukder N. K. D. Springback analysis of thin tubes with arbitrary stress-strain curves // J. Mech. Engng. 2009. V. 8, N 1. P. 105–109.

Поступила в редакцию 15/VIII 2013 г., в окончательном варианте — 18/XII 2014 г.