УДК 539.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О ДЕФОРМИРОВАНИИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается изотропная линейно-упругая (вязкоупругая) плоскость, содержащая различные эллиптические физически нелинейные включения, расстояния между центрами которых велико по сравнению с их размерами. Решается задача о выборе ориентации включений и нагрузок на бесконечности, обеспечивающих в каждом включении заранее заданную величину главного касательного напряжения. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи для случая несжимаемой неоднородной среды, находящейся в условиях плоской деформации.

Рассмотрим изотропную линейно-упругую плоскость с эллиптическими физически нелинейными включениями (ЭФНВ), различающимися механическими свойствами, размерами и ориентацией осей симметрии. В k-м ЭФНВ, которое обозначим через S_k^*, выберем систему координат $O_k x_{1k} x_{2k}$ так, чтобы уравнение границы L_k, отделяющей S_k^* от упругой среды S, имело вид $x_{1k}^2 a_k^{-2} + x_{2k}^2 b_k^{-2} = 1$, $a_k \geqslant b_k$ (здесь и далее по k суммирование не проводится).

Предположим, что расстояние между центрами двух произвольных ЭФНВ велико по сравнению с их размерами: $|\overline{O_k O_l}| \gg \max\limits_i a_i \ \forall k, l$. Поэтому взаимным влиянием ЭФНВ на напряженно-деформированное состояние любого другого включения можно пренебречь.

На бесконечности действуют равномерно распределенные напряжения, главные значения которых обозначим через N_1 и N_2, а угол между первой главной осью и осью $O_k x_{1k}$ — через α_k.

Считаем, что рассматриваемая область $S \cup S_k^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$ находится в условиях плоской деформации, причем упругая среда и все ЭФНВ являются несжимаемыми. Тогда в S связи между деформациями ε_{ij} и напряжениями σ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ в любой системе координат Ox_1x_2 будут иметь вид [1]

$$4\mu\varepsilon_{22} = -4\mu\varepsilon_{11} = \sigma_{22} - \sigma_{11}, \qquad 2\mu\varepsilon_{12} = \sigma_{12}, \tag{1}$$

где μ — модуль сдвига. (Заметим, что если μ заменить на $\mu(1 + K)$ (K — оператор Вольтерра [2]), то соотношения (1) будут соответствовать линейной вязкоупругой несжимаемой среде, находящейся в условиях плоской деформации.)

Предположим, что k-е включение является изотропным нелинейно-упругим (или подчиняющимся деформационной теории пластичности), так что определяющие уравнения в системе координат $O_k x_{1k} x_{2k}$ имеют вид

$$\begin{gathered} \varepsilon_{22k}^* = -\varepsilon_{11k}^* = F_k(\tau_k^*)(\sigma_{22k}^* - \sigma_{11k}^*)/2, \\ \varepsilon_{12k}^* = F_k(\tau_k^*)\sigma_{12k}^*, \quad 2\tau_k^* = [(\sigma_{22k}^* - \sigma_{11k}^*)^2 + 4\sigma_{12k}^{*2}]^{1/2} \quad (k = 1, 2, \ldots), \end{gathered} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00551, 00-15-96180, 02-01-00643).

где $F_k(\tau_k^*) > 0$ — заданная функция; τ_k^* — главное касательное напряжение. (Соотношения (2) можно усложнить, заменив их правые части соответствующими нелинейными операторами [1, 3].) Как и в [1, 3], деформации среды и ЭФНВ считаются малыми, на границах L_k ($k = 1, 2, \ldots$) поля нагрузок и перемещений непрерывны.

Так как по предположению взаимным влиянием включений пренебрегается, можно использовать установленные в [1, 3] зависимости, связывающие напряженно-деформированное состояние (в данном случае однородное) k-го ЭФНВ (в системе координат $O_k x_{1k} x_{2k}$) и нагрузки на бесконечности:

$$\begin{gathered}\mu(m_k\bar{C}_k + \bar{D}_k) = m_k A_k + B_k - 2(m_k\Gamma + \Gamma_k'), \quad \mu(\bar{C}_k + m_k\bar{D}_k) = -(A_k + m_k B_k) + 2\Gamma,\\ 2A_k = \sigma_{11k}^* + \sigma_{22k}^*, \quad 2B_k = \sigma_{22k}^* - \sigma_{11k}^* + 2i\sigma_{12k}^*, \quad C_k = \varepsilon_{11k}^* + \varepsilon_{22k}^* + 2i\varepsilon_k^*,\\ D_k = \varepsilon_{11k}^* - \varepsilon_{22k}^* + 2i\varepsilon_{12k}^*, \quad m_k = (a_k - b_k)/(a_k + b_k),\\ 4\Gamma = N_1 + N_2, \quad \Gamma_k' = \Gamma_0' \,\mathrm{e}^{-2i\alpha_k}, \quad 2\Gamma_0' = N_2 - N_1 \quad (k = 1, 2, \ldots),\end{gathered} \tag{3}$$

где ε_k^* — величина вращения в S_k^*; вращение на бесконечности $\varepsilon^\infty = 0$.

Сформулируем основную обратную задачу. Возможно ли (и при каких условиях) подобрать нагрузки N_1 и N_2 (в предположении, что главные направления заданы) и углы α_k так, чтобы в каждом включении главное касательное напряжение принимало требуемое значение, т. е. выполнялись равенства $\tau_k^* = \tau_{0k}$ (τ_{0k} — заданные величины, $k = 1, 2, \ldots$)?

Покажем, что при некоторых ограничениях решение сформулированной задачи существует. Учитывая, что согласно (2), (3) выполняются равенства $|B_k| = \tau_k^*$, $C_k = 2i\varepsilon_k^*$, $\bar{D}_k = -2F_k(\tau_k^*)B_k$, и полагая $B_k = \tau_{0k}\,\mathrm{e}^{i\varphi_k}$, из (3) находим

$$\begin{gathered}2\Gamma_0'\,\mathrm{e}^{-2i\alpha_k} = [(1 - m_k^2) + \beta_k(1 + m_k^2)]\tau_{0k}\,\mathrm{e}^{i\varphi_k} + 4i\mu m_k\varepsilon_k^*,\\ 2\Gamma = A_k + m_k(1 - \beta_k)\tau_{0k}\,\mathrm{e}^{i\varphi_k} - 2i\mu\varepsilon_k^*, \qquad \beta_k = 2\mu F_k(\tau_{0k}).\end{gathered} \tag{4}$$

Поскольку Γ, A_k — действительные величины, из второго соотношения (4) следует

$$2\mu\varepsilon_k^* = m_k(1 - \beta_k)\tau_{0k}\sin\varphi_k. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), имеем

$$\begin{gathered}2\Gamma_0'\cos 2\alpha_k = [(1 - m_k^2) + \beta_k(1 + m_k^2)]\tau_{0k}\cos\varphi_k,\\ -2\Gamma_0'\sin 2\alpha_k = [(1 + m_k^2) + \beta_k(1 - m_k^2)]\tau_{0k}\sin\varphi_k\end{gathered} \tag{6}$$

или в более удобном виде

$$2\Gamma_0'\tau_{0k}^{-1}\,\mathrm{e}^{-2i\alpha_k} = (1 + \beta_k)\,\mathrm{e}^{i\varphi_k} - m_k^2(1 - \beta_k)\,\mathrm{e}^{-i\varphi_k}.$$

Умножая это равенство на сопряженное, т. е. исключая α_k из (6), получим

$$(2\Gamma_0'\tau_{0k}^{-1})^2 = (1 + \beta_k)^2 - 2m_k^2(1 + \beta_k)(1 - \beta_k)\cos 2\varphi_k + m_k^4(1 - \beta_k)^2. \tag{7}$$

Из (7) находим

$$\cos 2\varphi_k = [(1 + \beta_k)^2 + m_k^4(1 - \beta_k)^2 - (2\Gamma_0'\tau_{0k}^{-1})^2]/[2m_k^2(1 + \beta_k)(1 - \beta_k)]. \tag{8}$$

Равенство (8) справедливо, если модуль его правой части не превышает единицы. Решая соответствующие неравенства и учитывая, что $1 + \beta_k > m_k^2|1 - \beta_k|$ (поскольку согласно (3), (4) $m_k^2 < 1$, $\beta_k > 0$), получим

$$\begin{gathered}F_{1k}(\tau_{0k}) \leqslant 2|\Gamma_0'| \leqslant F_{2k}(\tau_{0k}),\\ F_{1k} \equiv (1 + \beta_k - m_k^2|1 - \beta_k|)\tau_{0k}, \quad F_{2k} \equiv (1 + \beta_k + m_k^2|1 - \beta_k|)\tau_{0k}.\end{gathered} \tag{9}$$

Для того чтобы неравенства (9) были справедливы при любом k, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\max_k F_{1k} \leqslant 2|\Gamma_0'| \leqslant \min_k F_{2k}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что решение данной задачи существует, если

$$\max_k F_{1k}(\tau_{0k}) \leqslant \min_k F_{2k}(\tau_{0k}). \tag{11}$$

При выполнении (11) Γ_0' может принимать любое значение из интервала, заданного неравенствами (10), а угол φ_k определяется из (8) и в интервале $[-\pi, \pi]$ может принимать четыре значения, имеющие разные знаки и отличающиеся на величину $\pm\pi$. При известных Γ_0', φ_k угол α_k находится из (6) (каждому значению φ_k в том же интервале соответствуют два значения α_k, отличающиеся на π). Величину Γ можно задать в виде $\Gamma = \Gamma_0$ (Γ_0 — произвольная постоянная). Тогда A_k находится из второго равенства (4):

$$A_k = 2\Gamma_0 - m_k(1 - \beta_k)\tau_{0k}\cos\varphi_k.$$

Нетрудно показать, что при заданных Γ_0', α_k единственным образом определяются τ_k, φ_k, т. е. найденным величинам Γ_0', α_k соответствуют значения $\tau_k^* = \tau_{0k}$. Для этого достаточно установить, что система (6) однозначно разрешима относительно τ_{0k}, φ_k ($-\pi \leqslant \varphi_k \leqslant \pi$). При этом считается, что определяющие уравнения (2) для ЭФНВ удовлетворяют условиям устойчивости [4]

$$\Delta\sigma_{ijk}^*\Delta\varepsilon_{ijk}^* \geqslant 0$$

(по i, j проводится суммирование от 1 до 2, по k суммирование не проводится), которые в данном случае сводятся к выполнению неравенства [4, с. 129] $[\tau F_k(\tau)]' \geqslant 0$, т. е.

$$[\tau\beta_k(\tau)]' \geqslant 0 \tag{12}$$

(штрих означает дифференцирование по τ).

Из (6) получаем

$$(2\Gamma_0')^{-2} = f(\tau_{0k}) \equiv \frac{\cos^2 2\alpha_k}{[(1 - m_k^2)\tau_{0k} + (1 + m_k^2)\tau_{0k}\beta_k]^2} + \frac{\sin^2 2\alpha_k}{[(1 + m_k^2)\tau_{0k} + (1 - m_k^2)\tau_{0k}\beta_k]^2}.$$

Отсюда в силу (12) и неравенств $m_k^2 < 1$, $\beta_k > 0$ имеем $f'(\tau_{0k}) < 0$. Следовательно, существует обратная однозначная функция $\tau_{0k} = \tau_{0k}(\Gamma_0')$. При известных τ_{0k} из (6) единственным образом определяются $\cos\varphi_k$, $\sin\varphi_k$. Утверждение доказано.

Несмотря на то что условие (11) может накладывать жесткие ограничения на величины τ_{0k}, можно привести частный случай, когда неравенство (11) выполняется. Предположим, что все ЭФНВ имеют идентичные механические свойства, т. е. в (2) все $F_k = F$, и требуется подобрать такие напряжения N_1 и N_2 на бесконечности, чтобы во всех включениях величина τ_k^* была одной и той же: $\tau_k^* = \tau_0$. В этом случае $\beta_k = \beta_0 \equiv 2\mu F(\tau_0)$, условие (11) выполняется, а в качестве Γ_0' можно взять, например, $\Gamma_0' = (1 + \beta_0)\tau_0/2$. Тогда в силу (8)

$$\cos 2\varphi_k = m_k^2(1 - \beta_0)/(2(1 + \beta_0)),$$

что справедливо при любом τ, поскольку

$$|m_k^2(1 - \beta_0)/(2(1 + \beta_0))| < m_k^2/2 < 1/2,$$

так как $\beta_0 > 0$.

Как отмечалось выше, вместо соотношений (1), (2) можно взять более сложные: (1) заменить уравнениями линейной вязкоупругой среды, (2) — уравнениями нелинейного вязкоупругопластического включения (или, например, проявляющего свойства ползучести, а также повреждающегося и разрушающегося из-за ползучести включения). В этом случае величины β_k в (4) и всех последующих формулах заменяются на операторы Вольтерра. Для таких сред можно поставить задачу, аналогичную рассмотренной выше, — задачу об оптимальном деформировании во времени и разрушении ЭФНВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** К определению прочностных характеристик физически нелинейного включения в линейно-упругой среде // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 178–184.
2. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
3. **Цвелодуб И. Ю.** Физически нелинейное включение в линейно-упругой среде (плоская задача) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 72–84.
4. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.

Поступила в редакцию 15/VI 2001 г.,
в окончательном варианте — 4/III 2002 г.