

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ И АКУСТОГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛЯ—АТМОСФЕРА

**Б.Г. Михайленко, Г.В. Решетова**

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6, Россия*

Рассмотрен численно-аналитический метод решения задачи о распространении сейсмических и акустогравитационных волн для неоднородной модели Земля—атмосфера. Распространение сейсмических волн описывается системой динамических уравнений теории упругости первого порядка, распространение акустогравитационных волн в атмосфере — линеаризованными уравнениями Навье—Стокса. Алгоритм основан на комплексировании интегральных преобразований Лагерра по времени, конечных интегральных преобразований Бесселя по радиальной координате с конечно-разностным методом решения редуцированной задачи по вертикальной координате. Приведены примеры расчета сейсмических и акустогравитационных волн для неоднородной модели Земля—атмосфера при различных положениях источника.

*Сейсмические волны, акустогравитационные волны, преобразование Лагерра, конечно-разностный метод.*

## SIMULATION OF SEISMIC AND ACOUSTIC-GRAVITY WAVE PROPAGATION IN A HETEROGENEOUS 'EARTH-ATMOSPHERE' MODEL

**B.G. Mikhailenko and G.V. Reshetova**

A numerical-analytical solution for seismic and acoustic-gravity wave propagation is applied to a heterogeneous 'Earth-atmosphere' model. Seismic wave propagation in elastic Earth is described by a system of first-order dynamic equations of the elasticity theory and propagation of acoustic-gravity waves in the atmosphere by the linearized Navier-Stokes equations. The solution algorithm combines the time-domain integral Laguerre transform, the finite integral Bessel transform along the radial coordinate, and the FD solution of the reduced problem along the vertical coordinate. The suggested algorithm is tested with numerical experiments for the heterogeneous 'Earth-atmosphere model' for different source locations.

*Seismic waves, acoustic-gravity waves, Laguerre transform, finite-difference method*

### ВВЕДЕНИЕ

При математическом моделировании распространения сейсмических волн от землетрясений и взрывов обычно предполагают, что поверхность Земли граничит с вакуумом и вводятся соответствующие граничные условия на свободной поверхности. При этом пренебрегается эффектами генерации сейсмическими волнами акустогравитационных волн в неоднородной атмосфере и их взаимодействием при распространении вдоль границы Земля—атмосфера. Эти эффекты могут играть существенную роль для понимания волновых процессов в сейсморазведке, когда скорость упругих волн в зоне малых скоростей меньше или больше, чем скорость акустических волн в атмосфере.

С другой стороны, большое количество работ [1, 2] посвящено математическому моделированию процессов распространения акустогравитационных волн в атмосфере от естественных и искусственных источников. Исторически это было связано с развитием инфразвукового метода мониторинга воздушных ядерных взрывов. При решении этих задач граница Земля—атмосфера аппроксимировалась абсолютно отражающей границей, что исключает эффекты генерации сейсмических волн в земной коре.

В последнее десятилетие появились теоретические и экспериментальные работы, в которых показана высокая степень связи между волновыми процессами в литосфере и атмосфере. В частности, в работе [3] экспериментально зарегистрирован эффект акустосейсмической индукции, который заключается в том, что акустическая волна от мощного вибратора благодаря явлению рефракции в атмосфере возбуждает на расстоянии нескольких десятков километров интенсивные сейсмические поверхностные волны. Сейсмические волны в литосфере от землетрясений и взрывов генерируют акустогравитационные волны в атмосфере. В связи с экспоненциальным спаданием плотности атмосферы с высотой, амплитуда акустогравитационных волн в верхней атмосфере и ионосфере значительно возрастает. Это приводит к колебаниям плотности ионизированных частиц. Эти колебания уверенно регистрируются с помощью дистанционного доплеровского радиозондирования и используются для раннего обнаружения очага цунамигенного землетрясения [4]. Аналогичная методика используется для локации подземных ядерных

взрывов. В работе [5] показана связь длиннопериодных акустогравитационных колебаний атмосферы, вызванных пульсацией Земли, с последующими сильными землетрясениями.

Теоретическим исследованиям волновых процессов на границе упругого однородного полупространства с изотермической моделью однородной атмосферы посвящены работы [6, 7]. В них на основе метода контурного интегрирования и исследования дисперсионного уравнения для собственных решений вышеуказанной модели установлено существование поверхностной волны Стоунли—Шолтэ и модифицированной волны Лэмба и изучены их свойства.

В настоящей работе на основе численно-аналитического метода исследуются волновые процессы для неоднородной модели Земля—атмосфера. Алгоритм основан на комплексировании интегральных преобразований Бесселя по радиальной координате и преобразования Лагерра по времени с конечно-разностным методом по вертикальной координате. Для неоднородно-упругого полупространства вышеуказанный алгоритм предложен и развит в работах [8—10].

Особенностью алгоритма является применение преобразования Лагерра по временной координате. После преобразования Бесселя и с последующим применением конечно-разностного метода по вертикальной координате задача сводится к решению алгебраической системы уравнений, в которой параметр разделения  $p$  (степень полиномов Лагерра) присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Матрица в этом случае не зависит от параметров разделения в отличие от матрицы, которая получается после преобразования Фурье или Лапласа. Это позволяет использовать быстрые алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений для множества правых частей, например, на основе разложений по методу Холецкого.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система линеаризованных уравнений, описывающих распространение акустогравитационных волн для неоднородной модели атмосферы в цилиндрической системе координат  $(r, z)$ , имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z} - \rho g, \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_0^2 \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} u_z \right] - \frac{\partial P_0}{\partial z} u_z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \rho_0 \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] - \frac{\partial \rho_0}{\partial z} u_z + F(r, z, t). \quad (4)$$

Здесь  $u_r, u_z$  — компоненты скорости движения частиц воздуха в волне,  $P, \rho$  — соответственно возмущения давления и плотности под действием заданного распределения источника массы  $F(z, r, t) = \delta(z - z_0) f(t)$  (если источник возмущений находится в атмосфере),  $c_0(z)$  — скорость звука в атмосфере,  $g$  — ускорение силы тяжести. Считаем, что ось  $z$  направлена вверх. Нулевыми индексами обозначены величины, относящиеся к среднему невозмущенному состоянию атмосферы. Зависимость значений атмосферного давления  $P_0$  и плотности атмосферы  $\rho_0$  от высоты  $z$  определяется соотношением  $P_0, \rho_0 \sim \exp(-z/H)$ , где  $H$  — высота изотермической однородной атмосферы. Для покоящейся атмосферы в однородном поле силы тяжести имеет место формула

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = - \rho_0 g \quad \text{и} \quad \rho_0(z) = \rho_1 \exp(-z/H),$$

где  $\rho_1$  — плотность при  $z = 0$  (граница Земля—атмосфера).

Система уравнений теории упругости первого порядка, описывающая распространение сейсмических волн для неоднородной модели Земли в цилиндрической системе координат, записывается в виде

$$\rho_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho_0 F_z(r, z, t), \quad (5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho_0 F_r(r, z, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (10)$$

В этих уравнениях  $u_r, u_z$  — компоненты скорости смещения упругой среды,  $\sigma_{zz}, \sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta\theta}$  — компоненты тензора напряжений,  $\rho_0(z)$  — плотность упругой среды,  $\lambda(z)$  и  $\mu(z)$  — коэффициенты Ламе. При этом  $F_z, F_r$  — составляющие силы  $\mathbf{F}(z, r, t) = F_z(z, r, t) \mathbf{e}_z + F_r(z, r, t) \mathbf{e}_r$ , описывающие распределение локализованного в пространстве источника типа „центр давления“, „вертикальная сила“ или „диполь без момента“ (если источник находится в упругой среде). Например, в случае источника типа „центр давления“ компоненты силы  $\mathbf{F}(z, r, t)$  имеют вид

$$F_z(z, r, t) = \frac{\partial(r)}{2\pi r} \frac{d}{dz} \delta(z - z_0) f(t),$$

$$F_r(z, r, t) = \frac{d}{dr} \frac{\partial(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0) f(t). \quad (11)$$

Функция  $f(t)$  является временным сигналом в источнике. Для формального описания источников мы применили выражения, содержащие обобщенные функции и производные от них. При численном решении для обобщенных функций вводятся соответствующие гладкие аналоги.

Уравнения (1)—(4) и (5)—(10) решаются при нулевых начальных данных в атмосфере

$$u_z|_{t=0} = u_r|_{t=0} = P|_{t=0} = \rho|_{t=0} \quad (12)$$

и упругом полупространстве

$$u_z|_{t=0} = u_r|_{t=0} = \sigma_{zz}|_{t=0} = \sigma_{rr}|_{t=0} = \sigma_{rz}|_{t=0} = \sigma_{\theta\theta}|_{t=0} = 0, \quad (13)$$

а также при условии согласования на границе Земля—атмосфера

$$u_z|_{\text{Земля}} = u_z|_{\text{атм}}; \quad \left. \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right|_{\text{Земля}} = - \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P_0}{\partial z} u_z \right) \Big|_{\text{атм}}, \quad \sigma_{rz}|_{\text{Земля}} = 0. \quad (14)$$

Для удобства будем считать, что граница сред проходит по линии  $z = 0$ .

Для компактности дальнейших выкладок запишем системы уравнений (1)—(4) и (5)—(10) в виде одной системы:

$$\rho_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - U \cdot \rho g + L \frac{\delta(r)}{2\pi r} \frac{d}{dz} \delta(z - z_0) f(t), \quad (15)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + L \frac{d}{dr} \frac{\partial(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0) f(t), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - U \cdot \rho_0 g u_z - U \cdot c_0^2 \delta(z - z_0) f(t), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right) - U \cdot \rho_0 g u_z - U \cdot c_0^2 \delta(z - z_0) f(t), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - U \cdot \rho_0 g u_z - U \cdot c_0^2 \delta(z - z_0) f(t), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (20)$$

$$U \left[ \frac{\partial P}{\partial t} = - \rho_0 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial \rho_0}{\partial z} u_z + \delta(z - z_0) f(t) \right]. \quad (21)$$

Система (1) — (4) для атмосферы получается из (15) — (21), если полагать

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} = -P, \quad \mu = 0, \quad \lambda = c_0^2 \rho_0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad L = 0, \quad U = 1.$$

Система (5) — (10) для Земли получается из (15) — (21), если полагать  $L = 1, U = 0$ .

При моделировании распространения акустических волн в океане в уравнениях (5) — (10) полагаем  $\mu = 0$ .

Условие контакта двух сред при  $z = 0$  записывается в виде

$$u_z|_{z=0} = u_z|_{z=0}; \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t}|_{z=0} = \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + \rho_0 g u_z \right)|_{z=0}; \quad \sigma_{rz}|_{z=0} = 0. \quad (22)$$

#### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

На первом этапе решение задачи (15) — (21) с нулевыми начальными данными и граничным условием (22) ищем в виде рядов Фурье—Бесселя:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{\sigma}_{rz} \end{pmatrix} \frac{J_1(k_n r)}{(J_0(k_n a))^2}, \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ \rho \end{pmatrix} = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{u}_z \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ Q_5 \end{pmatrix} \frac{J_0(k_n r)}{(J_0(k_n a))^2}, \quad (24)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (k_n Q_3 + Q_4) \frac{J_0(k_n r)}{(J_0(k_n a))^2} - \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} Q_3 \frac{J_1(k_n r)}{(J_0(k_n a))^2}, \quad (25)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} Q_3 \frac{J_1(k_n r)}{(J_0(k_n a))^2} + \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_4 \frac{J_0(k_n r)}{(J_0(k_n a))^2}, \quad (26)$$

где  $k_n$  — корни уравнения  $J_1(k_n a) = 0$ ,  $a$  — интервал решения задачи по радиальной координате  $0 \leq r \leq a$ . Коэффициенты  $\bar{u}_z, \bar{u}_r, \bar{\sigma}_{rz}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, Q_3, Q_4, Q_5$  в разложениях (23) — (26) являются функциями от  $(n, z, t)$ .

После преобразования Бесселя получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial z} - \frac{k_n}{\rho_0} \bar{\sigma}_{rz} + U \frac{g}{\rho_0} Q_5 = L \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \delta(z - z_0) f(t), \quad (27)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \frac{k_n}{\rho_0} (k_n Q_3 + Q_4) = -L \frac{1}{2\pi} k_n \delta(z - z_0) f(t), \quad (28)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial t} - \rho_0 c_p^2 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} - k_n \rho_0 (c_p^2 - 2c_s^2) \bar{u}_r + U \cdot \rho_0 g \bar{u}_z = -U \cdot c_0^2 \delta(z - z_0) f(t), \quad (29)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial t} - \rho_0 c_s^2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + k_n \rho_0 c_s^2 \bar{u}_z = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial t} - 2\rho_0 c_s^2 \bar{u}_r = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial Q_4}{\partial t} - \rho_0 (c_p^2 - 2c_s^2) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} - k_n \rho_0 (c_p^2 - 2c_s^2) \bar{u}_r + U \cdot \rho_0 g \bar{u}_z = -U \cdot c_0^2 \delta(z - z_0) f(t), \quad (32)$$

$$\frac{\partial Q_5}{\partial t} + \frac{1}{(c_p^2 - 2c_s^2)} \frac{\partial Q_4}{\partial t} + \frac{\rho_0 g}{(c_p^2 - 2c_s^2)} \bar{u}_z + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \bar{u}_z = 0. \quad (33)$$

Последнее уравнение для  $Q_5$  было преобразовано из исходного

$$\frac{\partial Q_5}{\partial t} = -\rho_0 \left( \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + k_n \bar{u}_r \right) - \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \bar{u}_z + U \cdot \delta(z - z_0) f(t) = 0. \quad (34)$$

В приведенных уравнениях введено обозначение  $c_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$ ,  $c_s^2 = \mu/\rho_0$ .

Условие контакта двух сред при  $z = 0$  переписуется в виде

$$\bar{u}_z|_{z=0} = \bar{u}_z|_{z=0}; \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial t} \Big|_{z=0} = \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial t} + \rho_0 g \bar{u}_z \right) \Big|_{z=0}; \quad \bar{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0. \quad (35)$$

На втором этапе воспользуемся преобразованием Лагерра по времени

$$\tilde{U}^p(n, z, p) = \int_0^{\infty} (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_p^{\alpha}(ht) \bar{U}(n, z, t) d(ht), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

с формулой обращения

$$\bar{U}(n, z, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{(p+\alpha)!} l_p^{\alpha}(ht) \tilde{U}^p(n, z, p), \quad (37)$$

где  $\bar{U}(n, z, t) = (\bar{u}_r, \bar{u}_z, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\sigma}_{rz}, Q_3, Q_4, Q_5)^T$ ,  $\tilde{U}(n, z, p) = (\tilde{u}_r^p, \tilde{u}_z^p, \tilde{\sigma}_{zz}^p, \tilde{\sigma}_{rz}^p, \tilde{Q}_3^p, \tilde{Q}_4^p, \tilde{Q}_5^p)^T$ , функции  $l_p^{\alpha}(t)$  — являются ортогональными функциями Лагерра:

$$l_p^{\alpha}(ht) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{ht}{2}} L_p^{\alpha}(ht), \quad (38)$$

выраженные через классические обобщенные многочлены Лагерра  $L_p^{\alpha}(ht)$ , масштабированные по времени, с параметром масштабирования  $h > 0$ .

После преобразования Лагерра имеем следующую систему уравнений, где индекс  $p$  в обозначении компонент  $\tilde{u}_r^p, \tilde{u}_z^p, \tilde{\sigma}_{zz}^p, \dots$  опускаем:

$$\frac{h}{2} \tilde{u}_z - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} - \frac{k_n}{\rho_0} \tilde{\sigma}_{rz} + U \frac{g}{\rho_0} \tilde{Q}_5 = L \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \delta(z - z_0) f_p - h \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{u}_z^j, \quad (39)$$

$$\frac{h}{2} \tilde{u}_r - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{rz}}{\partial z} - \frac{k_n}{\rho_0} (k_n \tilde{Q}_3 + \tilde{Q}_4) = -L \frac{1}{2\pi} k_n \delta(z - z_0) f_p - h \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{u}_r^j, \quad (40)$$

$$\frac{h}{2} \tilde{\sigma}_{rz} - \rho_0 c_s^2 \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} + k_n \rho_0 c_s^2 \tilde{u}_z = -h \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{\sigma}_{zz}^j, \quad (41)$$

$$\frac{h}{2} \tilde{Q}_3 - 2\rho_0 c_s^2 \tilde{u}_r = -h \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{Q}_3^j, \quad (42)$$

$$\frac{h}{2} Q_4 - \rho_0 (c_p^2 - 2c_s^2) \frac{\partial u_z}{\partial z} - k_n \rho_0 (c_p^2 - 2c_s^2) u_r - U \rho_0 g u_z = -U c_p^2 f_p \delta(z - z_0) - h \sum_{j=0}^{p-1} Q_4^j, \quad (43)$$

$$\frac{h}{2} \tilde{Q}_5 + \frac{1}{(c_p^2 - 2c_s^2)} \frac{\partial \tilde{Q}_4}{\partial t} + \frac{g \rho_0}{(c_p^2 - 2c_s^2)} \tilde{u}_z + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \tilde{u}_z = -h \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{Q}_5^j, \quad (44)$$

где  $f_p$  — есть коэффициент разложения по функциям Лагерра импульса  $f(t)$  в источнике. В этой системе  $\tilde{u}_z, \tilde{u}_r, \tilde{\sigma}_{rz}, \tilde{\sigma}_{zz}, \tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\theta\theta}, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4, \tilde{Q}_5$  суть функции от  $(n, z, p)$ .

Условие контакта двух сред при  $z = 0$  после преобразования Лагерра переписутся в виде

$$\tilde{u}_z|_{z=0} = \tilde{u}_z|_{z=0}; \quad \frac{h}{2} \tilde{\sigma}_{zz} + h \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{\sigma}_{zz}^j \Big|_{z=0} = \left( \frac{h}{2} \tilde{\sigma}_{zz} + h \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{\sigma}_{zz}^j + \rho_0 g \tilde{u}_z \right) \Big|_{z=0}; \quad \tilde{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0. \quad (45)$$

Для конечно-разностной аппроксимации системы линейных алгебраических уравнений (39) — (45) относительно переменной  $z$  нами использовалась широко известная схема „staggered grid“ на сдвинутых сетках [11], обеспечивающая второй порядок аппроксимации. Эта схема используется для конечно-разностной аппроксимации внутри расчетных областей в атмосфере и упругом полупространстве, а условия согласования на границе раздела сред удовлетворяются точно.

Заметим, что в полученной системе алгебраических уравнений параметр разделения  $p$  (степень полинома Лагерра) присутствует в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Матрица в этом случае не зависит от параметра разделения, что дает возможность использовать быстрые алгоритмы

решения на основе разложения по схеме Холецкого. Нами использовался метод, основанный на представлении матрицы системы в виде произведения верхней и нижней треугольных матриц. Данный алгоритм позволяет учитывать ленточную структуру матрицы системы при ее разложении на нижнюю и верхнюю треугольные, которые в результате имеют также ленточную структуру. При этом мы находим решение системы (39) — (44) одновременно для многих правых частей или, другими словами, для многих параметров  $p$ , после чего суммируем решения по формуле обращения (37). Вышеуказанный вычислительный процесс мы повторяем для различных корней  $k_n$  уравнения Бесселя для того, чтобы с помощью рядов (23) — (26) вернуться к компонентам смещения, давления и напряжения. Заметим, что ряды (23) — (26) и (37) экспоненциально сходятся с увеличением параметров  $k_n$  и  $p$ . Это дает возможность контролировать погрешность, возникающую при отбрасывании остатка ряда. В наших расчетах эта погрешность на порядок меньше, чем погрешность, возникающая при конечно-разностной аппроксимации производных по координате  $z$  в уравнениях (39) — (44).

Спецификой поставленной задачи является необходимость моделирования совместных волновых процессов в атмосфере и упругом неоднородном полупространстве. При этом скорость распространения волн в атмосфере в 10—15 раз меньше, чем в полупространстве. Поэтому для изучения волновых явлений необходимо использовать большие промежутки времени, а следовательно, и большие пространственные области. Для ограничения расчетной области в атмосфере и упругом полупространстве вводятся поглощающие слои со специальным образом подобранными параметрами, от которых нет отражений. Впервые такой алгоритм „perfectly matched layer“ (PML) был предложен в работе [12] для численного моделирования распространения электромагнитных волн и для расчета упругих волновых полей в [13]. Основным преимуществом PML по сравнению с другими методами является тот факт, что затухание волн внутри слоя происходит независимо от направления распространения волн. В данной работе метод PML, предложенный для решения нестационарных задач, адаптирован для системы уравнений в атмосфере и упругом полупространстве, которые возникают после применения интегрального преобразования Лагерра по временной координате. В отличие от использования PML во временной области, нам удалось добиться устойчивости алгоритма для достаточно узких поглощающих слоев (меньше длины волны) в независимости от длительности расчетов по времени. Более детально алгоритм для системы уравнений теории упругости изложен в работе [14].

### ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На основании вышеизложенного алгоритма была разработана компьютерная программа, которая позволяет исследовать волновые процессы для упругой неоднородной модели Земли и неоднородной атмосферы при произвольном расположении источника. Программа легко распараллеливается на многопроцессорных ЭВМ.

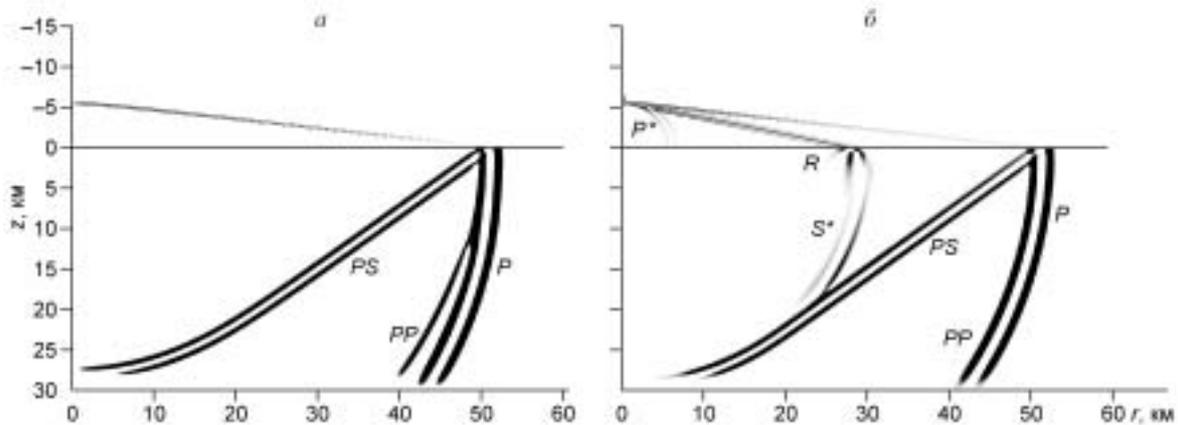
При численном моделировании взаимодействия сейсмических и акустогравитационных волн для неоднородной модели Земля—атмосфера, волновая картина существенно меняется в зависимости от доминирующей частоты в источнике. При низких частотах (периоды волн более 100 с) возникают акустогравитационные волны, которые значительно усложняют волновую картину. В данной работе мы ограничимся моделированием взаимодействия сейсмических и акустических волн для высоких частот (ГСЗ и сейсморазведка).

Для понимания волновых процессов, происходящих в Земле и атмосфере, мы начнем с простых однородных моделей упругого полупространства, граничащего с атмосферой, в которой скорость звука постоянна, а плотность экспоненциально убывает с высотой. Скорость распространения продольных волн в полупространстве  $c_p = 3000$  м/с, скорость поперечных волн  $c_s = 1760$  м/с, плотность  $\rho_0 = 2,3$  г/см<sup>3</sup>. Скорость распространения акустических волн в атмосфере  $c_0 = 340$  м/с, плотность  $\rho_0 = 0,001225$  г/см<sup>3</sup> (при  $z = 0$ ). Источник типа „центр давления“ расположен в упругом полупространстве и излучает импульс в виде

$$f(t) = \exp \left[ -\frac{(2\pi f_0(t-t_0))^2}{\gamma^2} \right] \sin(2\pi f_0(t-t_0)), \quad (46)$$

где  $\gamma = 4$ ,  $f_0 = 1$  Гц,  $t_0 = 1,5$  с.

На рис. 1,а приведен численный снимок в момент времени  $t = 20$  с для горизонтальной компоненты скорости смещения в упругом полупространстве и давления в атмосфере. Источник типа „центр давления“ расположен в упругом полупространстве на глубине  $z = 3000$  м ( $1\lambda$ , где  $\lambda$  — доминирующая длина волны  $P$ ). В нем распространяются прямая продольная  $P$ -волна и отраженная  $PP$ -волна от границы с атмосферой и затем обменная  $PS$ -волна. В атмосфере распространяется коническая волна.



**Рис. 1. Численный снимок в момент времени  $t = 20$  с для горизонтальной компоненты скорости смещения  $u_r$  в упругом полупространстве и давления  $P$  в атмосфере.**

Источник типа „центр давления“ расположен в упругом полупространстве на расстоянии от границы раздела Земля—атмосфера:  $a$  — 3000 м ( $1\lambda$ ),  $b$  — 750 м ( $1/4\lambda$ ), где  $\lambda$  — доминирующая длина продольной волны в полупространстве.

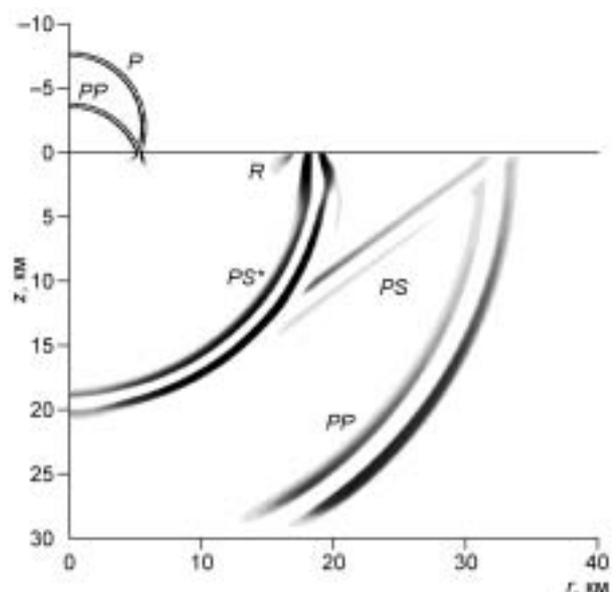
Волновая картина усложняется, если источник типа „центр давления“ находится вблизи свободной поверхности на глубине 750 м ( $1/4\lambda$ ).

На рис. 1,  $b$  приведен численный снимок с параметрами, подобными рис. 1,  $a$ , но в упругом полупространстве кроме классических волн  $P$ ,  $PP$  и  $PS$  возникает „нелучевая“ волна  $S^*$ , связанная с неоднородными продольными плоскими волнами, возникающими в источнике [15, 16] и экспоненциально убывающими с расстоянием. На расстоянии меньше длины волны от источника эти неоднородные волны играют существенную роль в формировании волнового поля. Как видно из рис. 1,  $b$ , „нелучевая“ волна  $P^*$  возникает и в атмосфере. Кроме того, на поверхности Земля—атмосфера распространяется поверхностная волна Стоунли—Шолтэ, а в атмосфере серия конических волн.

При тех же параметрах в модели Земля—атмосфера рассмотрим волновую картину (рис. 2), когда источник расположен в атмосфере на высоте 2 км (около  $6\lambda$ , где  $\lambda$  — доминирующая длина волны в атмосфере). Оказалось, что даже при таком удалении источника от границы, неоднородные плоские волны весьма интенсивны. Дело в том, что экспоненциальное убывание амплитуды неоднородных плоских волн зависит не только от расстояния, но и от параметров среды, которые входят в показатель экспоненты [17]. Заметим, что плотность атмосферы более чем в тысячу раз меньше плотности упругой среды.

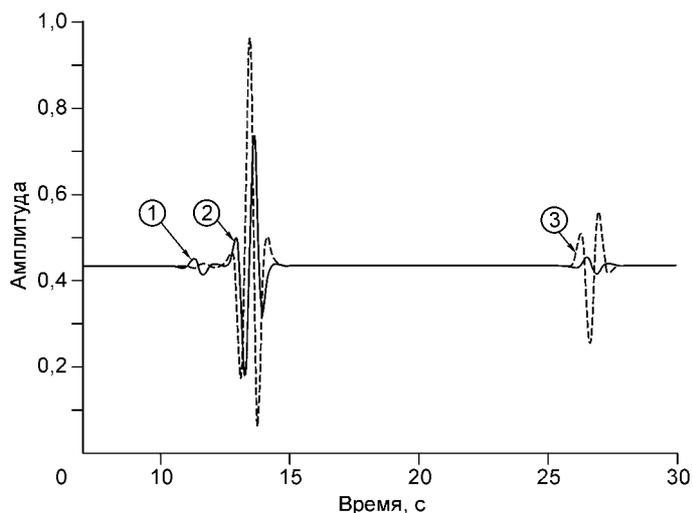
Численный снимок для давления в момент времени  $t = 20$  с представлен на рис. 2. Из него видно, что в упругой среде кроме преломленных волн  $PP$  и  $PS$  распространяется „нелучевая“ волна  $PS^*$ , вызванная взаимодействием неоднородных продольных плоских волн с упругой средой над источником (см. рис. 3). В атмосфере распространяется прямая волна  $P$  из источника и отраженная  $PP$  от границы раздела Земля—атмосфера. Для этого случая рассмотрим теоретическую сейсмограмму на границе Земля—атмосфера.

На рис. 3 представлены вертикальная и горизонтальная компоненты смещения для вышеуказанной модели на границе раздела. Как видно в первых



**Рис. 2. Численный снимок в момент времени  $t = 20$  с для компоненты напряжения  $\sigma_{zz}$  в упругом полупространстве и давления  $P$  в атмосфере.**

Источник типа „центр давления“ расположен в атмосфере на расстоянии 2000 м (около  $6\lambda$ , где  $\lambda$  — доминирующая длина продольной волны в атмосфере) от границы раздела Земля—атмосфера.



**Рис. 3.** Теоретические сейсмограммы вертикальной и горизонтальной (сплошная линия) компонент скорости смещения на границе раздела на расстоянии 7800 м.

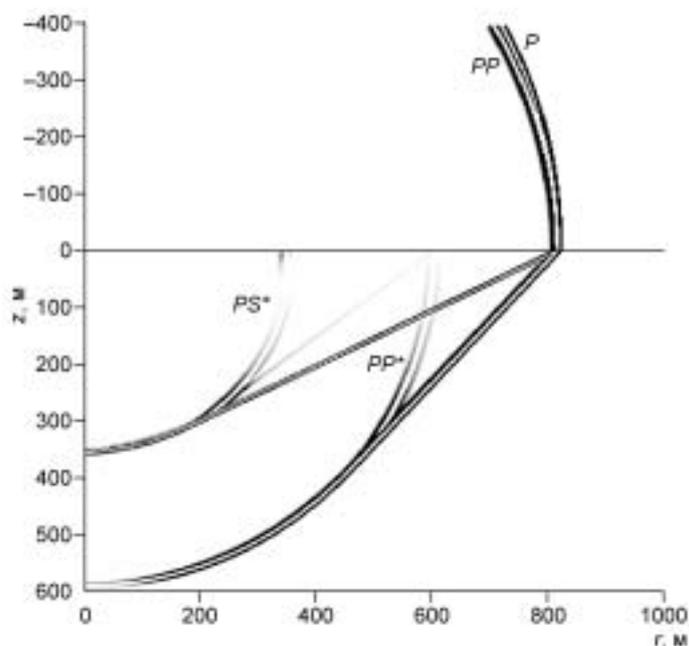
Источник типа „центр давления“ расположен в атмосфере на расстоянии 2000 м (около  $6\lambda$ , где  $\lambda$  — доминирующая длина продольной волны в атмосфере) от границы раздела Земля—атмосфера. 1—3 — пояснения в тексте.

вступлении регистрируется продольная головная волна  $P$  (см. рис. 3, цифра 1), которая распространяется в полупространстве. Далее следует волна Стоунли—Шолтэ, а затем регистрируется звуковая волна (цифра 3). Заметим, что поляризация звуковой волны при падении на упругое полупространство ста-

новится эллиптической. Можно предположить, что это связано с тем, что граница между атмосферой и упругим полупространством является границей с проскальзыванием. Особо следует отметить существенную интенсивность поверхностной волны Стоунли—Шолтэ, хотя источник расположен на значительном расстоянии от границы (около  $6\lambda$ , где  $\lambda$  — доминирующая длина звуковой волны в атмосфере). По-видимому, интенсивность этой волны связана со слабым затуханием неоднородных плоских волн от источника в атмосфере, где в показатель экспоненты входят расстояние и плотность, а, как известно, плотность атмосферы намного меньше плотности упругой среды.

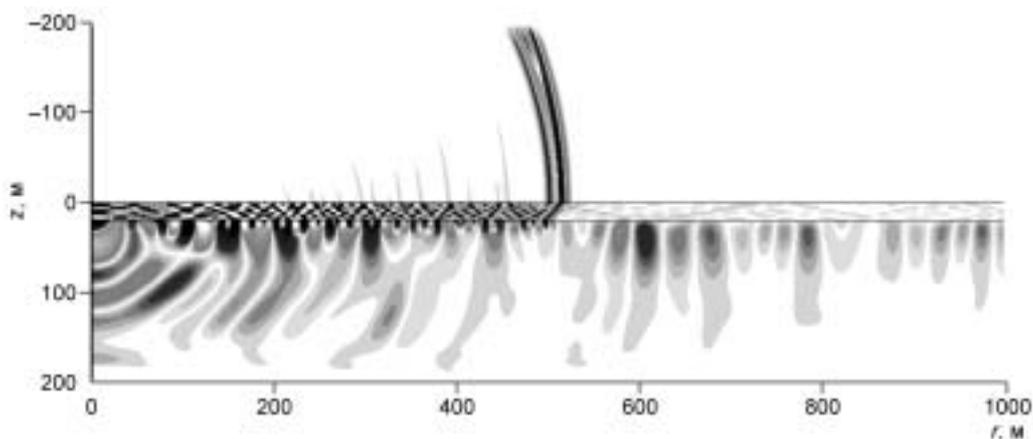
Рассмотрим некоторые примеры расчета волновых полей для высоких частот, типичных для сейсморазведки. Возьмем доминирующую частоту в импульсе (46)  $f_0 = 20$  Гц. Источник типа „центр давления“ расположен в атмосфере на расстоянии 10 м от границы раздела Земля—атмосфера. Параметры атмосферы оставим неизменными, а в упругом полупространстве возьмем скорости продольных и поперечных волн меньше, чем в атмосфере:  $c_p = 250$  м/с,  $c_s = 150$  м/с и  $\rho_0 = 1,7$  г/см<sup>3</sup>. Такая модель является типичной для сейсморазведки, когда имеется зона малых скоростей (ЗМС).

На рис. 4 приведен численный снимок для компоненты давления в момент времени  $t = 2,5$  с. Как видно, в упругом полупространстве возникают „нелучевые“ волны  $PP^*$  и  $PS^*$ , а также продольные и поперечные конические волны. Они формируют волновую картину, если такой слой мощностью 20 м лежит на упругом полупространстве со скоростями продольных и поперечных волн, которые выше, чем в атмосфере и в ЗМС. Скорость продольных и поперечных волн в полупространстве:  $c_p = 2500$  м/с,  $c_s = 1500$  м/с,  $\rho_0 = 2,3$  г/см<sup>3</sup>. Для данной модели численный снимок вертикальной компоненты скорости смещения в полупространстве и компоненты давления в атмосфере для момента времени  $t = 1,6$  с приведен на рис. 5. Теоретические сейсмограммы вертикальной компоненты скорости смещения на поверхности раздела Земля—атмосфера для вышеуказанной модели приведены на рис. 6.



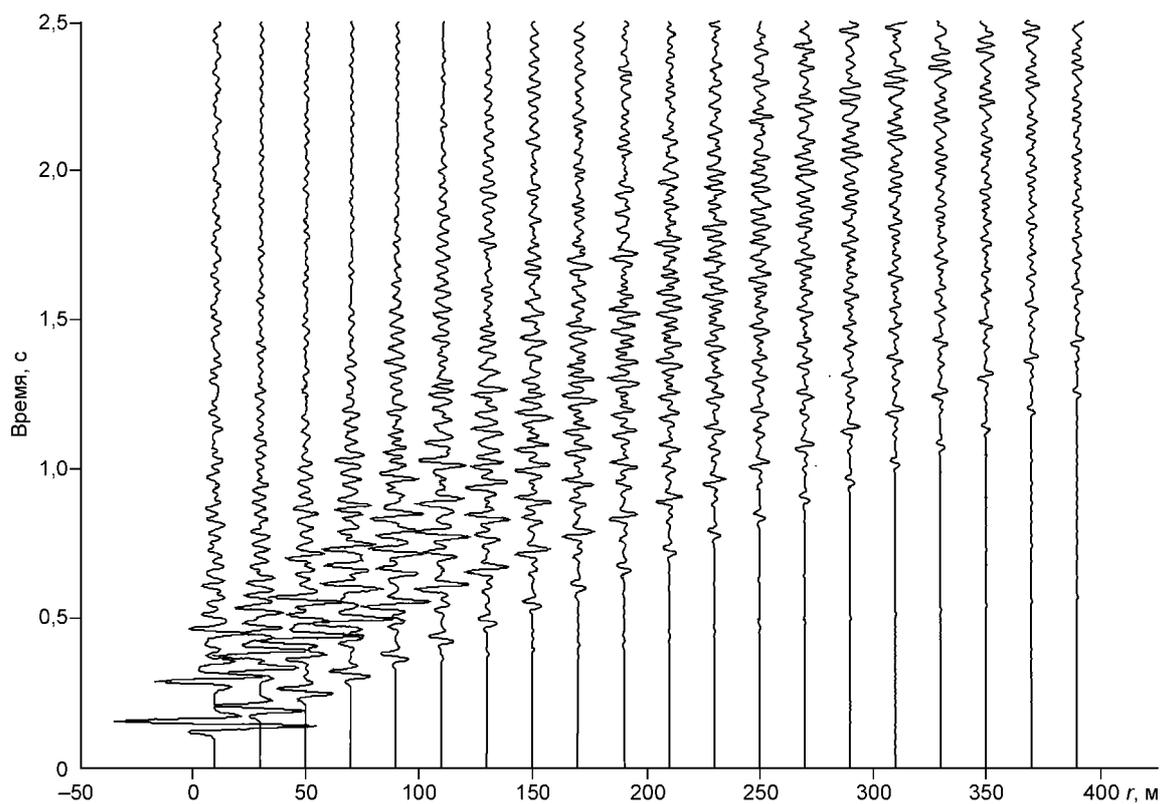
**Рис. 4.** Численный снимок в момент времени  $t = 2,5$  с для компоненты напряжения  $\sigma_{zz}$  в упругом полупространстве и давления  $P$  в атмосфере.

Источник типа „центр давления“ расположен в атмосфере на расстоянии 10 м (около  $1/2\lambda$ , где  $\lambda$  — доминирующая длина продольной волны в атмосфере) от границы раздела Земля—атмосфера.



**Рис. 5. Численный снимок в момент времени  $t = 1,6$  с для вертикальной компоненты скорости смещения в упругом полупространстве и ЗМС, а также давления  $P$  в атмосфере.**

Источник типа „центр давления“ расположен в атмосфере на расстоянии 10 м (около  $1/2\lambda$ , где  $\lambda$  — доминирующая длина продольной волны в атмосфере) от границы раздела Земля—атмосфера.



**Рис. 6. Теоретические сейсмограммы вертикальной компоненты скорости смещения на границе раздела на различных расстояниях, начиная с 10 м с шагом 20 м.**

Источник типа „центр давления“ расположен в атмосфере на расстоянии 10 м (около  $1/2\lambda$ , где  $\lambda$  — доминирующая длина продольной волны в атмосфере) от границы раздела Земля—атмосфера.

**Вывод.** В работе предложен численно-аналитический алгоритм решения задачи по моделированию распространения сейсмических и акустогравитационных волн для неоднородной модели Земля—атмосфера. Приведены примеры расчета волновых полей для простых моделей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 04-05-64177.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Francis S.H.** Global propagation of atmospheric gravity waves: A review // *J. Atmos. Terr. Phys.*, 1975, v. 37, p. 1011—1054.
2. **Gossaro E., Hooken W.H.** *Waves in the atmosphere.* Elsevier Scientific Publishing Company, 1975, p. 532.
3. **Алексеев А.С., Глинский Б.М., Дряхлов С.И. и др.** Эффект акустосейсмической индукции при вибросейсмическом зондировании // *Докл. РАН*, 1996, т. 346, № 5, с. 664—667.
4. **Artru J., Ducic V., Kanamori H. et al.** Ionospheric detection of gravity waves induced by tsunamis // *Geophys. J. Int.*, 2005, v. 160, p. 840—848.
5. **Линьков Е.М., Петрова А.Н., Осипов К.С.** Сейсмогравитационные пульсации Земли и возмущения атмосферы как возможные предвестники сильных землетрясений // *Докл. АН СССР*, 1990, т. 313, № 5, с. 1095—1098.
6. **Гасилова Л.А., Петухов Ю.В.** К теории поверхностных волн, распространяющихся вдоль разных границ раздела в атмосфере // *Изв. РАН, Физика атмосферы и океана*, 1999, т. 35, № 1, с. 14—23.
7. **Разин А.В.** Распространение сферичного акустического дельта-импульса вдоль границы газ—твердое тело // *Изв. РАН, Физика Земли*, 1993, № 2, с. 73—77.
8. **Konyukh G.V., Mikhailenko B.G.** Application of the Laguerre integral transform for solving dynamic seismic problems // *Bull. of the Novosibirsk Computing Center, Series: Mathematical Modeling in Geophysics*, 1998, № 4, p. 79—91.
9. **Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximation solution of time-dependent problems // *Appl. Math. Lett.*, 1999, v. 12, p. 105—110.
10. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V.** Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // *Pure Appl. Geophys.*, 2003, v. 160, p. 1207—1224.
11. **Virieux J. P.**, *SV-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method* // *Geophysics*, 1986, v. 51, p. 889—901.
12. **Berenger J.P.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *J. Comput. Phys.*, 1994, v. 114, p. 185—200.
13. **Collino F., Tsogka C.** Application of PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media // *Geophysics*, 2001, v. 66, p. 294—307.
14. **Mikhailenko B.G., Reshetova G.V.** The perfectly matched layers technique in 3D seismic modeling // *Proc. Intern. Symp. on Mathematical Modeling of Dynamic Processes in Atmosphere, Ocean, and Solid Earth.* Novosibirsk, 2004, p. 91—97.
15. **Hron F., Mikhailenko B.G.** Numerical modeling of nongeometrical effects by the Alekseev—Mikhailenko method // *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 1981, v. 71, № 4, p. 1011—1029.
16. **Алексеев А.С., Михайленко Б.Г.** „Нелучевые“ эффекты в теории распространения сейсмических волн // *Докл. АН СССР*, 1982, т. 267, с. 1079—1083.
17. **Бреховских Л.М., Годин О.А.** *Акустика слоистых сред.* М., Наука, 1989, 214 с.

*Поступила в редакцию  
20 октября 2005 г.*