

..., $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $x > x_{i+2}$, движущихся относительно друг друга со скоростями U_k ($k = 1, \dots, i+2$).

Для простоты рассмотрим без ограничения общности случай, когда верхняя область $x < 0$ покоится, пристыкованная к ней бесконечная полоса $0 \leq x \leq x_0$ движется в сторону вдоль стыка со скоростью \hat{v}_1 , а нижняя область $x > x_0$, примыкающая к бесконечной полосе, движется со скоростью \hat{v}_2 относительно неподвижной области. Течение вдоль оси x не изменится, а течение вдоль оси z можно найти из решения следующей задачи:

$$(15) \quad \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left(-\frac{y^2}{2} + y \right) \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right);$$

$$(16) \quad y = 0 \quad v_z = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \hat{v}_1, & 0 < x < x_0, \\ \hat{v}_2, & x > x_0, \end{cases} \quad y = 1 \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0;$$

$$(17) \quad x \rightarrow -\infty \quad v_z \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad v_z \rightarrow \hat{v}_2.$$

Так как уравнение (15) и граничные условия (16), (17) линейные, то решение задачи (15)–(17) можно искать в виде суммы решений двух задач: решение первой задачи описывает течение на плоскости, состоящей из двух плотно состыкованных полуплоскостей: верхняя покоится, а нижняя движется со скоростью \hat{v}_1 , решение второй задачи описывает течение, в котором верхняя область $x < x_0$ неподвижна, а нижняя движется со скоростью \hat{v}_3 такой, что $\hat{v}_1 + \hat{v}_3 = \hat{v}_2$. Таким образом, решение задачи (15)–(17) сводится к решению следующих задач:

уравнения (15) с граничными условиями

$$y = 0 \quad v_z = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \hat{v}_1, & x > 0, \end{cases} \quad y = 1 \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0, \\ x \rightarrow -\infty \quad v_z \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad v_z \rightarrow \hat{v}_1;$$

уравнения (15) с граничными условиями

$$y = 0 \quad v_z = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ \hat{v}_3, & x > x_0, \end{cases} \quad y = 1 \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0, \\ x \rightarrow -\infty \quad v_z = 0, \quad x \rightarrow \infty \quad v_z \rightarrow \hat{v}_3, \quad \hat{v}_3 = \hat{v}_2 - \hat{v}_1.$$

Указанный метод может быть обобщен на случай нескольких областей, движущихся относительно друг друга.

Поступила 12 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА]

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
2. Астафин В. С., Королев И. О., Рязанцев Ю. С. О температуре потока в канале со скачком температуры на стенке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5.
3. Галин Н. М. О теплообмене при ламинарном течении жидкости в плоском канале с учетом аксиальной теплопроводности при ступенчатом изменении температуры стенки. — ТВТ, 1973, т. 11, № 6.
4. Бейтман Г., Эрдей А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
5. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: ИЛ, 1962.

УДК 532.525.2 + 532.135

РАСПАД СВОБОДНОЙ СТРУИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Б. М. Хусид

(Минск)

К настоящему времени опубликовано большое число работ, посвященных распаду струи сильновязкой ньютоновской жидкости, вытекающей в маловязкую среду. Результаты этих работ показывают, что в зависимости от скорости истечения имеются

три режима распада струи. При малых скоростях она распадается под действием капиллярных сил, причем наиболее быстро растут длинноволновые осесимметричные возмущения.

С увеличением скорости характер развития возмущений меняется. Когда динамическое воздействие среды превышает капиллярные силы, длинноволновые изгибные возмущения растут значительно быстрее, чем осесимметричные. При дальнейшем увеличении скорости распад струи на крупные части сменяется распылом на множество мелких капель, размер которых не зависит от радиуса струи. Основной целью работы является определение диапазона скоростей, при котором струя вязкоупругой жидкости распадается на крупные части.

Исследуется развитие длинноволновых возмущений $kR \ll 1$ в круглой струе радиуса R вязкоупругой жидкости с плотностью ρ , вытекающей со скоростью U в маловязкую среду с плотностью ρ_0 , k — волновое число возмущения. Если для $kR \ll 1$ инкремент возмущений с ростом kR монотонно увеличивается, то характер распада приближается к распылу и требует исследования коротковолновой асимптотики. Анализ основан на уравнениях, выведенных в [1]. Рассматривается струя, прошедшая предварительную вытяжку или сжатие. Впервые постановка такой задачи предложена в [2]. Это математически незначительное усложнение задачи позволяет качественно оценить влияние продольного натяжения, имеющегося в вязкоупругой струе, на ее устойчивость. Берутся реологические уравнения максвелловской жидкости с вязкостью η и одним временем релаксации λ [3]: $\mathbf{T} + \lambda(D\mathbf{T}/Dt - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}) + \lambda \varepsilon(\mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) = 2\eta \mathbf{D}$, где D/Dt — конвективная производная; \mathbf{D} — тензор скоростей деформации; \mathbf{W} — тензор вихря; \mathbf{T} — тензор напряжений; $\varepsilon = 0, 1, -1$ соответственно для яуманновской, нижней и верхней конвективных производных. Модель максвелловской жидкости — это простейшая модель, качественно описывающая многие свойства полимерных жидкостей: мгновенную упругость, релаксацию напряжений, разность нормальных напряжений и т. д. [3]. Формулы для добавочных капиллярных и гидродинамических давлений, возникающих при возмущении поверхности струи $r = R + \xi(\varphi, z, t)$, берутся из [4—6]. Система уравнений для малых возмущений существенно упрощается, когда можно не учитывать зависимость продольного натяжения в струе от времени. Такое допущение приемлемо при $t/\lambda \ll 1$. Эти же уравнения в отсутствие продольного натяжения описывают развитие возмущений в отрелаксировавшей струе. Решение уравнений ищется в виде $\exp(ikz + \alpha t)$. Система уравнений распадается на несколько отдельных систем, каждая из которых соответствует определенному возмущению. Приведем формулы для азимутальной зависимости смещения поверхности и соответствующие дисперсионные уравнения. Возмущения, сохраняющие прямолинейность струи:

$$\xi = \xi_0 e^{\pm i2\varphi}, \frac{1}{4} \rho \alpha^2 R^2 + \frac{\alpha}{1 + \alpha \lambda} \left(2\eta_1 + \eta_2 \frac{k^2 R^2}{4} \right) - \frac{R^3}{2} V(k, 2) = 0,$$

$$\xi = \xi_0 e^{\pm i3\varphi}, \frac{\rho \alpha^2 R^2}{24} + \frac{\alpha}{1 + \alpha \lambda} \left(\eta_1 + \eta_2 \frac{k^2 R^2}{24} \right) - \frac{R^2}{8} V(k, 3) = 0,$$

$$\xi = \xi_0, \rho \alpha^2 \left(1 + \frac{k^2 R^2}{8} \right) + \frac{\alpha k^2}{1 + \alpha \lambda} \left(\eta_1 + 2\eta_3 + \eta_2 \frac{k^2 R^2}{8} \right) - \frac{T k^2}{2} - \frac{k^2 R^2}{2} V(k, 0) = 0.$$

Изгибные возмущения $\xi = \xi_0 e^{\pm i\varphi}$:

$$\left[\rho \alpha^2 R^2 + \frac{\alpha \eta_2 k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} - V(k, 1) R^2 \right] \left[\left(\rho \alpha R^2 + \frac{\eta_2 k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} \right) \left(1 - \frac{k^2 R^2}{12} \right) + \frac{4\eta_4}{1 + \alpha \lambda} + \frac{2k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} \left(\eta_3 - \eta_2 - \frac{\eta_1}{2} \right) \right] \left[\frac{1}{12} \left(\rho \alpha R^2 + \frac{\eta_2 k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} \right) + \frac{\eta_1}{1 + \alpha \lambda} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + k^2 R^2 \left(\rho \alpha R^2 + \frac{\eta_2 k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} - \frac{4 \eta_4}{1 + \alpha \lambda} \right) \left(\frac{\alpha \eta_0}{1 + \alpha \lambda} - T - \right. \\
& \left. - \frac{V(k, 1) R^2}{4} \right) \left[\frac{1}{12} \left(\rho \alpha R^2 + \frac{\eta_2 k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} \right) + \frac{\eta_1}{1 + \alpha \lambda} \right] + \\
& + k^2 R^2 \left[\rho \alpha^2 R^2 + \frac{\alpha \eta_2 k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} - V(k, 1) R^2 \right] \left[\frac{1}{24} \left(\rho \alpha R^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\eta_2 k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} \right) + \frac{\eta_1}{1 + \alpha \lambda} \right] \left[\frac{1}{4} \left(\rho \alpha R^2 + \frac{\eta_2 k^2 R^2}{1 + \alpha \lambda} \right) + \frac{2 \eta_1}{1 + \alpha \lambda} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Здесь σ — поверхностное натяжение; $K_n(\cdot)$ — функция Макдопальда

$$V(k, n) = \frac{\rho_0 (\alpha + ikU)^2}{kR} \frac{K_n(kR)}{K'_n(kR)} + \frac{\sigma}{k^2} (1 - n^2 - k^2 R^2).$$

Влияние вида реологического уравнения сказывается на формуле для продольного натяжения T и коэффициентах $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$: нижняя конвективная производная $\eta_1 = \eta_2 = \eta/(1 - \lambda\Gamma)$, $\eta_3 = \eta_4 = \eta/(1 + 2\lambda\Gamma)$, $T = 3\eta\Gamma/[1 - \lambda\Gamma(1 + 2\lambda\Gamma)]$, верхняя конвективная производная $\eta_1 = \eta_4 = \eta/(1 + \lambda\Gamma)$, $\eta_2 = \eta_3 = \eta/(1 - 2\lambda\Gamma)$, $T = 3\eta\Gamma/[1 + \lambda\Gamma(1 - 2\lambda\Gamma)]$, рунмановская производная $\eta_1 = \eta_3 = \eta$, $\eta_2 = \eta(1 + (3/2)\lambda\Gamma)$, $\eta_4 = \eta(1 - (3/2)\lambda\Gamma)$, $T = 3\eta\Gamma$ (Γ — скорость предварительного удлинения).

В длинноволновом приближении выведенные уравнения совпадают: для идеальной жидкости и учета только капиллярных сил с уравнениями Рэлея [4]; для стационарных относительно насадки возмущений в струе вязкой жидкости, вытекающей из эллиптической насадки ($\alpha = ikU$) с уравнением Бора [3]; для осесимметричных возмущений струи вязкой жидкости с уравнением Вебера [6]; для осесимметричных возмущений вязкоупругой струи при $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$ с [2, 7]. В [6] предложено рассматривать изгибные колебания струи вязкой жидкости с помощью теории изгиба упругой балки. В отличие от [6] уравнения для изгибных возмущений выведены нами непосредственно из уравнений гидродинамики. Ввиду того что в литературе отсутствует детальный анализ изгибных возмущений струи, опишем их более подробно. При $|\alpha\lambda| \ll 1$ уравнения для вязкой и вязкоупругой жидкостей совпадают. Сохраняя в дисперсионном уравнении главные члены по kR , получим

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \left(\alpha^2 - \frac{V(k, 1)}{\rho} \right) \left[\frac{\alpha^2}{12} + \frac{4\alpha\eta}{3\rho R^2} + 4 \left(\frac{\eta}{\rho R^2} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{2\alpha\eta k^2}{\rho} \left[\frac{\alpha^2}{12} \frac{\alpha\eta}{\rho R^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta}{\rho R^2} \right)^2 k^2 R^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Когда вязкие силы малы, дисперсионное уравнение примет вид

$$(2) \quad \alpha^2 + 2i\alpha \frac{\rho_0}{\rho + \rho_0} Uk - \frac{(\rho_0 U^2 - \sigma/R) k^2}{\rho + \rho_0} = 0.$$

При этом теряются два корня, соответствующих быстро затухающим возмущениям. Нарастание возмущений происходит при $\rho_0 \rho U^2 / (\rho + \rho_0) > \sigma/R$. Введем величину $\xi = \left[\frac{\rho_0}{\rho + \rho_0} \left(1 - \frac{\sigma}{\rho_0 U^2 R} \right) \right]^{1/2} \frac{\rho UR}{\eta}$, которая характеризует соотношение гидродинамических сил и вязких. При $\xi \gg 1$ уравнение (2) справедливо для всех $kR \leq 1$. Если $\xi \ll 1$, то (2) годится только для достаточно длинных волн $(\rho/(\rho + \rho_0))k^3 R^3 \ll (8/3)\xi$. Для более коротких волн $(\rho/(\rho + \rho_0))k^3 R^3 \gg (4/3)\xi$ инерционные силы малы:

$$(3) \quad \alpha \approx \frac{4(\rho_0 U^2 - \sigma/R)}{3\eta k^2 R^2 \left[1 + i \frac{8\rho_0}{3\rho} \left(\frac{\rho UR}{\eta} \right) \frac{1}{k^3 R^3} \right]}$$

При $\xi \ll 1$ зависимость инкремента $\text{Re}(\alpha)$ от kR имеет максимум при $kR \sim [(\rho + \rho_0)/\rho] \xi^{1/3}$. Соответствующее значение

$$\text{Re}(\alpha)_{\max} \sim \left[\frac{(\rho_0 U^2 - \sigma/R)^{1/3}}{(\rho + \rho_0) \eta R^2} \right]^{1/3}.$$

Отметим, что при $\left(\frac{\rho + \rho_0}{\rho} \xi^4\right)^{1/3} \ll 3$ вместо (1) для всех $kR \lesssim 1$ можно использовать уравнение

$$(4) \quad \alpha^2 + 2\alpha \left(i \frac{\rho_0}{\rho + \rho_0} Uk + \frac{3}{8} \frac{\eta k^4 R^2}{\rho + \rho_0} \right) - \frac{(\rho_0 U^2 - \sigma/R) k^2}{\rho + \rho_0} = 0.$$

Уравнение, аналогичное (4), при $\rho_0 \ll \rho$ было выведено другим способом в [8]. К такому же результату приводит и дисперсионное уравнение работы [6], если учесть, что в этом случае $\alpha \ll 3\eta/\rho R^2$. Расчет распределения скорости поперек струи для этих плоских изгибных возмущений дает выражение

$$v \approx \alpha \zeta_0 \left[\left(1 - k^2 \frac{x^2 - y^2}{4} \right) e_x - k^2 \frac{xy}{2} e_y - ikx e_z \right],$$

аналогичное распределению смещений при плоском изгибе упругого стержня. Таким образом, предложенная Вебером [6] аналогия между струей и упругой балкой справедлива при $(1 + \rho_0/\rho)^{1/3} \xi^{4/3} \ll 3$. Если $\xi \gg 1$, то распределение скорости поперек струи дается соотношением

$$v \approx \alpha \zeta_0 \left[\left(1 + k^2 \frac{3x^2 + y^2}{8} \right) e_x + k^2 \frac{xy}{4} e_y + ikx e_z \right],$$

и здесь аналогия Вебера не применима.

Для $|\alpha\lambda| \gg 1$ дисперсионное уравнение изгибных колебаний при сохранении только главных членов по kR записывается в виде

$$(5) \quad \rho \alpha^2 - Tk^2 \frac{\kappa - \frac{4\eta_4}{\lambda \rho R^2}}{\kappa + \frac{4\eta_4}{\lambda \rho R^2}} - V(k, 1) + \frac{\eta_2 k^2}{\lambda} \times \\ \times \frac{\frac{\kappa^2}{6} + \frac{2\kappa\eta_1}{\lambda \rho R^2} + \frac{2\eta_1 \left(\eta_3 - \eta_2 + \frac{\eta_1}{2} \right) k^2 R^2}{(\lambda \rho R^2)^2}}{\frac{\kappa^2}{12} + \frac{\kappa}{\lambda \rho R^2} \left(\eta_1 + \frac{\eta_4}{3} \right) + \frac{4\eta_1 \eta_4}{(\lambda \rho R^2)^2}} = 0.$$

Здесь $\kappa = \alpha^2 + (\eta_2/\lambda \rho) k^2$. При $|\kappa| \ll 4\eta_4/\lambda \rho R^2$ уравнение (5) можно упростить:

$$(6) \quad \alpha^2 + 2i\alpha \frac{\rho_0}{\rho + \rho_0} Uk - \left(\rho_0 U^2 - \frac{\sigma}{R} - T - \right. \\ \left. - \frac{\eta_2 \left(\eta_3 + \frac{\eta_1}{2} \right)}{2\lambda \eta_4} k^2 R^2 \right) \frac{k^2}{\rho + \rho_0} = 0.$$

Возмущения растут при

$$\frac{\rho \rho_0 U^2}{\rho + \rho_0} > \frac{\sigma}{R} + T + \frac{\eta_2 \left(\eta_3 + \frac{\eta_1}{2} \right)}{2\lambda \eta_4} k^2 R^2.$$

Таким образом, предварительная вытяжка увеличивает устойчивость струи, а сжатие—понижает. Значения инкремента достигают максимума при

$$kR = \left[\frac{\lambda \eta_4 \left(\frac{\rho \rho_0 U^2}{\rho + \rho_0} - \frac{\sigma}{R} - T \right)}{\eta_2 \left(\eta_3 + \frac{\eta_1}{2} \right)} \right]^{1/2}, \quad \operatorname{Re}(\alpha)_{\max} =$$

$$= \left(\frac{\rho \rho_0 U^2}{\rho + \rho_0} - \frac{\sigma}{R} - T \right) \left[\frac{\lambda \eta_4}{2(\rho + \rho_0) R^2 \eta_2 \left(\eta_3 + \frac{\eta_1}{2} \right)} \right]^{1/2}.$$

Уравнение (6) применимо при

$$\left[\frac{2(\rho + \rho_0) R^2 \eta_2 \left(\eta_3 + \frac{\eta_1}{2} \right)}{\lambda^3 \eta_4} \right]^{1/2} \ll \rho_0 U^2 - \frac{\sigma}{R} - T \ll$$

$$\ll \left[\frac{8(\rho + \rho_0) \eta_2 \left(\eta_3 + \frac{\eta_1}{2} \right)}{\lambda^2 \rho} \right]^{1/2}.$$

Это неравенство возможно только для $4\lambda \eta_4 / \rho R^2 \gg 1$.

Для $|k| \gg 4\eta_4 / \lambda \rho R^2$ уравнение (5) можно записать в виде

$$(7) \quad \alpha^2 + 2i\alpha \frac{\rho_0}{\rho + \rho_0} U k - \left(\rho_0 U^2 - \frac{\sigma}{R} + T - \frac{2\eta_2}{\lambda} \right) \frac{k^2}{\rho + \rho_0} = 0.$$

Возмущения растут при $\rho \rho_0 U^2 / (\rho + \rho_0) > \sigma/R + 2\eta_2/\lambda - T$. Для всех максвелловских жидкостей величина $(2\eta_2/\lambda - T) \sim \eta_2/\lambda$. Уравнение (7) применимо для

$$\rho_0 U^2 - \sigma/R + T - 2\eta_2/\lambda \gg \max [4\eta_4(\rho + \rho_0)/\lambda \rho, (\rho + \rho_0) R^2/\lambda^2].$$

Из неравенства видно, что влияние упругих сил в этом случае незначительно.

Расчет поля скоростей для отрелаксировавшей струи вязкоупругой жидкости показывает, что в случае выполнения условий, при которых дисперсионное уравнение изгибных возмущений (5) сводится к (6), можно применять аналогию между струей и вязкоупругой балкой. Если реализуются условия, при которых (5) сводится к (7), то аналогия не применима.

Как известно [4—6] для вязкой жидкости, из возмущений, сохраняющих прямолинейность струи, наиболее быстро растут осесимметричные. Аналогичный результат получается и для вязкоупругой жидкости. При $|\alpha\lambda| \ll 1$ дисперсионные уравнения для вязкой и вязкоупругой жидкостей совпадают. Оставляя только главные члены по kR , получим

$$(\rho + \rho_0 s) \alpha^2 + 2\alpha \left(i\rho_0 s U k + \frac{3}{2} \eta k^2 \right) - \left[\rho_0 s U^2 + \frac{\sigma}{2R} (1 - k^2 R^2) \right] k^2 = 0.$$

$$\text{Здесь } s = -\frac{kR}{2} \frac{K_0(kR)}{K'_0(kR)} \approx -\frac{k^2 R^2}{2} \ln \frac{kR}{2} \quad \text{при } kR \ll 1.$$

Для

$$(8) \quad \left[\left(1 + \frac{\rho_0 s}{\rho} \right) \frac{\rho_0 s}{\rho} \left(\frac{\rho U R}{\eta} \right)^2 + \frac{\sigma R (\rho + \rho_0 s)}{2\eta^2} (1 - k^2 R^2) \right] \gg 3kR$$

вязкими силами можно пренебречь:

$$\alpha = -i \frac{\rho_0 s}{\rho + \rho_0 s} U k \pm \left[\frac{\rho \rho_0 s}{\rho + \rho_0 s} U^2 + \frac{\sigma}{2R} (1 - k^2 R^2) \right]^{1/2} \frac{k}{(\rho + \rho_0 s)^{1/2}}.$$

Если левая часть неравенства (8) значительно меньше правой, то можно не учитывать инерционные члены:

$$\alpha = \frac{\rho_0 s U^2 + \frac{\sigma}{2R} (1 - k^2 R^2)}{3\eta \left(1 + i \frac{2\rho_0 s U}{3\eta k} \right)}$$

При $|\alpha\lambda| \gg 1$ из дисперсионного уравнения для вязкоупругой жидкости получим

$$\alpha = -i \frac{\rho_0 s}{\rho + \rho_0 s} U k \pm \left[\frac{\rho \rho_0 s}{\rho + \rho_0 s} U^2 + \frac{T}{2} - \frac{\eta_1 + 2\eta_3}{\lambda} + \frac{\sigma}{2R} (1 - k^2 R^2) \right]^{1/2} \frac{k}{(\rho + \rho_0 s)^{1/2}}$$

Возмущения растут при

$$\frac{\rho \rho_0 s}{\rho + \rho_0 s} U^2 + \frac{\sigma}{2R} (1 - k^2 R^2) > \frac{\eta_1 + 2\eta_3}{\lambda} - \frac{T}{2}$$

Это приближение применимо, если

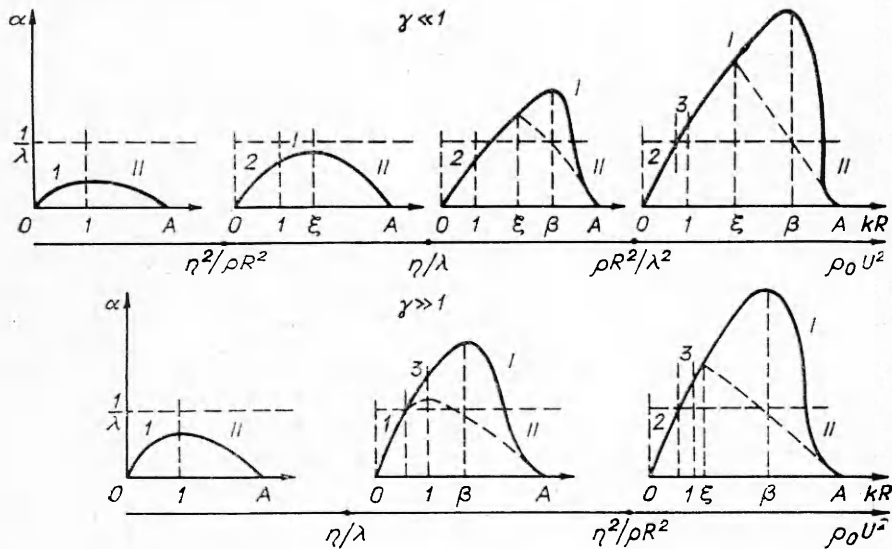
$$\frac{\rho_0}{\rho_0 + 3\rho} \left(\frac{U\lambda}{R} \right)^2 + \frac{\sigma\lambda^2}{2R^3 \left(\rho + \frac{\rho_0}{3} \right)} \gg 1 + \left(\frac{\eta_1 + 2\eta_3}{\lambda} - \frac{T}{2} \right) \frac{\lambda^2}{R^2 \left(\rho + \frac{\rho_0}{3} \right)}$$

и если выполняется для достаточно коротких волн неравенство

$$kR \geq \frac{(\rho + \rho_0 s)^{1/2}}{\left[\rho_0 s \left(\frac{U\lambda}{R} \right)^2 + \frac{\sigma\lambda^2}{2R^3} (1 - k^2 R^2) - \frac{\lambda^2}{R^2} \left(\frac{\eta_1 + 2\eta_3}{\lambda} - \frac{T}{2} \right) \right]^{1/2}}$$

Для максвелловских жидкостей с нижней конвективной, верхней конвективной и яуманновской производными величина $(\eta_1 + 2\eta_3)/\lambda - T/2$ соответственно равна: $3\eta(1 - \lambda\Gamma/2)/[\lambda(1 - \lambda\Gamma)(1 + 2\lambda\Gamma)]$, $3\eta(1 - \lambda\Gamma/2)/[\lambda \times (1 + \lambda\Gamma)(1 - 2\lambda\Gamma)]$, $(3\eta/\lambda)(1 - \lambda\Gamma/2)$. Как видно из этих выражений, влияние предварительной вытяжки или сжатия на осесимметричные возмущения сводится в основном к увеличению продольной вязкости.

Анализ дисперсионных уравнений для осесимметричных и изгибных



Ф и г. 1

возмущений показывает важность для струи вязкоупругой жидкости параметра $\gamma = (\eta_4 \lambda / \rho R^2)^{1/2}$, равного отношению расстояния, проходимого волной сдвига (распространяющейся со скоростью $(\eta/\rho\lambda)^{1/2}$ [3]) за время релаксации, и радиуса струи. Аналогичная величина, названная числом упругости, выделена в работе [9] с учетом полученного в [9, 10] дисперсионного уравнения осесимметричных возмущений в отрелаксировавшей капиллярной струе максвелловской жидкости. Однако физический смысл параметра γ и его существенное влияние на изгибные возмущения в этой работе не рассматривались.

Рассмотрим распад отрелаксировавшей струи с числом Оносорге $Z = \eta/\sqrt{\rho\sigma R} \geq 1$, двигающейся в воздухе ($\rho \gg \rho_0$) с достаточно большой скоростью $\rho_0 U^2 \gg \sigma/R$.

Проведенный выше анализ применим только для длинноволновых возмущений $kR \ll 1$. Для описания динамики коротковолновых возмущений $\zeta_0 \exp[i(kz + n\varphi) + \alpha t]$, $n = 0 - 3$, $kR \gg 1$ можно использовать дисперсионное уравнение для плоских (так как $kR \gg n$) возмущений на поверхности полубесконечного слоя отрелаксировавшей вязкоупругой жидкости. Решение такой задачи для вязкоупругой жидкости получается из соответствующего решения для вязкой жидкости (см. [11]) при замене $\eta \rightarrow \eta/(1 + \alpha\lambda)$ [12]:

$$(9) \quad \left[\alpha + \frac{2\eta k^2}{\rho(1 + \alpha\lambda)} \right]^2 = \frac{\rho_0 U^2 k^2 - \sigma k^3}{\rho} + \frac{4\eta^2 k^3}{\rho^2 (1 + \alpha\lambda)^2} \left[k^2 + \frac{\rho\alpha}{\eta} (1 + \alpha\lambda) \right]^{1/2}.$$

В случае вязкой жидкости соотношение (9) выводится и путем предельного перехода $kR \gg 1$ в точном дисперсионном уравнении для осесимметричных возмущений круглой струи [11].

Проанализируем уравнение (9) более детально, чем в [12]. При $|\alpha\lambda| \ll 1$ уравнения для вязкой и вязкоупругой жидкостей совпадают. Для $Z \geq 1$ при $1 \ll kR \ll \xi$ вязкие силы малы:

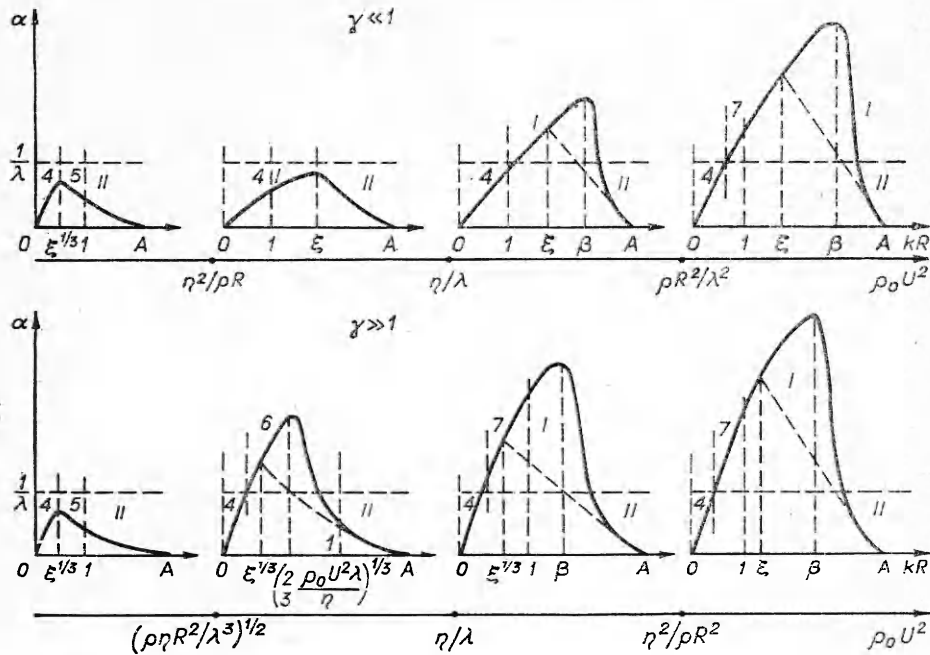
$$(10) \quad \alpha \approx \sqrt{[(\rho_0 U^2 - \sigma k)/\rho]} \cdot k.$$

При $\xi \ll kR \leq \rho_0 U^2 R/\sigma$ малы инерционные силы:

$$(11) \quad \alpha \approx (\rho_0 U^2 - \sigma k)/2\eta.$$

Зависимость инкремента от kR имеет максимум при $kR \sim \xi$. Соответствующее значение $\alpha_{\max} \sim \rho_0 U^2/\eta$. При $\rho_0 U^2 \ll \eta/\lambda$ влияние упругих сил не проявляется. Для $\rho_0 U^2 \gg \eta/\lambda$ уравнение (9) также сводится к двум предельным выражениям (10), (11). Однако это происходит в другом диапазоне волновых чисел. Соотношение (10) применимо при $1 \ll kR \ll (\rho_0 U^2 - \eta/\lambda)/(\sigma/R)$, а (11) — при $(\rho_0 U^2 - 2\eta/\lambda)/(\sigma/R) \leq kR \leq \rho_0 U^2 R/\sigma$. Зависимость инкремента от kR имеет максимум при $kR = \beta \approx 2\rho_0 U^2 R/(3\sigma)$. Соответствующее значение $\alpha_{\max} \approx (2/(3\sqrt{3}))[(\rho_0 U^2)^{3/2}/(\sigma\sqrt{\rho})]$.

На фиг. 1, 2 схематично изображены зависимости $\alpha(kR)$ для осесимметричных (фиг. 1) и изгибных (фиг. 2) возмущений при различных значениях $\rho_0 U^2$. На приведенных внизу осях значений аэродинамического напора $\rho_0 U^2$ отмечены диапазоны величин $\rho_0 U^2$, к которым эти зависимости $\alpha(kR)$ относятся. В случае, когда для вязкоупругой жидкости имеется участок $\alpha \gg 1/\lambda$, штриховой линией нанесен отличающийся участок кривой $\alpha(kR)$ для ньютоновской жидкости с такой же вязкостью. Фиг. 1, 2 иллюстрируют влияние вязкоупругих сил на распад, вызванный аэродинамическим воздействием воздуха. Инкременты осесимметричных возмущений для вязкой и идеальной жидкостей, а также изгибных для идеальной жидкости вычислены в [4, 14] без упрощающих приближений. Соответствующие графики для различных значений параметров даны в [15].



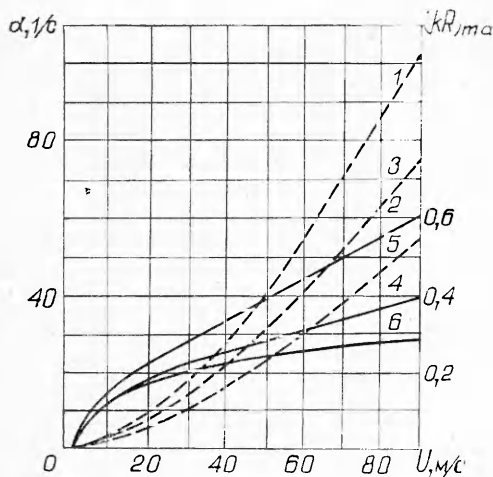
Ф и г. 2

Для кривых 1, 2 (фиг. 1) $\alpha\lambda \ll 1$ и осесимметричные возмущения развиваются так же, как и в вязкой жидкости. Для 1 $\xi \ll 1$ и при $kR \geq 2e^{-1/\xi^2}$ инерционные силы малы: $\alpha \approx \rho_0 U^2 / 3\eta$; для 2 $\xi \gg 1$ и малы вязкие силы: $\alpha \approx \sqrt{\rho_0 s / \rho} \cdot Uk$. Для кривой 3 $\alpha\lambda \gg 1$ и появляется влияние упругих сил*. Однако здесь $\rho_0 U^2 \gg \eta/\lambda$, и ими можно пренебречь. Зависимости $\alpha(kR)$ длинноволнового распада I—3 переходят при $kR \gg 1$ в соответствующие зависимости коротковолнового распада I, II**. Кривая I описывается выражением (10), а II — (11). Влияние упругих сил (соотношение $\rho_0 U^2$ и η/λ) в коротковолновой области сказывается в основном на диапазонах волновых чисел, в которых применены приближенные формулы (10), (11). Из соотношения (9) (а также (11)) видно, что $\alpha(kR) = 0$ при $kR = \rho_0 U^2 R / \sigma$ (точка A на фиг. 1, 2). Возмущения с более короткими волнами затухают.

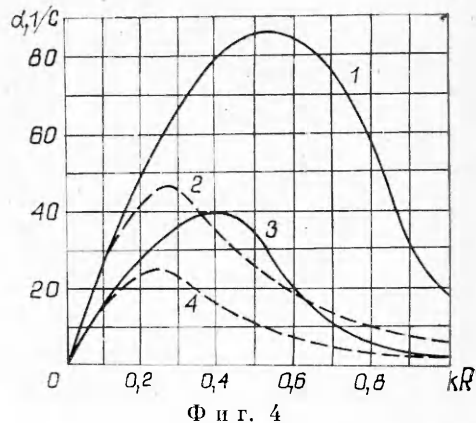
Сравнение поведения вязкой и вязкоупругой жидкостей показывает, что в случае $\gamma \ll 1$ при $\rho_0 U^2 \ll \eta/\lambda$ распад вязкой и вязкоупругой струй происходит одинаково. Для $\rho_0 U^2 \ll \eta^2/\rho R^2$ быстрее растут длинноволновые изгибные возмущения с волновым числом $kR \sim \xi^{1/3}$, $\alpha \sim (\rho_0 U^2 / \sqrt{\rho} \times \eta R^2)^{2/3}$. При $\eta^2/\rho R^2 \ll \rho_0 U^2 \ll \eta/\lambda$ быстрее развиваются коротковолновые возмущения $kR \sim \xi$, $\alpha \sim \rho_0 U^2 / \eta$. В случае $\gamma \gg 1$ распад вязкой и вязкоупругой струй аналогичен только для $\rho_0 U^2 \ll \sqrt{\rho \eta R^2 / \lambda^3}$. При $\sqrt{\rho \eta} \times R^2 / \lambda^3 \ll \rho_0 U^2 \ll \eta/\lambda$ в вязкоупругой струе быстрее растут длинноволновые возмущения $kR \sim (2\rho_0 U^2 \lambda / 3\eta)^{1/2}$, $\alpha \sim \rho_0 U^2 / (3\eta \rho R^2 / \lambda)^{1/2}$. Их длина волны меньше, чем у возмущений с наибольшим инкрементом для ньютоновской жидкости с такой же вязкостью. Для $\rho_0 U^2 \gg \eta/\lambda$ в вязкоупругой струе независимо от величины γ быстрее развиваются коротковолновые

* В работе [13] построены аналогичные рисунки для длинноволнового распада струи. Однако ошибочно отмечены максимумы на кривых 1—3 при $kR \sim 1$. Это связано с заменой функций Макдональда на их первые члены разложения при $kR \ll 1$. Остальные результаты [13] верны.

** При $kR = 1$ выражения для α , даваемые длинноволновым и коротковолновым приближениями, различаются только значениями числового множителя порядка единицы.



Ф и г. 3



Ф и г. 4

возмущения $kR \sim 2\rho_0 U^2 R / 3\sigma$, $\alpha \sim 2(\rho_0 U^2 / 3)^{3/2} / \sigma \sqrt{\rho}$. В ньютоновской жидкости с аналогичной вязкостью длина волны возмущений с максимальным инкрементом больше.

На фиг. 3 показано влияние скорости струи на максимальное значение инкремента изгибных возмущений и соответствующее безразмерное волновое число для струи с параметрами: $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\rho_0 = 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $\eta = 10^3 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\sigma = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$, $R = 10^{-2} \text{ м}$. Для кривых 1, 2 $\lambda = 0,1 \text{ с}$, $\gamma = 31,6$; 3, 4 — $\lambda = 0,03 \text{ с}$, $\gamma = 17,3$; 5, 6 — ньютоновская жидкость, $\gamma = 0$. Результаты расчетов $\lambda = 10^{-3} \text{ с}$, $\gamma = 3,16$ практически совпадают с кривыми 5, 6. Как видно из фиг. 3, для небольших скоростей влияние упругих свойств незначительно. С увеличением γ максимальное значение инкремента растет, а волновое число соответствующего возмущения уменьшается. Фиг. 4 иллюстрирует влияние упругих свойств на характер дисперсионных кривых. Для графиков 1, 2 $U = 80 \text{ м/с}$, 3, 4 — $U = 50 \text{ м/с}$. Нечетные номера соответствуют вязкоупругой жидкости $\lambda = 0,1 \text{ с}$, а четные — ньютоновской. Остальные параметры струи те же, что и для фиг. 3.

Влияние предварительной вытяжки струи сказывается только на возмущениях, растущих быстрее, чем жидкость релаксирует.

Для струй с $\gamma \ll 1$ влияние предварительной вытяжки сводится в основном к изменению величины вязкости. В случае $\gamma \gg 1$, помимо изменения величины вязкости, продольное натяжение уменьшает влияние аэродинамического напора $\rho_0 U^2$ на развитие изгибных возмущений (см. (6)).

Таким образом, проведенный сопоставительный анализ для вязкой и вязкоупругой жидкостей показывает, что наличие упругих свойств, которые описываются максвелловской моделью, качественно меняет характер распада струи.

Поступила 15 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Хусид Б. М. Свободные струи реологически сложной жидкости. — ДАН БССР, 1979, т. 23, № 12.
2. Енгов В. М. Об устойчивости капиллярных струй упруговязких жидкостей. — Инж.-физ. журн., 1978, т. 34, № 2.
3. Астарита Д. К., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.
4. Стретт Д. В. (Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955.
5. Бор Н. Определение коэффициентов поверхностного натяжения воды методом колебаний струи. — В кн.: Избранные научные труды. М.: Наука, 1970.
6. Вебер К. Распад струи жидкости. — В сб.: Двигатели внутреннего сгорания. Т. 1. М.—Л.: ОНТИ, 1936.
7. Goldin A. M., Yerushalmi J. et al. Breakup of a laminar capillary jet of viscoelastic fluid. — J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, N 4.
8. Енгов В. М., Ярин А. Л. Динамика струй капельной жидкости. Препринт № 127. М.: изд. Ин-та проблем механики АН СССР, 1979.

9. Kroesser F. W., Middleman S. Viscoelastic jet stability.— AICHE J., 1969, vol. 15, N 3.
10. Middleman S. Stability of a viscoelastic jet.— Chem. Eng. Sci., 1965, vol. 20, N 12.
11. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959.
12. James P. W. On the atomization of elasticoviscous liquids.— Rheol. Acta, 1976, vol. 15, N 5.
13. Шульман З. П., Хуснд Б. М. О распаде вязкоупругой струи.— В сб.: Тепло- и массоперенос: физические основы и методы исследований. Минск, 1979.
14. Петров Г. И., Калинина Т. Д. Применение метода малых колебаний к исследованию распада струи топлива в воздухе.— Технические заметки МАП, 1947, № 4.
15. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977.

УДК 533.6.071; 629.7.018.1

ВОЗМОЖНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ НА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ АДИАБАТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ С ВЫСОКИМ ДАВЛЕНИЕМ

В. И. Пинаков, В. Н. Рычков, М. Е. Топчиян

(Новосибирск)

Перспективы развития авиационной и аэрокосмической техники требуют создания новых наземных аэродинамических установок, обеспечивающих моделирование полетных условий в диапазоне чисел Маха $M = 6-24$ при сохранении чисел Рейнольдса, близких к натурным. Как следует из работы [1], для полного моделирования обтекания при указанных числах Маха необходимо иметь числа Рейнольдса, отнесенные к диаметру рабочей части сопла, на уровне 10^9 при $M = 6$ и $3 \cdot 10^8$ при $M = 13$.

Сооружение промышленных установок для аэродинамических испытаний перспективных летательных аппаратов в диапазоне натуральных чисел Re , по оценкам американских специалистов, потребует затрат в сотни миллионов долларов, при этом стоимость одного запуска составит от 1,6 до 3,4 млн. долларов [1].

Перспективным направлением, обеспечивающим максимальное приближение к натурным числам Re , является создание достаточно дешевых в изготовлении и эксплуатации аэродинамических установок импульсного действия с высокими начальными параметрами газа в форкамере. Импульсный режим работы дает возможность получать высокие начальные параметры истекающего газа, а вследствие этого большие числа Маха и Рейнольдса в рабочей части.

На импульсных установках получены в настоящее время рекордные параметры по предельным числам Маха при давлениях в форкамере до $p_0 \approx 400$ МПа. Однако моделируемые на этих установках числа Re в настоящее время уже недостаточны.

Органический недостаток существующих импульсных систем, работающих в диапазоне времен более десяти миллисекунд, обусловлен непрерывным падением давления газа в форкамере в процессе истечения, вследствие чего эти установки работают в режиме меняющихся во времени параметров потока. Повышение начального давления в форкамере увеличивает числа Рейнольдса, но из-за эффектов реального газа ведет к дополнительному увеличению скорости спада параметров газа [2], это осложняет интерпретацию полученных результатов, уменьшает и без того низкие коэффициенты использования рабочего газа.

Существующие импульсные установки используют различные способы подогрева рабочего газа, которые можно условно разделить на две группы. Первая использует специальные вспомогательные устройства, которые осуществляют подогрев от внешнего теплового источника: электро-разрядные, омические, кауперные системы и системы, использующие хи-